



Vídeos da TV Escola

## DICAS PEDAGÓGICAS

### Matemática em Toda Parte II

#### Episódio: “Matemática no Espaço Sideral”

##### Resumo

O que é o universo? Ele é infinito ou finito? O que são as estrelas? Como os corpos celestes e os satélites artificiais se movimentam? Como o domínio do céu interfere no domínio da terra? Como funcionam a TV a cabo, o telefone via satélite, o GPS e os bloqueadores de veículos? Essas são perguntas feitas pelo homem ao longo da história, algumas das quais ainda sem respostas. Nesse episódio veremos como alguns conceitos matemáticos ajudaram e têm ajudado o homem a responder essas e muitas outras questões sobre o espaço sideral, principalmente sobre o infinito. Temas como cônicas, trigonometria, números irracionais, sistemas lineares, geometria espacial e muita filosofia saem do infinito e pousam diante dos nossos olhos, mostrando que a Matemática construída na terra muitas vezes está ligada aos mistérios dos céus. O infinito ganha um destaque especial nesse vídeo. Busca-se construir o conceito do infinito intercalando-se exemplos de macro e microestruturas, do oceano ao grão de areia, do universo ao interior de uma célula. O infinito que serve de adjetivo para o conjunto dos números naturais serve também para qualificar a representação decimal de cada número irracional. A existência ou não do infinito em contextos reais não é algo que se responde, mas que se pergunta. Estará o infinito no espaço sideral ou no mundo microscópico? As reflexões diante de temas tão complexos são excelentes oportunidades para se aprender que a curiosidade dos amantes da Matemática é “infinita” e, por isso, não cansam de buscar essa ciência em toda a parte.

##### Palavras-chave

Infinito, espaço sideral, cônicas, número irracional e geometria espacial.

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**  
Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

## DICAS PEDAGÓGICAS

### Nível de ensino

Ensinos Fundamental e Médio.

### Componente curricular

Matemática.

### Disciplinas relacionadas

Filosofia, Geografia, Física e Artes.

### Aspectos relevantes do vídeo

- ❖ Abordar uma questão fundamental do homem: o que é o infinito?
- ❖ A partir da temática anterior, mostrar como a Matemática tem se relacionado com os diferentes conceitos de infinitos propostos pelo homem.
- ❖ Trazer elementos naturais e artificiais presentes no espaço sideral para promover uma discussão em torno de temas da Matemática como as cônicas, a trigonometria e os sistemas lineares.
- ❖ Mostrar como ideias simples podem nos ajudar a estimar grandezas ou quantidades aparentemente infinitas.
- ❖ Trazer a discussão do infinito para os conjuntos numéricos. Abordar o conjunto dos números naturais – com a definição precisa de ser o conjunto em que todo número tem um sucessor, apresentada pelo matemático Peano, mas esquecida nos livros didáticos e nas aulas de Matemática. Aborda também os números irracionais de maneira leve, porém não superficial, e associada à ideia da medida de um segmento.

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**

Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

## DICAS PEDAGÓGICAS

### Duração da atividade

Duas horas-aula (90 minutos) para cada atividade.

### O que o aluno poderá aprender com esta aula

Explorar a essência dos números irracionais a partir do conceito de números racionais por meio da ideia de medir.

Explorar a construção da circunferência e da elipse, e suas propriedades, utilizando o *software* de Geometria dinâmica GeoGebra.

### Conhecimentos prévios que devem ser trabalhados pelo professor com o aluno

➤ Para o Ensino Fundamental

Números racionais

Teorema de Pitágoras

Plano cartesiano

➤ Para o Ensino Médio

Geometria plana básica

Geometria analítica: distância entre pontos no plano

### Estratégias e recursos da aula/descrição das atividades

Caro(a) professor(a), apresentaremos algumas sugestões de atividades para dar suporte à exibição do episódio “Matemática no Espaço Sideral”. Nossa proposta de atividades foi organizada em duas aulas: “O irracional infinito na palma da mão” e “As cônicas da terra e do céu”.

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**

Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

## DICAS PEDAGÓGICAS

O planejamento das aulas buscou articular o conteúdo apresentado no vídeo às atividades propostas. Para facilitar a adequação dessa proposta à realidade de cada professor, apresenta-se a duração de cada atividade.

As atividades de cada uma das aulas foram postas em páginas individuais aqui denominadas Folha de Atividades. Imediatamente após cada Folha de Atividades são apresentados comentários e sugestões para auxiliarem a aplicação em sala de aula.

Professor(a), este material foi elaborado com cuidado, de modo que sua aplicação seja factível, mas lembre-se de que essas sugestões podem e devem ser adaptadas à sua realidade. Sugerimos a busca por articulações acadêmicas envolvendo professores de outras disciplinas, com o objetivo de tornar a abordagem desse tema mais ampla e interessante.

