Matemática em Toda Parte II

Episódio: "Matemática no Transporte"

Resumo

O episódio "Matemática no Transporte", da série *Matemática em Toda Parte II*, vai mostrar como alguns conceitos matemáticos estão presentes na tentativa do homem em criar meios para superar e transpor obstáculos na terra, no mar e no ar, para chegar ao seu destino de forma mais eficiente. Nessa tentativa de driblar enormes distâncias e criar referências seguras e precisas, o vídeo apresenta como os conceitos matemáticos envolvendo parábola, catenária, trigonometria e sistemas de localização interagem com conhecimentos da Geografia e da Física, nessa grande caminhada. De uma forma bem instrutiva e divertida veremos que, independente de se olhar para o céu, para a terra ou para um equipamento com GPS, a humanidade foi percebendo que no meio do caminho há matemática e, que há matemática no meio do caminho. Uma excelente oportunidade para se veja a Matemática em toda parte.

Palavras-chave

Transportes, navegações, GPS, trigonometria, parábola, catenária.

Nível de ensino

Ensino Fundamental (9º ano).

Ensino Médio.

Componente curricular

Matemática.

Disciplinas relacionadas

Geografia e Física.

Aspectos relevantes do vídeo

- Passar sempre a ideia dos transportes como uma tentativa de superação do ser humano em transpor obstáculos, driblar enormes distâncias, criar referências seguras, proteger-se de fenômenos naturais durante o deslocamento, de modo que possa chegar ao seu destino de forma mais eficiente.
- A importância da Matemática na determinação da forma das pontes diante das necessidades de tráfego, carga e resistência, além das condições geográficas e econômicas.
- As propriedades das curvas Catenária e Parábola, deixando bem clara a distinção entre ambas por meio de suas propriedades e aplicações.
- Interligação entre conceitos da Matemática e da Geografia no tema navegações, ampliando a visão sobre a localização no mar.
- Abordagem do Sistema de Posicionamento Global (GPS) indicando de forma simplificada o que é necessário e como funciona esse sistema, além de interligá-lo com conceitos da Física.

Duração da atividade

Quatro horas-aula.

O que o aluno poderá aprender com esta aula

Explorar e entender algumas propriedades da parábola e da catenária apresentadas no vídeo (sugestão para o Ensino Médio).

Aplicar alguns conceitos básicos de trigonometria na medição de distâncias inacessíveis (sugestão para o Ensino Fundamental).

Conhecimentos prévios que devem ser trabalhados pelo professor com o aluno

Trigonometria no triângulo retângulo.

Função quadrática.

Estratégias e recursos da aula/descrição das atividades

Caro(a) professor(a), apresentaremos algumas sugestões de atividades para dar suporte à exibição do episódio "Matemática no Transporte". Nossa ideia é dividir as atividades em duas aulas, cada uma tratando de temas apresentados no vídeo.

Na primeira aula, sugerimos uma exploração das curvas parábola e catenária. Elas possuem propriedades e aplicações interessantíssimas e, apesar de serem muito parecidas na forma, possuem equações completamente diferentes. Utilizaremos o software *GeoGebra* nessa investigação, mostrando por que essas curvas são diferentes. Para isso, será necessária a utilização de um laboratório de informática.

Na segunda aula, que pode ser aplicada tanto em turmas do 9º ano do ensino fundamental quanto com os alunos da 1ª série do ensino médio, apresentaremos atividades envolvendo a trigonometria no triângulo retângulo, para determinar distâncias inacessíveis, ou seja, obter distâncias de forma indireta.

Em geral, procuraremos indicar a duração de cada atividade para auxiliá-lo em seu planejamento. Lembre-se de que estas sugestões podem e devem ser adaptadas à sua realidade. Apresente seu planejamento aos professores de Geografia e Física e peça sugestões para tornar sua abordagem mais interdisciplinar!

Aula 01 – "Comparando Parábolas e Catenárias"

Na primeira aula, o objetivo principal é comparar a parábola com a catenária, a partir das equações que descrevem essas curvas, utilizando o software *GeoGebra*. Antes de passarmos às atividades, gostaríamos de apresentar algumas informações históricas e uma orientação metodológica sobre esse assunto.

Um pouco de história...

