



Vídeos da TV Escola

DICAS PEDAGÓGICAS

Matemática em Toda Parte II

Episódio: “Matemática nas Brincadeiras”

Resumo

O episódio “Matemática nas Brincadeiras” explora o mundo dos jogos para identificar o uso dos conceitos de combinatória e probabilidade. No primeiro bloco, a partir da experiência de um jogador da tradicional “purrinha”, ou jogo de palitos, o bloco apresenta o conceito de espaço amostral e evolui para o cálculo de possibilidades num jogo entre dois competidores. São exibidos exemplos de espaço amostral equiprovável e não equiprovável. O segundo bloco explora um conceito mais sofisticado de estatística: a esperança matemática. O contexto escolhido para apresentar uma aplicação desse conceito é o jogo de pôquer. Os jogadores profissionais de pôquer fazem uso das probabilidades e, principalmente do conceito de esperança matemática, também conhecido como valor esperado. Uma excelente oportunidade para abordar um tema interessante a partir do fascinante ambiente dos jogos. É sua vez de jogar!

Palavras-chave

Espaço amostral, probabilidades, esperança matemática, análise combinatória.

Nível de ensino

Ensinos Fundamental e Médio.

Componente curricular

Matemática.

Disciplina relacionada

Educação Física.

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**

Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

DICAS PEDAGÓGICAS

Aspectos relevantes do vídeo

- ❖ Apresentar exemplos de espaço amostral equiprovável e não equiprovável.
- ❖ Utilizar estratégias de contagem para o cálculo de probabilidades no jogo de pôquer.
- ❖ Apresentar o conceito de esperança matemática.
- ❖ Apresentar contexto histórico de desenvolvimento dos estudos de probabilidade a partir dos estudos de Leibniz.

Duração da atividade

Quatro horas-aula (90 min), duas para cada atividade.

O que o aluno poderá aprender com esta aula

Diferenciar espaços amostrais equiprováveis e não equiprováveis.

Aplicar cálculos combinatórios para determinar probabilidades em jogos.

Utilizar o conceito de esperança matemática em jogos como os da Loteria Federal.

Conhecimentos prévios que devem ser trabalhados pelo professor com o aluno

Porcentagem.

Problemas de combinatória que abordem diferentes estratégias de contagem, especialmente o princípio multiplicativo e as combinações simples.

Estratégias e recursos da aula/descrição das atividades

Caro(a) professor(a), apresentaremos algumas sugestões de atividades para dar suporte à exibição do episódio “Matemática nas Brincadeiras”. Nossa proposta de atividades foi organizada em duas aulas: “Esperança Matemática e o Jogo de Purrinha” e “Análise Combinatória no Jogo de Pôquer”. Muitos professores de Educação Física fazem uso de

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**

Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

DICAS PEDAGÓGICAS

jogos em suas aulas. Convide um professor de Educação Física da sua escola para avaliar a possibilidade de aplicação dessas atividades em conjunto.

O planejamento das aulas buscou articular o conteúdo apresentado no vídeo às atividades sugeridas. Para facilitar a adequação dessa proposta à realidade de cada professor, apresenta-se a duração das atividades.

As atividades de cada uma das aulas foram postas em páginas individuais aqui denominadas Folha de Atividades. Imediatamente após cada Folha de Atividades são apresentados comentários e sugestões para auxiliarem na aplicação em sala de aula.

Professor(a), este material foi elaborado com cuidado de modo que sua aplicação seja factível, mas lembre-se de que essas sugestões podem e devem ser adaptadas à sua realidade. Sugerimos a busca por articulações acadêmicas envolvendo professores de História e Sociologia, para abordar o uso de jogos e brincadeiras nas diferentes sociedades. Isso poderá ampliar a abordagem do tema e torná-la mais interessante.

Aula 1: Esperança Matemática e o Jogo de Purrinha

A atividade proposta permitirá que a turma vivencie a prática do jogo de habilidade conhecido popularmente como “Purrinha”. Para uma abordagem alternativa deste tema, recomendamos a aula *Noções Probabilísticas a partir de um Jogo da Cultura Popular* (SOUSA, 2011), disponível no [Portal do Professor](#).

1º Momento: Preparação da apresentação do vídeo (10 minutos)

O objetivo desta aula é relacionar os conceitos de espaço amostral equiprovável, não equiprovável e esperança matemática. Indague dos alunos se eles conhecem alguns desses conceitos. Se for possível, registre as ideias principais apresentadas pelos estudantes.