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**  
Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

**DICAS PEDAGÓGICAS**

### **Aula 1: O irracional infinito na palma da mão**

Nessa aula abordaremos os números irracionais. As atividades que serão propostas podem ser aplicadas tanto com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental como com os da 1ª série do Ensino Médio, porque, geralmente, são nesses dois anos que se discutem de fato a construção dos irracionais.

Usaremos o Excel e o GeoGebra nessa investigação. Esses recursos tecnológicos podem facilitar a compreensão dos conceitos, mas algumas das atividades podem ser realizadas mesmo sem esses recursos. O mais importante é a ideia de como surgem os números irracionais, a partir dos racionais, e de como podemos entendê-los melhor, quando os associamos às medidas. Essa ideia não é nova, mas tentamos traduzir essa concepção de maneira acessível a alunos das séries apontadas.

Antes de passarmos para a atividade de fato, gostaríamos de salientar três pontos importantes que se referem aos números irracionais.

#### **Ponto 1 – O que são números racionais, mesmo?**

O vídeo apresenta indiretamente essa definição. Um número é racional quando é obtido da divisão de dois inteiros. Assim, um número  $p/q$  é racional quando existem inteiros  $p$  e  $q$ , com  $q$  diferente de zero. Obviamente, não vamos dividir por zero. Observe que na divisão de dois inteiros podem surgir números que, representados na forma decimal, podem resultar em números inteiros, números com representação decimal finita, decimal infinita e periódica e decimal infinita periódica, mas com uma parte inicial não periódica.

O número  $p/q$  quando associado a medidas, representa algo a mais. Considerando uma unidade de medida de comprimento, por exemplo, dizer que um segmento mede  $p/q$  significa dizer que dividindo a unidade em  $q$  partes iguais, cada parte medindo  $1/q$ , é possível “encaixar” exatamente  $p$  partes dessas no segmento a ser medido. Assim, dizer que

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**

Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

## DICAS PEDAGÓGICAS

um segmento mede  $\frac{5}{4}$  é o mesmo que dizer que dividindo a unidade em 4 partes iguais, cada parte medindo  $\frac{1}{4}$ , podemos encaixar essa parte 5 vezes no segmento. Acreditamos que associar os números às medidas facilita a compreensão e a construção de significados a respeito dos números.

### Ponto 2 – Por que os números racionais não dão “conta do recado”?

Os números irracionais não são suficientes para descrever a medida de qualquer segmento. De fato, vamos supor que  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , ou seja, que podemos obter a raiz quadrada de 2 como a divisão de dois inteiros, primos entre si. Daí vem que  $p^2 = 2 \cdot q^2$ . Logo  $p^2$  é par, e, portanto  $p$  também é par. Assim,  $p = 2 \cdot k$ , e da última igualdade podemos escrever que:

$$(2k)^2 = 2 \cdot q^2$$
$$2k^2 = q^2$$

Logo  $q^2$  também é par, e, portanto,  $q$  também é par. Mas isso é um absurdo, pois partimos da ideia de que  $p$  e  $q$  eram primos entre si. Logo, não podem existir números inteiros  $p$  e  $q$ , primos entre si, cuja divisão resulte no número  $\sqrt{2}$ .

Logo, para desespero de Pitágoras ...  $\sqrt{2}$  não pode ser um número racional.

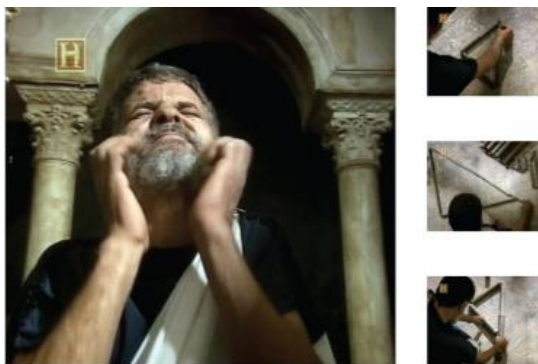


Imagem disponível em:

<<http://www.professores.uff.br/hjbortol/disciplinas/2010.1/gma00116/aulas/gma00116-aula-04-4-up-color.pdf>>

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**

Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



### Ponto 3 – Como introduzir os irracionais nessa história?

Sugerimos começar com a tentativa de expressar a medida de segmentos por meio de números racionais. Para entendermos melhor o irracional  $\sqrt{2}$ , por exemplo, podemos experimentalmente obter aproximações racionais para  $\sqrt{2}$ . Em sala, isso pode ser feito com o uso de calculadoras ou ainda com o uso de planilhas eletrônicas, o que pode aumentar consideravelmente a velocidade e a quantidade de cálculos realizados.

Ao mesmo tempo, é interessante mostrar como os irracionais aparecem, por exemplo, quando precisamos medir alguns segmentos.

Construir um segmento de tamanho  $\sqrt{2}$ , por exemplo, é muito simples utilizando o teorema de Pitágoras.