A catenária é uma curva que representa o formato de um cabo suspenso pelas extremidades sob a ação de seu próprio peso. O nome foi batizado por Leibniz, derivado da palavra latina *catena* que significa cadeia/corrente, lembrando a curva formada por uma corrente suspensa.

Fig. 1 – Catenária: a curva de uma corrente suspensa.

Como é uma curva de simples construção e com o formato semelhante ao da parábola, durante muito tempo se acreditou, incluindo aí Galileu e Da Vinci, que a curva da corrente suspensa fosse uma parábola. Somente em 1691, Johann Bernoulli apresentou uma solução analítica para o problema, mostrando que a equação da catenária não era a de uma parábola. Segundo alguns estudiosos em história da matemática (BOYER, 1992; MAOR, 2004), a solução do problema da catenária foi um dos primeiros grandes sucessos do cálculo diferencial e integral na solução de problemas difíceis, o que contribui para sua rápida difusão por toda a Europa, a partir do final do século XVII.

Escrita na forma atual, a equação da catenária é dada por:

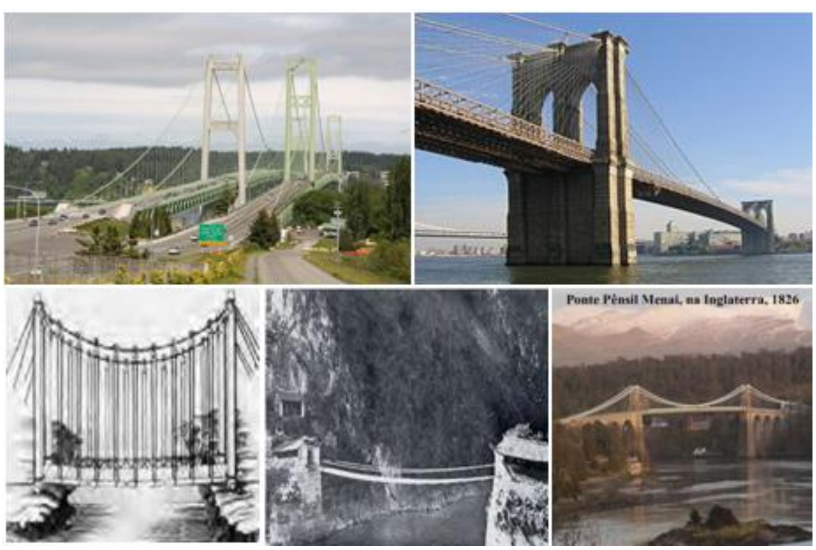
$$y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$$

em que ***a*** é uma constante cujo valor depende dos parâmetros físicos da corrente.

Orientação metodológica

Para uma aula no ensino médio, não vamos (e não podemos) nos preocupar com a demonstração dessa curva, mas apenas com a comparação dela com a parábola, utilizando o dinamismo e as animações presentes em um software de geometria dinâmica. Para maiores detalhes sobre essa demonstração veja o excelente texto: “Parábola e Catenária: história e aplicações”, disponível em <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-17062008-135338/pt-br.php>

A construção de pontes pode ser um grande motivador, tanto pelo vídeo, quanto pelas muitas pontes construídas no Brasil e no mundo, relacionadas com essas duas curvas, conforme ilustram as figuras abaixo.



Atividade 1 – Comparando Catenárias com Parábolas

Essa atividade está dividida em dois momentos, sendo o segundo momento dividido em duas partes, cada uma contendo explorações sobre as curvas parábola e catenária.

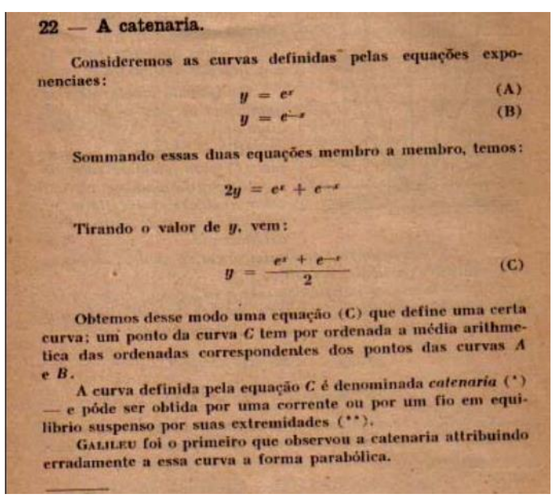
1º Momento: Exibição da 1ª parte do vídeo (10 minutos)