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**

Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

DICAS PEDAGÓGICAS

2º Momento: Exibição completa do vídeo (20 minutos)

Além dos quase quinze minutos de duração do vídeo, foram adicionados cinco minutos para considerações finais antes da aplicação da Folha de Atividades.

3º Momento (60 minutos)

Aplicação da Folha de Atividades com questões cujas respostas serão registradas pelos alunos na própria folha. Essa é uma atividade lúdico-investigativa. Os estudantes podem brincar, se divertir e aprender um pouco de Matemática.

Para jogar, os alunos podem utilizar moedas, mas se preferir leve palitos em quantidade suficiente para a turma (três para cada aluno).

Organize a turma em grupos com quantidades variadas de pessoas: de duas a seis. Cada grupo terá uma estratégia diferente para a vitória. Distribua uma folha de papel quadriculado e a Folha de Atividades para cada grupo.

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**
Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

DICAS PEDAGÓGICAS

Folha de Atividades – Aula 1

Esperança Matemática e o Jogo de Purrinha

As regras do jogo:

- Cada jogador, de posse dos três palitos, “esconde” em uma das mãos — sem que o outro jogador veja — uma das quantidades: 0 (nenhum palito), 1, 2 ou 3.
 - Em seguida, cada jogador aposta qual a soma de palitos que serão mostrados por eles.
 - Depois das apostas feitas, cada um abre a mão e mostra o número de palitos.
 - Vence o jogo aquele que acertar a soma obtida.
- 1) Anote os dados relativos ao grupo:
 - a) Quantos são os integrantes do grupo?
 - b) Quais são os resultados possíveis para a soma dos valores do grupo?
 - c) Quais são os valores com menor probabilidade de ocorrência?
 - d) Qual ou quais os valores com maior probabilidade de ocorrência?
 - 2) Elabore um gráfico de barras em que cada coluna corresponda a uma soma possível e a altura da barra corresponda à frequência relativa.
 - 3) Considere a seguinte variação desse jogo: em vez de ter um palpite para cada jogador, os palpites só são dados pela pessoa que pagar uma aposta no valor M em reais. Caso acerte, essa pessoa receberia 36 reais. Qual o valor de M para que a esperança matemática seja igual a zero?
 - 4) Compare seus resultados com o dos outros grupos e registre as diferenças e semelhanças.
 - 5) Determine o valor da Mega-Sena para qual a esperança matemática relativa a uma aposta mínima seja igual a zero.

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**
Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

DICAS PEDAGÓGICAS

Comentários e soluções

Objetivos da atividade:

- ✓ Identificar espaços amostrais não equiprováveis.
- ✓ Criar gráficos de frequências relativas ao espaço amostral.
- ✓ Aplicar o conceito de esperança matemática em diferentes contextos.

Soluções

- 1) As respostas dependem do número (n) de integrantes de cada grupo.
 - a) n pode ser: 2, 3, 4, 5 ou 6.
 - b) De 0 a 3n.
 - c) 0 e 3n.
 - d) Pela simetria do problema, os valores que apresentam a maior frequência são os valores médios, conforme indicados no quadro a seguir.

| N | Soma(s) mais frequente(s) |
|---|---------------------------|
| 2 | 3 |
| 3 | 4 e 5 |
| 4 | 6 |
| 5 | 7 e 8 |
| 6 | 9 |

- 2) Gráficos diferentes para cada valor de n.
- 3) O cálculo varia em função de n, mas a solução geral é dada pela equação $36 \times (\text{probabilidade de ganhar}) - M \times (\text{probabilidade de errar}) = 0$. Note que a probabilidade de ganhar depende de n e do palpite. Considere para cada n, os valores de maior frequência. Vide quadro acima. Por exemplo, para n=2, considera-se o palpite 3. Neste caso, tem-se:

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**

Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

DICAS PEDAGÓGICAS

$$36 \times \left(\frac{4}{4 \times 4} \right) - M \times \left(\frac{12}{4 \times 4} \right) = 0$$

$$M = 36 \times \left(\frac{4}{4 \times 4} \right) \times \left(\frac{4 \times 4}{12} \right)$$

$$M = 12$$

4) Respostas pessoais.

5) Há 50 063 860 resultados possíveis. O valor do prêmio da Mega-Sena que resulta em uma esperança matemática nula é dada pela expressão:

$$P \times \left(\frac{1}{50063860} \right) - 2 \times \left(\frac{50063859}{50063860} \right) = 0$$
$$P = 2 \times \left(\frac{50063859}{50063860} \right) \times \left(\frac{50063860}{1} \right) = 100127718$$

Obs.: Se o valor da aposta mínima for R\$ 2,00, a esperança matemática da Mega-Sena só é positiva se o valor do prêmio for superior a R\$ 100.127.718,00.