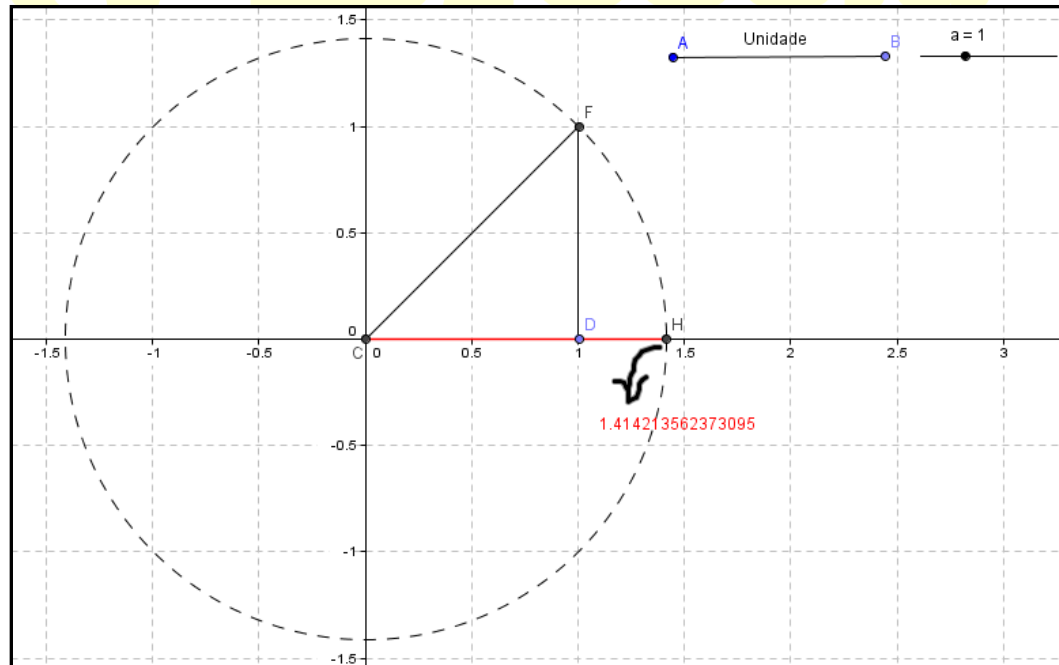


Imagem do autor



Vídeos da TV Escola

## DICAS PEDAGÓGICAS

Usaremos as duas ideias apresentadas em um conjunto de atividades para introduzir o conceito de número irracional. Hora de colocar a “mão na massa”.

### **1º Momento: Preparação da apresentação do vídeo (10 minutos)**

Inicialmente, divida a turma em grupos de dois a três alunos. Caso seja possível levá-los para o Laboratório de Informática, organize-os em duplas, caso haja disponibilidade de máquinas para isso.

Em seguida, inicie uma conversa rápida dizendo que nesta aula farão algumas atividades envolvendo os números racionais e irracionais.

### **2º Momento: Exibição completa do vídeo (20 minutos)**

O vídeo tem aproximadamente 15 minutos, e, adicionalmente, sugerimos 5 minutos para considerações finais antes da aplicação da Folha de Atividades. O vídeo trata do Espaço Sideral, do infinito e de outros temas. Ele aborda do instante 12'26" ao instante 13'32" o que iremos tratar nessa primeira aula. Apesar disso, sugerimos que o vídeo completo seja exibido para aproveitarmos a ideia de infinito relacionada a diversas situações, dentre elas os números, e também pela riqueza de informações existentes nesses 15 minutos.

### **3º Momento (60 minutos)**

Aplicação da Folha de Atividades, que terá questões cujas respostas serão registradas na folha, e outras desenvolvidas nos próprios programas. Nesse último caso, o registro pode ser a imagem da tela capturada, ou pelo registro do passo a passo. Recomendamos o registro da imagem da tela (usando a tecla PrtScn, por exemplo) ou outro programa.

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**

Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.





Vídeos da TV Escola

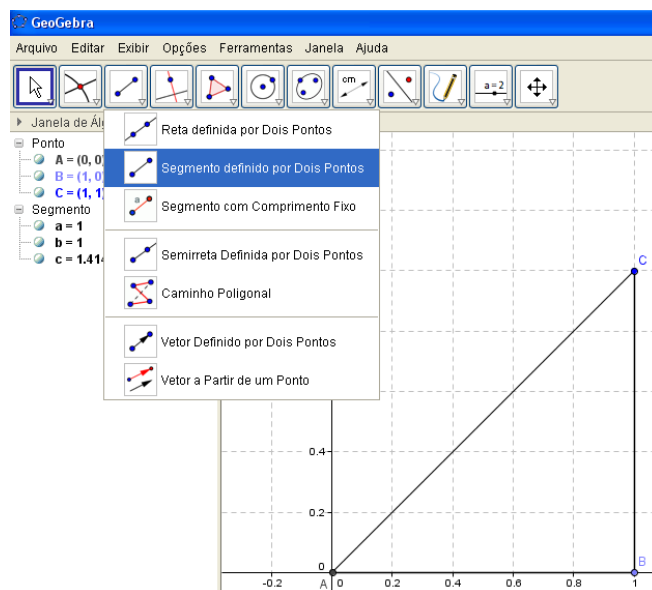
DICAS PEDAGÓGICAS

## Folha de Atividades – Aula 1

### O irracional infinito na palma da mão

Antes de começar, selecione em opções/arredondamento, no menu principal, um arredondamento para duas casas decimais.