Exiba a primeira parte do episódio Cidades	
Imagem Inicial (0:00)	Imagem final(05:20)
	

2º Momento (80 minutos)

Distribuição da Lista de atividades 1, contendo três partes, a serem aplicadas sucessivamente. Sugerimos que os alunos sejam divididos em duplas, no laboratório de informática, para agirem de forma colaborativa. A parte I foi inspirada na forma como essa curva é apresentada no livro didático *Curso de Matemática, 4º ano. (*ROXO, THIRÉ, MELLO e SOUZA, 1934, p. 88) usado no Colégio Pedro II, na década de 1940.

.



22 — A catenaria.

Consideremos as curvas definidas pelas equações exponenciaes:

$$y = e^x \qquad (A)$$

$$y = e^{-x} \qquad (B)$$

Sommando essas duas equações membro a membro, temos:

$$2y = e^x + e^{-x}$$

Tirando o valor de y, vem:

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad (C)$$

Obtemos desse modo uma equação (C) que define uma certa curva; um ponto da curva C tem por ordenada a média arithmetica das ordenadas correspondentes dos pontos das curvas A e B.

A curva definida pela equação C é denominada *catenaria* (*) — e póde ser obtida por uma corrente ou por um fio em equilibrio suspenso por suas extremidades (**).

GALILEU foi o primeiro que observou a catenaria attribuindo erradamente a essa curva a forma parabólica.

tvescola
o canal da educação

Vídeos da TV Escola

DICAS PEDAGÓGICAS

Folha de Atividades - 1ª Aula – Parte I

Construindo a Catenária a partir de exponenciais

Parte I – Construindo uma catenária a partir de curvas exponenciais.

1 – Abrir o *GeoGebra* e inserir as curvas de equação y = e^x e y = e^(-x), na caixa de entrada que fica na parte inferior da tela do programa.

2 – Construir um ponto A sobre o eixo x, usando a função ponto em objeto.

3 – Construir uma reta perpendicular ao eixo x, que passe pelo ponto A.

4 – Construir os pontos de intersecção da reta com as curvas, através da função intersecção entre dois objetos.

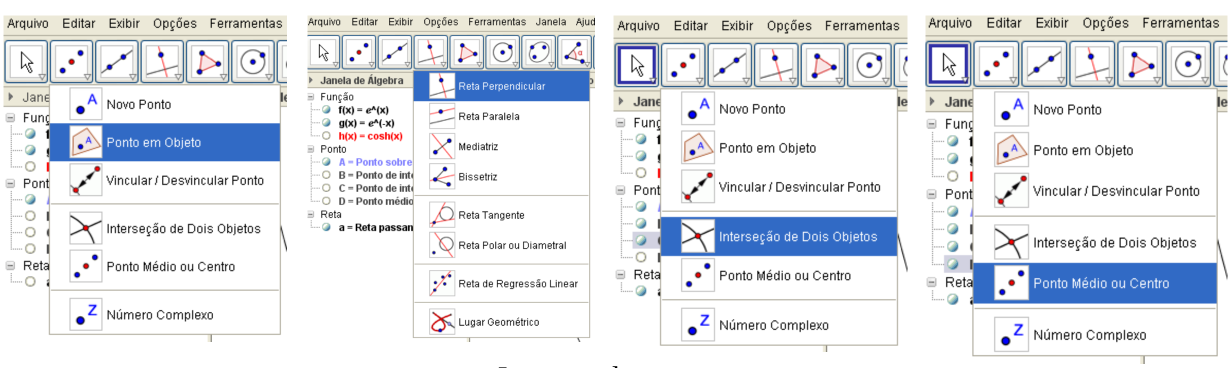
5 – Construir o ponto médio entre os dois pontos obtidos na etapa anterior.

6 – Clicar nesse ponto médio, com o botão direito do *mouse* e habilitar o rastro.

7 – Mova o ponto A.

8 – Que curva é essa? Por quê?