Aula 2: Análise Combinatória no Jogo de Pôquer

Nesta aula serão apresentadas situações relativas ao jogo de pôquer e que podem ser calculadas com análise combinatória, princípio fundamental da contagem e combinações simples.

1º Momento: Exibição do segundo bloco do episódio “A Matemática nas Brincadeiras” (20 minutos)

O segundo bloco tem aproximadamente oito minutos, e são destinados doze minutos adicionais para considerações finais e comentários dos alunos em relação ao que foi exibido. Em seguida, distribua a Folha de Atividades.

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**

Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

DICAS PEDAGÓGICAS

2º Momento: Aplicação da atividade (70 min)

Após a exibição do segundo bloco do vídeo, distribua a Folha de Atividades que apresenta uma lista de exercícios para complementar o que é apresentado no programa. Procure acompanhar o desenvolvimento de cada grupo, tentando intervir, quando necessário, mas sem retirar o prazer da descoberta.



A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**
Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

DICAS PEDAGÓGICAS

Folha de Atividades

Análise Combinatória no Jogo de Pôquer

Considere um baralho comum com 52 cartas em quatro naipes: copas, ouros, paus, espadas. E cada naipe com treze cartas cada: 2, 3, ..., 10, valete, dama, rei e ás. Um grupo é o conjunto de 4 cartas de naipes diferentes mais mesmo valor, por exemplo o grupo de ases. Uma mão de pôquer no estilo Texas Hold'em é formada por cinco das cartas desse baralho.

1. Quantas são as mãos possíveis nesse estilo de pôquer?
2. Quantas são as mãos nesse estilo de pôquer nas quais se forma:
 - a) um par (duas cartas em um mesmo grupo e as outras três em outros grupos diferentes)?
 - b) dois pares (duas cartas em um grupo, duas em outro grupo e uma em um terceiro grupo)?
 - c) uma trinca (três cartas em um grupo e as outras duas em dois outros grupos diferentes)?
 - d) um “four” (quatro cartas em um grupo e uma em outro grupo)?
 - e) um “full hand” (três cartas em um grupo e duas em outro grupo)?
 - f) uma sequência (5 cartas de grupos consecutivos, não sendo todas do mesmo naipe)?
 - g) um “flush” (5 cartas do mesmo naipe, não sendo elas de 5 grupos consecutivos)?
 - h) um “straight flush” (5 cartas de grupos consecutivos, todas do mesmo naipe)?
 - i) um “Royal straight flush” (10, valete, dama, rei e ás de um mesmo naipe)?

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**
Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

DICAS PEDAGÓGICAS

Comentários e soluções

As questões apresentadas na Folha de Atividades foram adaptadas de um exercício similar presente no livro “Análise Combinatória e Probabilidade” (MORGADO, 2006). A diferença é que aqui são usadas todas as cartas do baralho. Esse livro é fortemente recomendável para quem deseja aprofundar conhecimentos de Matemática Finita.

Objetivos da atividade:

- ✓ Aplicar o princípio fundamental da contagem.
- ✓ Calcular as combinações correspondentes às diferentes mãos do pôquer e que servem de base para cálculo das probabilidades indicadas no segundo bloco do vídeo.

Soluções

Considera-se um baralho comum com 52 cartas.

1. Quantas são as mãos possíveis nesse estilo de pôquer?

R: Como há 52 cartas, a resposta é $C_{52}^5 = 2\,598\,960$.

2. Quantas são as mãos nesse estilo de pôquer nas quais se forma:

- a) um par (duas cartas em um mesmo grupo e as outras três em outros grupos diferentes)?

R: Há 13 modos de escolher o grupo: de 2 a Ás. Para escolher os naipes, há $C_4^2 = 6$.

Para escolher os grupos das outras três cartas são $C_{12}^3 = 220$. Para escolher os naipes dessas outras cartas há $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$. Assim, pelo princípio fundamental da contagem, a resposta é $13 \times C_4^2 \times C_{12}^3 \times 4^3 = 13 \times 6 \times 220 \times 4^3 = 1\,098\,240$.

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**

Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

DICAS PEDAGÓGICAS

b) dois pares (duas cartas em um grupo, duas em outro grupo e uma em um terceiro grupo)?