- 1) O primeiro passo é tentar construir no GeoGebra um segmento de comprimento  $\sqrt{2}$ .
  - a) Construa um segmento unitário AB, sobre o eixo x, com A na origem e B no ponto (1,0).
  - b) Construa um segmento BC, que seja perpendicular a AB. Observe que o ângulo ABC é reto.
  - c) Em seguida, construa um segmento AC.



A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965

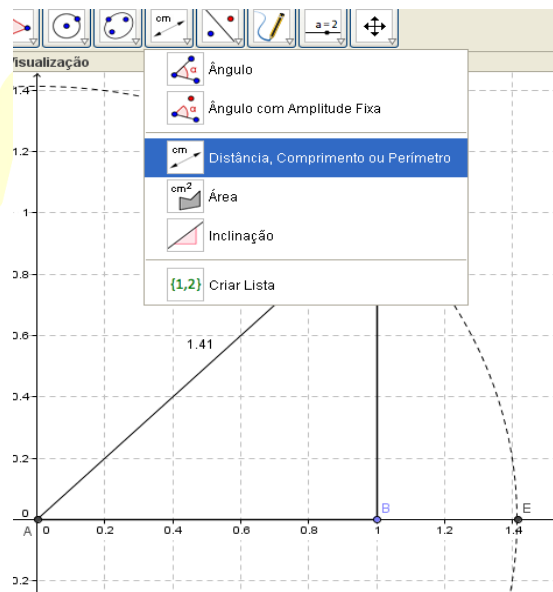
Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

## DICAS PEDAGÓGICAS

- d) Utilize o teorema de Pitágoras para determinar a medida do segmento AC.
- e) Utilize a trigonometria para determinar a medida do segmento AC.
- f) Traçando uma circunferência com centro e A, e raio AC, em que ponto a circunferência cortará o eixo x?
- g) Use a ferramenta medir distância para exibir uma medida para o comprimento do segmento AC. (Vide figura a seguir)



- h) Compare o valor medido pelo GeoGebra, igual a 1,41, com o valor encontrado por vocês. Eles são iguais?
- i) É uma boa aproximação?
- j) Grave seu arquivo, e deixe-o aberto. Nós vamos voltar nele.

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**

Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

## DICAS PEDAGÓGICAS

2) Vamos tentar encontrar o número decimal que elevado ao quadrado seja igual a 2. Para isso, abra a planilha eletrônica disponível em seu computador. Caso não tenha, use uma calculadora e uma folha de papel.

- a) Preencha a tabela a seguir. Lembre que o Excel executa diversos cálculos. O símbolo  $^$  eleva a uma base um expoente. Assim, basta fazer: = base  $^$  expoente. Exemplo.  $1,41^2$  no Excel é = 1,41 $^2$ . Ou ainda, se A2=1,41, digite na célula B2: = A2 $^2$ , seguido de “enter”.

	A	B
1	número	quadrado do número
2	1,41	
3	1,42	

- b) Agora preencha a tabela buscando uma melhor aproximação, a partir dos resultados do item a.

número	quadrado do número
1,411	
1,412	
1,413	
1,414	
1,415	
1,416	
1,417	
1,418	
1,419	
1,42	

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**

Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

## DICAS PEDAGÓGICAS

c) Explique por que foram escolhidos esses valores e analise os resultados obtidos. Conseguiram encontrar o número que elevado ao quadrado seja exatamente igual a 2? Desistir ou continuar? Vamos em frente!

d) Vamos melhorar ainda mais essa aproximação, preenchendo a tabela abaixo.

número	quadrado do número
1,4141	
1,4142	
1,4143	
1,4144	
1,4145	
1,4146	
1,4147	
1,4148	
1,4149	
1,415	

e) Já temos uma boa aproximação? Qual o erro %, em relação ao valor 2 que queremos encontrar?

3) Agora volte ao GeoGebra. Selecione opções/arredondamento, no menu principal, um arredondamento para 15 casas decimais.

a) Qual o valor encontrado? Será que esse número elevado ao quadrado resulta em 2? É esse o que estávamos procurando?

b) Calcule o quadrado desse número usando o Excel.

c) A resposta é igual a 2? Deu uma dízima periódica? Se  $0,999999... = 1$ , então o que podemos concluir desse resultado? Acharam?