As etapas 2, 3, 4 e 5 estão representadas, respectivamente, na mesma ordem das figuras a seguir:



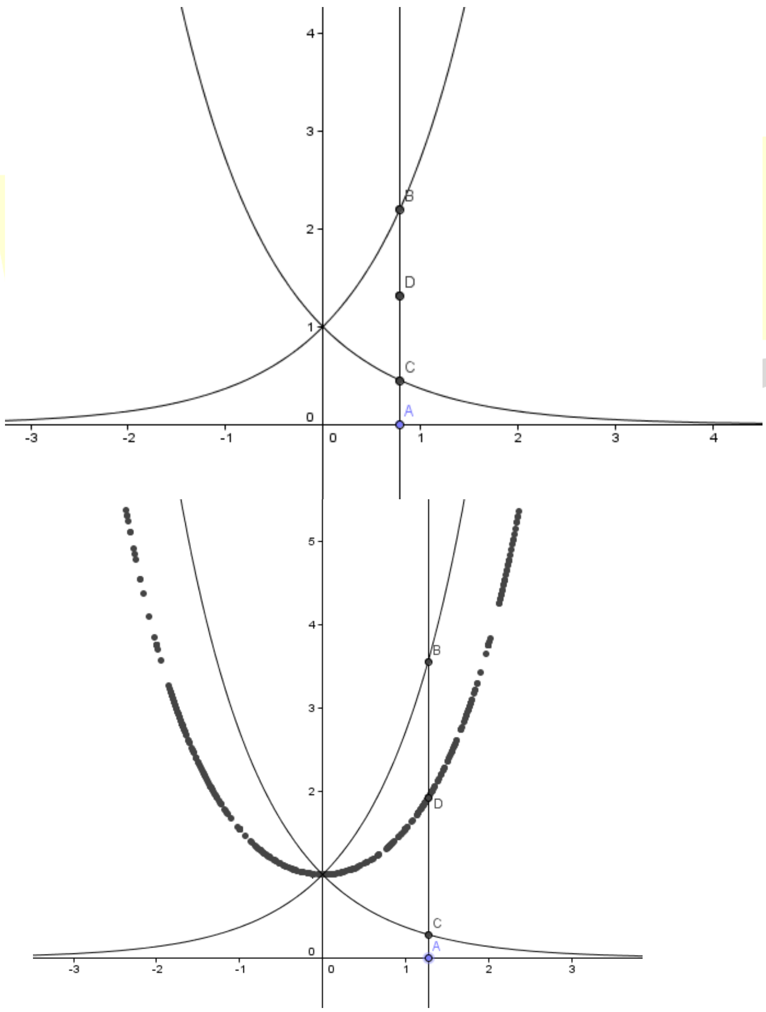
Imagens do autor

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY,** no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**

Na internet acesse http://tvescola.mec.gov.br e assista ao vivo, 24 horas.

Gabarito e comentários da Parte 1 da Atividade 1

Após as construções, a tela do aluno ficará como a figura 2. Certifique-se de que todos os alunos chegaram até aqui. Atente para que nessa construção, ao variarmos o ponto A, visualizamos a trajetória do ponto D. Isso é equivalente a variar x, e observar o comportamento de $y = \cosh(x)$ que é a equação da catenária. Assim, a partir de exponenciais, construímos a catenária, conforme a curva que já conhecemos.



Imagens do autor

Folha de Atividades - 1ª Aula – Parte II

Comparando a Catenária com a Parábola

Vamos considerar uma Catenária, com o parâmetro a=1 para simplificar, cuja equação é $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, e tentar encontrar uma parábola que se ajuste a essa curva. No *GeoGebra*, isso é equivalente a tentar descobrir a parábola que coincida com a catenária, por meio da observação visual. Ou seja, a atividade é bem experimental, aproveitando a integração entre os recursos da geometria dinâmica e da álgebra, para trabalhar um ajuste de curvas por tentativa e erro, a partir da variação dos parâmetros das equações das curvas que serão desenhadas dinamicamente na tela.