R: Há $C_{13}^2 = 78$ modos de escolher os grupos das cartas que formarão os dois pares, $(C_4^2)^2 = 36$ modos de escolher seus naipes, 11 modos de escolher o grupo da outra carta e 4 modos de escolher o naipe dessa carta. Assim, pelo princípio fundamental da contagem, a resposta é $C_{13}^2 \times (C_4^2)^2 \times 11 \times 4 = 78 \times 36 \times 11 \times 4 = 123\,552$.

c) uma trinca (três cartas em um grupo e as outras duas em dois outros grupos diferentes)?

R: Há 13 modos de escolher o grupo da trinca, $C_4^3 = 4$ modos de escolher os naipes das cartas da trinca, $C_{12}^2 = 66$ modos de escolher os grupos das outras duas cartas e $4 \times 4 = 4^2 = 16$ modos de escolher os naipes dessas duas cartas. A resposta é $13 \times C_4^3 \times C_{12}^2 \times 4^2 = 13 \times 4 \times 66 \times 16 = 54\,912$.

d) um “four” (quatro cartas em um grupo e uma em outro grupo)?

R: Há 13 modos de escolher o grupo do “four”, 1 modo de escolher os naipes das quatro cartas do “four”, 12 modos de escolher o grupo da outra carta e 4 modos de escolher o naipe dessa carta. A resposta é $13 \times 1 \times 12 \times 4 = 624$.

e) um “full hand” (três cartas em um grupo e duas em outro grupo)?

R: Há 13 modos de escolher o grupo da trinca, $C_4^3 = 4$ modos de escolher os naipes das cartas da trinca, 12 modos de escolher o grupo do par e $C_4^2 = 6$ modos de escolher os naipes das cartas do par. A resposta é $13 \times C_4^3 \times 12 \times C_4^2 = 3744$.

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**

Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

DICAS PEDAGÓGICAS

- f) uma sequência (5 cartas de grupos consecutivos, não sendo todas do mesmo naipe)?
R: Há 10 tipos de sequências (com início em Ás, 2, 3, ..., 10). Escolhido o tipo da sequência, há $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 1024$ modos de escolher os naipes das cartas da sequência, mas 4 desses modos não são permitidos: as sequências formadas por cartas do mesmo naipe. A resposta é $10 \times (1024 - 4) = 10\ 200$.
- g) um “flush” (5 cartas do mesmo naipe, não sendo elas de 5 grupos consecutivos)?
R: Os grupos das cartas podem ser escolhidos de $(C_{13}^5 - 10)$ modos. Há 4 modos de se escolher o naipe. A resposta é $(C_{13}^5 - 10) \times 4 = (1287 - 10) \times 4 = 5\ 148$.
- h) um “straight flush” (5 cartas de grupos consecutivos, todas do mesmo naipe)?
R: Há 10 tipos de sequências (com início em Ás, 2, 3, ..., 10). Escolhido o tipo da sequência, há 4 modos de escolher o naipe da sequência. A resposta é $4 \times 10 = 40$.
- i) um “Royal straight flush” (10, valete, dama, rei e ás de um mesmo naipe)?
Há 4 modos de escolher o naipe do “Royal straight flush”. A resposta é 4.

Questões para discussão

Pesquisar exemplos diferentes de espaços amostrais equiprováveis e não equiprováveis.

Pesquisar exemplos de jogos de habilidade.

Qual evento tem maior probabilidade de acontecer: Cair um raio na sua cabeça ou ganhar na loteria?

O pôquer é um jogo de habilidade (estratégia) ou um jogo de azar?

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**

Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

DICAS PEDAGÓGICAS

Professor(a), esperamos que esta proposta tenha ampliado suas ideias. Tenha em mente que é totalmente possível mudar o que foi proposto, alterar a ordem, excluir ou incluir perguntas, abordagens, assuntos etc. O mais importante é adequar a proposta à realidade de sua turma. Os nossos e-mails são ivailmuniz@gmail.com e fernandovillar@ufrj.br. Por favor, entre em contato para informar o que achou desta dica pedagógica e se a utilizou em suas aulas. O seu retorno é muito importante para a Rede da TV ESCOLA.

Referências

LIMA, E.L et al. *A Matemática do Ensino Médio*. Volume 2. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2000.

MORGADO, A. C. DE O. et al. *Análise combinatória e probabilidade: com as soluções dos exercícios*. Impa / Vitae, 2006.

SOUSA, R. C. et al.. *Noções Probabilísticas a partir de um Jogo da Cultura Popular*. Portal do Professor, 2011. Disponível em:
<<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=28034>>.

SANTOS, V. C. P. et al. *Noções Movimentos de Xadrez*. Portal do Professor, 2011. Disponível em:
<<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=27482>>.

Consultores: Ivail Muniz Junior e Fernando Celso Villar Marinho

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**
Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.