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**

Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

## DICAS PEDAGÓGICAS

- d) Multiplicando o último algarismo do número fornecido pelo GeoGebra (que é igual a 5) por ele mesmo, teremos 9 na última casa decimal do produto?
- e) Então, o que está acontecendo?



A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**  
Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

## DICAS PEDAGÓGICAS

### Comentários e soluções

Caro(a) professor(a). Está disponível no *site* abaixo um aplicativo simples, com a construção do  $\sqrt{2}$ . Use-o como queira.

<<http://www.projetofundao.ufrj.br/matematica/tecnologias/tvescola/irracionais.ggb>>

1) a, b e c – Etapas da construção. Acompanhar os alunos em cada uma delas.

d) Por Pitágoras  $AC = \sqrt{2}$

e) Pela trigonometria, temos que  $AC \cdot \sin 45^\circ = 1$ . Logo  $AC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$   $\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$ , e  $AC = \sqrt{2}$ .

f) Cortará no Ponto P  $(\sqrt{2}, 0)$   $(\sqrt{2}, 0)$ .

g) A medida exibida pelo GeoGebra deverá ser de 1,41.

h) Analisar com os alunos as respostas que forem dadas, mostrando que  $1,41^2 \neq 2$ .

i) É uma aproximação com erro de  $-0,60\%$ , ou seja, com  $99,4\%$  do valor desejado. Isso pode ser bom ou ruim, dependendo da aplicação que se esteja fazendo com esse número. Ex.: uma casinha de cachorro e uma peça de um equipamento para armazenar vírus altamente letais.

2)

Veja a tabela a seguir

número	quadrado do número
1,41	1,9881
1,42	2,0164

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**

Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.





Vídeos da TV Escola

## DICAS PEDAGÓGICAS

a) Veja a tabela a seguir

número	quadrado do número
1,411	1,990921
1,412	1,993744
1,413	1,996569
1,414	1,999396
1,415	2,002225
1,416	2,005056
1,417	2,007889
1,418	2,010724
1,419	2,013561
1,42	2,0164

b) O número procurado, pelos dados no item a, estão entre 1,41 e 1,42.

c) Veja a tabela a seguir.

número	quadrado do número
1,4141	1,99967881
1,4142	1,99996164
1,4143	2,00024449
1,4144	2,00052736
1,4145	2,00081025
1,4146	2,00109316
1,4147	2,00137609
1,4148	2,00165904
1,4149	2,00194201
1,415	2,002225

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**

Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

## DICAS PEDAGÓGICAS

- d) Temos uma aproximação por falta com erro de 0,0019%. Uma aproximação bem melhor do que a outra. Para a maioria das aplicações com esse número seria uma boa aproximação, mas não podemos afirmar que é uma boa aproximação sem saber onde esse número será aplicado. No contexto escolar, a aproximação é ótima.
- 3) De volta ao GeoGebra
- a) 1,414213562373095.
  - b) 1,999999999999999.
  - c) Se olharmos para o número propriamente dito, aparentemente chegamos ao 2.
  - d) Mas, se multiplicarmos com um instrumento de cálculo mais preciso, veremos que o resultado do Excel é uma aproximação e não um resultado exato. Mas, podemos perceber que o último algarismo desse produto deveria ser o número 5, o que já nos deixa a pista de que o resultado do Excel era realmente uma aproximação.

O que aconteceu? O Excel também não dá conta do recado. E o que fazer? Use a demonstração apresentada! Uma excelente oportunidade para mostrar para que servem as demonstrações .

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**

Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

**DICAS PEDAGÓGICAS**

## **Aula 2: Cônicas na terra e no céu**

Vimos no vídeo que os movimentos dos planetas em torno do Sol descrevem uma trajetória elíptica. Mas durante muito tempo, a teoria corrente era a de que essa trajetória era circular. A partir desse contexto celeste, vamos investigar as propriedades dessas duas curvas. O objetivo dessa aula é, portanto, explorar as cônicas: circunferência e elipse como lugares geométricos, utilizando no processo de construção, e de investigação de algumas propriedades, o *software* GeoGebra.

Antes das atividades, vale a pena lembrarmos ou aprendermos um pouco dessa história dos movimentos dos planetas.

As primeiras tentativas para explicar o movimento dos corpos celestes são devidas aos gregos, no século IV a.C. Tentando reproduzir os movimentos desses corpos, os gregos estabeleceram um modelo no qual a Terra era situada no centro do universo (Teoria Geocêntrica) e os planetas, bem como o Sol, a Lua e as estrelas estariam incrustados em esferas que giravam em torno da Terra. Com esse modelo, conseguiu-se descrever, com aproximação razoável, os movimentos dos corpos no céu, mas o universo grego ficou muito complicado e, durante muitos anos, várias tentativas foram feitas para se conseguir um modelo mais simples.