Vamos às seguintes ações:

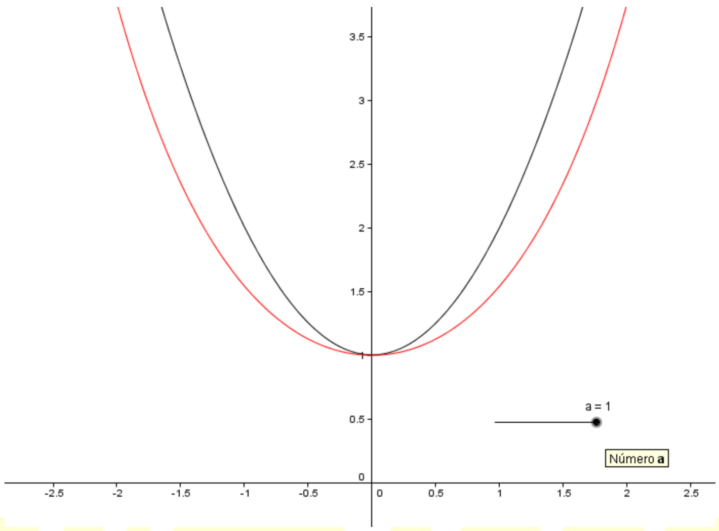
1 - Abrir o *GeoGebra* e inserir as curvas de equação $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, na caixa de entrada que fica na parte inferior da tela do programa.

2 – Observe que essa catenária passa pelo ponto (0,1). Se a catenária fosse uma parábola, esse seria um ponto especial da parábola. Que ponto seria esse?

3 – Considerando a simetria da parábola, e o ponto analisado acima, o eixo y seria o eixo de simetria da parábola. Assim, temos que nossa curva seria uma "parábola" de equação $y = ax^2 + 1$. Explique o porquê dessa equação. (Sugestão: utilize as translações e dilatações.)

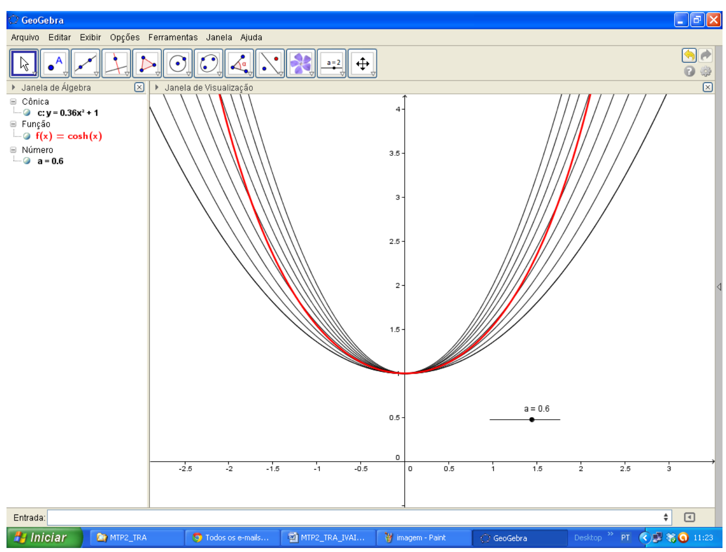
4 – A partir daí, vamos construir uma parábola de equação $y = ax^2 + 1$, com o parâmetro a variando no intervalo real de 0 a 1. Para isso, insira um controle deslizante, ajustando-o para o intervalo dado, com incremento de 0,05. Em seguida, entre com a equação dada. A parábola será desenhada para a=1.

5 – Nesse ponto, sua tela deve ser semelhante à apresentada abaixo.



6 – Varie o controle deslizante, usando o *mouse*, e tente fazer a parábola (em preto) coincidir com a catenária (em vermelho). Foi possível? Por quê?

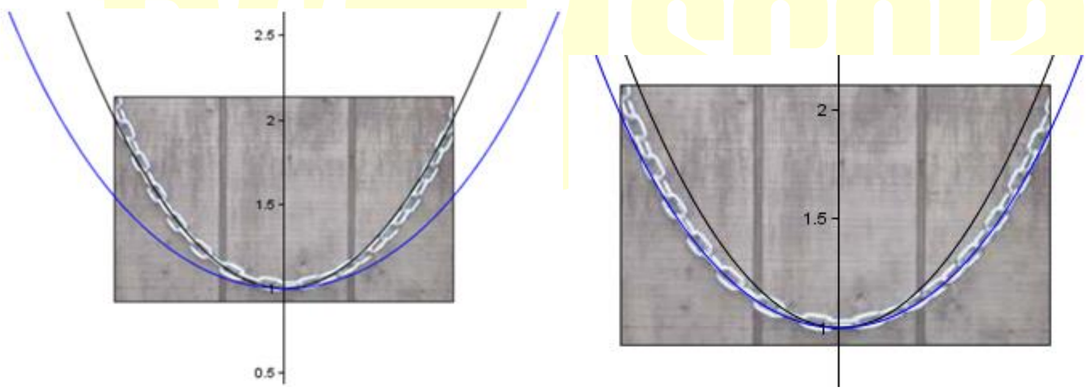
7 – Vamos agora fazer uma animação para visualizar várias parábolas que se aproximam, mas que não coincidem com a catenária. Varie o controle deslizante, de 1 a 0,6, com incrementos de - 0,05. A figura abaixo mostra o resultado visual esperado.