Das tentativas de simplificação do modelo grego, aquela que obteve maior êxito foi a teoria geocêntrica do grande astrônomo Ptolomeu, que viveu na Alexandria no século II d.C. Ptolomeu, supunha que os planetas moviam-se em círculos cujos centros giravam em torno da Terra. Com isso, além de apresentar um modelo mais simples do que o dos gregos, ele conseguiu um melhor ajustamento aos movimentos observados no céu.

Em virtude da razoável precisão das previsões feitas com o sistema de Ptolomeu e, além disso, como a sua teoria, supondo a Terra no centro do universo se adaptasse muito bem à filosofia religiosa da Idade Média, as ideias de Ptolomeu perduraram durante

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**  
Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

## DICAS PEDAGÓGICAS

praticamente treze séculos. Entretanto, as sucessivas modificações introduzidas nesse modelo, para torná-lo adaptado às observações que foram se acumulando durante este longo período, acabaram por tornar o sistema de Ptolomeu também muito complicado.

O astrônomo polonês, Nicolau Copérnico (1473-1543), no século XVI, apresentou um modelo mais simples para substituir o sistema de Ptolomeu, em que o Sol estaria em repouso e os planetas, inclusive a Terra, giravam em torno dele e em órbitas circulares (Teoria Heliocêntrica). Esse sistema era mais preciso que o de Copérnico e muito mais simples. Mas, o livro em que apresentava sua teoria causou grandes polêmicas e terminou sendo colocado na lista dos livros proibidos pela Igreja, pois tirava da Terra a centralidade do universo, o que não era admitido pelas convicções religiosas predominantes da época.

Alguns anos após a morte de Nicolau Copérnico, o astrônomo dinamarquês, Tycho Brahe, começou a desenvolver um importante trabalho no sentido de obter medidas mais precisas das posições dos corpos celestes. Em seu observatório, muito bem equipado para a época, Tycho Brahe realizou, durante cerca de vinte anos, rigorosas observações dos movimentos planetários, verificando que o sistema de Copérnico não se adaptava satisfatoriamente a essas observações.

Os dados colhidos por Tycho Brahe, cuidadosamente tabelados, constituíram a base do trabalho que foi desenvolvido após sua morte, pelo astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630). Entusiasmado pela simplicidade do sistema de Copérnico, Kepler desenvolveu o seu trabalho analisando com grande habilidade matemática, durante mais ou menos dezessete anos, a grande quantidade de dados coletados por Tycho Brahe, ajustando o modelo de Copérnico. O trabalho de Kepler foi coroado com êxito, tendo conseguido descobrir as três leis sobre o movimento dos planetas que deram origem ao nascimento da mecânica celeste e que hoje são ensinadas em Física, no Ensino Médio. As três leis são:

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**  
Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

## DICAS PEDAGÓGICAS

### **Primeira Lei: Lei das órbitas elípticas**

“O planeta em órbita em torno do Sol descreve uma elipse em que o Sol ocupa um dos focos.”

### **Segunda Lei: Lei das Áreas**

“A linha que liga o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.”

Essa lei determina que os planetas se movem com velocidades diferentes, dependendo da distância a que estão do Sol.

*Periélio* é o ponto mais próximo do Sol, onde o planeta orbita mais rapidamente.

*Afélio* é o ponto mais afastado do Sol, onde o planeta move-se mais lentamente.

### **Terceira Lei: Lei dos tempos**

“Os quadrados dos períodos de translação dos planetas são proporcionais aos cubos dos semieixos maiores de suas órbitas.”

Matematicamente temos

$$\frac{T^2}{D^3} = k$$

Essa lei indica que existe uma relação entre a distância do planeta e o tempo que ele demora a completar uma revolução em torno do Sol. Portanto, quanto mais distante estiver do Sol mais tempo levará para completar sua volta em torno dessa estrela.

Encerrado esse momento “túnel do tempo”, vamos colocar a “mão na massa”.

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**  
Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

## DICAS PEDAGÓGICAS

### 1º Momento: Exibição completa do vídeo “A Matemática no Espaço Sideral” (20 min)

O vídeo tem aproximadamente 15 minutos, e sugerimos mais 5 minutos para considerações finais antes da aplicação da Folha de Atividades.

### 2º Momento: Aplicação da atividade (70 min)

Após a exibição, distribua a Folha de Atividades – Aula 2 e dê início à investigação. Observe os comentários e sugestões relativos a esta atividade que estão disponíveis adiante. Procure acompanhar o desenvolvimento de cada grupo, tentando intervir, quando for necessário, mas sem retirar o prazer da descoberta, se possível.

Para auxiliá-lo, produzimos os arquivos com as atividades realizadas no GeoGebra e os disponibilizamos nos *links* abaixo:

<<http://www.projetofundao.ufrj.br/matematica/tecnologias/tvescola/elipse1.ggb>>

<<http://www.projetofundao.ufrj.br/matematica/tecnologias/tvescola/elipse2.ggb>>

Recomendamos as seguintes aulas sobre elipse disponíveis no Portal do Professor:

[Cônicas no CAP UFRJ: Elipse](#) (RANGEL, 2009)

[Elipse](#) (GASPAROTO, 2012)

[Construção das Cônicas com Dobraduras](#) (HARTUNG, 2010)

[A Segunda Lei de Kepler na Geometria Analítica](#) (HARTUNG, 2010b)

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**

Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



**Folha de Atividades – Aula 2**

**As cônicas na terra e no céu**

1) A primeira atividade é bem simples e consiste em construir uma circunferência de raio e centro dados. Para isso, vamos ter um centro podendo se deslocar livremente pelo plano, e o comprimento do raio será dado por um controle deslizante. Queremos investigar dois aspectos: construtivo, a partir da definição, e o analítico, a partir das equações das curvas geradas pelo GeoGebra. Lembre-se: queremos construir as curvas a partir de suas definições, então não vale usar, nessa atividade, as ferramentas que já constroem as curvas diretamente.

a) Aplique um ponto qualquer no plano, e chame-o de O, que será o centro da circunferência.

b) Crie um controle deslizante, chamando-o de raio, que varie no intervalo de 0 a 6, com incremento de 0,01.

c) Construa um segmento (AP) de tamanho fixo, a partir do ponto A e comprimento igual ao raio. Para isso use a ferramenta (segmento com comprimento fixo).

d) Feito isso, anime o ponto P. O resultado deve ser semelhante ao mostrado na figura a seguir, onde o Ponto P estava em movimento, regido pela lei de ter uma distância fixa (nesse caso igual a 3) ao ponto O.

e) Varie o controle deslizante e o ponto dado, construindo algumas circunferências.

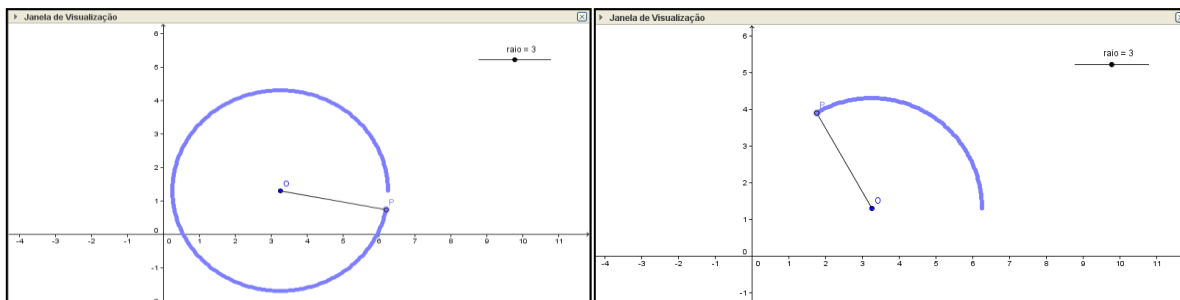


Imagem do autor

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**

Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

## DICAS PEDAGÓGICAS

2) A segunda atividade é construir a elipse, a partir da definição:

“Elipse é o conjunto de pontos do plano tais que a soma das distâncias a dois pontos fixos dados, chamados focos da elipse, é constante. A constante será igual a  $2a$ , valor igual à maior distância entre dois pontos dessa elipse.”

- Insira dois pontos no plano, sobre a parte positiva do eixo  $x$ , e chame-os de  $F_1$  e  $F_2$ . Eles serão os focos da elipse.
- Crie um controle deslizante, variando de 0 a 10, com incremento de 0,01. Chame-o de constante (essa constante será chamada de  $2a$ ).
- Construa uma circunferência de centro  $F_1$ , por exemplo, e raio igual  $2a$  (valor que será variado pelo controle deslizante indicado no item anterior).
- Insira um ponto qualquer sobre essa circunferência e chame-o de  $A$ .
- Construa os segmentos  $AF_1$  e  $AF_2$ .
- Construa a mediatriz do segmento  $AF_2$ . (Terceira opção do quarto conjunto de ferramentas, logo abaixo do menu principal.)
- Marque os pontos de intersecção da mediatriz com os segmentos  $AF_1$ , chamando-o de  $P$ , e  $AF_2$ , chamando de  $M$  (pois  $M$  é o ponto médio de  $AF_2$  pela definição da mediatriz). Nesse ponto, sua construção deve ser semelhante à ilustrada na figura abaixo.

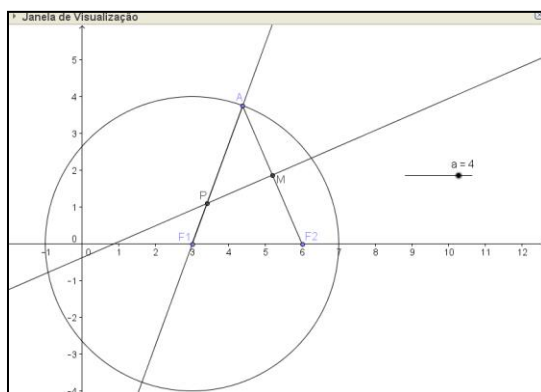


Imagem do autor

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**.  
Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.