Imagens do autor

8 – Para finalizar essa comparação, abra o arquivo do *GeoGebra* “CorrenteCatenariaParabola”, disponível em:
<http://www.projetofundao.ufrj.br/matematica/tecnologias/tvescola/CorrenteCatenariaParabola.ggb>

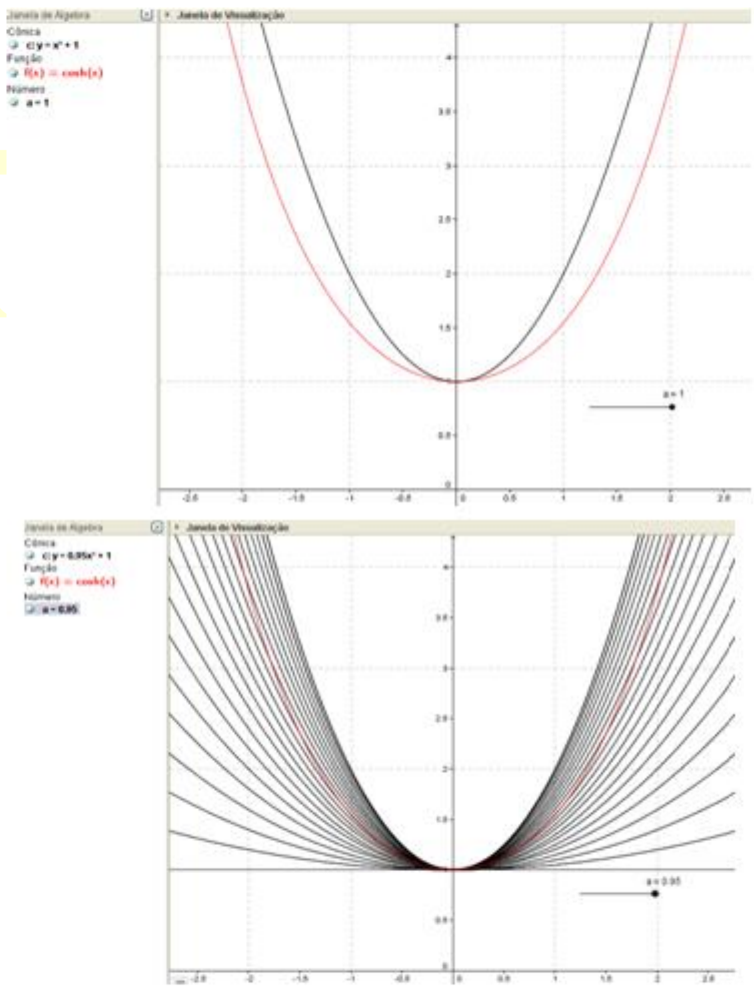
Temos a imagem de uma corrente. Qual das duas curvas se ajusta melhor à curva formada pela corrente? Varie o parâmetro *a*, e veja qual delas se ajusta melhor, por meio de uma simples inspeção visual. A figura abaixo mostra duas posições, que podem ajudar você a tomar uma decisão.



Imagens do autor

Gabarito e comentários da Aula 1

Observe que a curva em vermelho é uma catenária, de equação $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, enquanto que as outras curvas são parábolas da forma $ax^2 + 1$, com a variando entre 0 e 1. Com a=1, fica bem claro que as curvas são distintas. Variando o parâmetro a, o aluno pode perceber que não há como as curvas se sobreporem. As figuras abaixo ilustram a animação sugerida nessa simulação.



Imagens do autor

Aula 02 – "Medindo distâncias inacessíveis: uma introdução"

Nessa segunda aula, que pode ser aplicada tanto em turmas do 9º ano do ensino fundamental quanto com os alunos da 1ª série do ensino médio, apresentaremos atividades envolvendo a trigonometria no triângulo retângulo, para determinar distâncias inacessíveis, ou seja, obter distâncias de forma indireta.

Para trabalhar com os aplicativos será necessário um laboratório de informática. Além disso, o professor pode propor à sua turma a construção de um inclinômetro, cuja descrição passo a passo pode ser vista no aplicativo do Prof. Guilherme E. Hartung, disponível em: <http://files.materialguilherme.webnode.com.br/200000000-5e7de5ec94/inclinometro5.swf>, para trabalhar medições usando lugares e situações na própria escola.

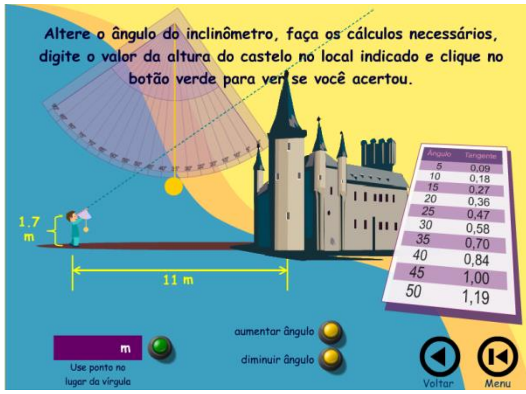
Folha de Atividades - 2ª Aula
Trigonometria – Distâncias inacessíveis

1) Vamos explorar algumas situações envolvendo a obtenção de medidas que não podem ser medidas diretamente. Especificamente, as medidas envolvendo distâncias inacessíveis. Começaremos com um Objeto Virtual de aprendizagem, disponível em <http://files.materialguilherme.webnode.com.br/200000000-5e7de5ec94/inclinometro5.swf>

Imagens do aplicativo

2) Há quatro opções nesse aplicativo, sendo que as três primeiras explicam o que é, como funciona e como construir um inclinômetro. Clique em cada um delas para conhecer melhor esse instrumento, e depois passe para as atividades.

3) Efetue os cálculos e determine a altura de cada um dos três objetos disponíveis. Para cada um, você precisa entrar com a medida encontrada e verificar se acertou, conforme ilustra a figura a seguir. O aplicativo vai informar se a resposta está correta.



4) Compare seus resultados com os de seus colegas, e termine essa primeira parte discutindo a principal razão trigométrica utizada para realizar os cálculos, e se seria possível efetuar os cálculos utilizando outras razões trigométricas.

5) Agora, vamos explorar outras situações envolvendo alturas inacessíveis, utilizando outro objeto virtual de aprendizagem, no portal do professor, disponível em <http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/841/open/file/alturas.swf?sequence=7>

Imagens do aplicativo distâncias inacessíveis

6) Acesse o *site* e resolva os dois problemas apresentados, utilizando os conhecimentos de geometria ou trigonometria que achar mais adequado. Não se esqueça de registrar em cada um deles sua resposta, e verificar se ela está correta.

7) Discuta com os seus colegas a estratégia que utilizaram para encontrar as medidas, comparando-as entre si. O importante é entender o que cada um fez, e como chegaram às respostas corretas.

Professor(a), esperamos que essa proposta tenha ampliado suas ideias. Tenha em mente que é totalmente possível mudar o que foi proposto, alterar a ordem, excluir ou incluir assuntos etc. O mais importante é adequar a proposta à realidade de sua turma. Os nossos *e-mails* são ivailmuniz@gmail.com e fernandovillar@ufrj.br. Por favor, entre em contato para informar o que achou desta dica pedagógica e se a utilizou em suas aulas. O seu retorno é muito importante para a Rede da TV ESCOLA.

Questões para discussão

A trigonometria e as navegações: o que a história da matemática nos ensina?

Peça aos alunos exemplos e histórias de construção de pontes pênseis ao redor do mundo.

Qual o impacto do GPS na vida das pessoas em diferentes lugares do planeta, tanto em regiões rurais quanto em grandes cidades?

Referências

HARTUNG, Guilherme Erwing. *Aferição de distâncias inacessíveis.* Aula do portal do Professor. Acesso em 05 de Março de 2013. Disponível em <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=22970>

TALAVERA, Leda Maria Bastoni. *Parábola e Catenária: história e aplicações*. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação da USP/SP, 2008. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-17062008-135338/pt-br.php>

Consultores: Ivail Muniz Junior e Fernando Celso Villar Marinho