- h) Construa o segmento PF2 e PF1.
- i) Agora, mostre que  $PF1 + PF2 = 2a$ . (Ou seja, qualquer que seja o ponto P, a soma  $PF1 + PF2$  é constante e, nesse caso, igual ao valor ajustado no controle.)
- j) Qual a propriedade do ponto P em relação aos focos F1 e F2?
- k) Agora, clique sobre o ponto P, com o botão direito do mouse, e selecione a opção habilitar rastro, conforme ilustra a figura a seguir.

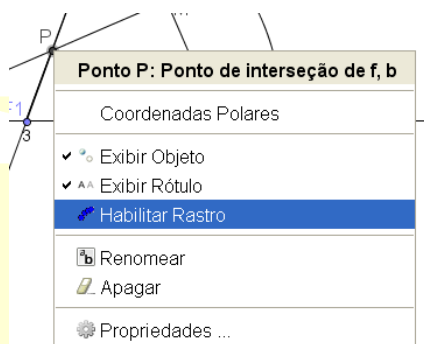


Imagem do autor

- l) Em seguida, clique sobre o ponto A, com o botão direito do mouse, e selecione a opção animar.

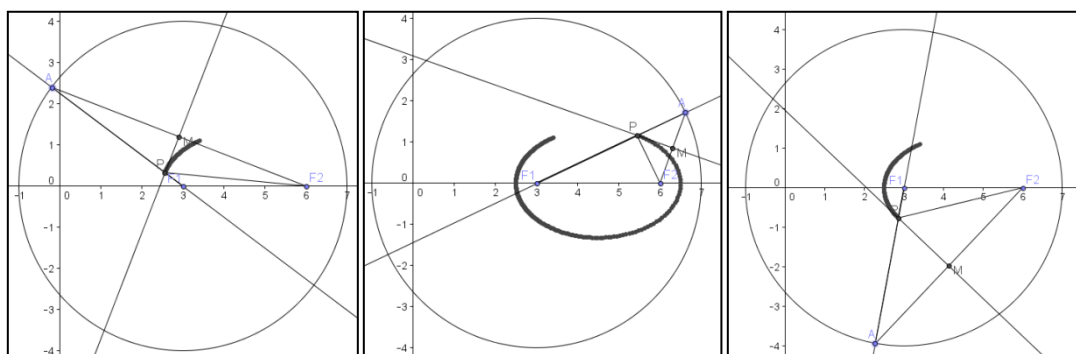


Imagem do autor.



Vídeos da TV Escola

## DICAS PEDAGÓGICAS

- m) Analise a curva construída dinamicamente pelo rastro do ponto P. Que lugar geométrico foi descrito pelo ponto P?
- n) Construa um segmento unindo os pontos da elipse mais distantes entre si. Quanto mede esse segmento? Utilize a ferramenta *distância* do GeoGebra. Esse segmento é chamado eixo maior da elipse, e o denotamos por  $2a$ . Perceba que o eixo maior tem comprimento igual à soma das distâncias. Explique por que isso acontece.

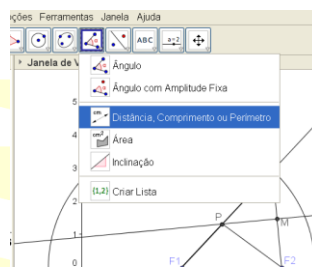


Imagem do autor

- o) Agora, construa o segmento perpendicular ao anterior, que passe pelo centro da elipse. Esse segmento é chamado eixo menor da elipse, e o denotamos por  $2b$ .
- p) Considerando que a distância entre os focos é chamada distância focal e denotada por  $2c$ , encontre uma relação entre as medidas  $a$ ,  $b$  e  $c$  na elipse.



Vídeos da TV Escola

## DICAS PEDAGÓGICAS

### Comentários e soluções da Folha de Atividades – As cônicas na terra e no céu

- 1) A primeira atividade consiste da construção no GeoGebra de uma circunferência, partindo da definição e sem usar as ferramentas diretas de construção de circunferência disponíveis no programa. Apresentamos o passo a passo na própria Folha de Atividades. Recomendamos que se aborde com os alunos o conceito de lugar geométrico. Para isso, dê exemplos tais como mediatriz de um segmento de reta, bissetriz de um ângulo e a própria circunferência, que são conjuntos de pontos que satisfazem a uma determinada propriedade. Cada conjunto desses é chamado de lugar geométrico.
- 2) Na questão 2 temos a construção da elipse. Também incluímos detalhes passo a passo. Note que no item i há uma demonstração que é requerida dos alunos. Apresentamos uma demonstração de referência a seguir.
  - i) Queremos provar que  $PF1 + PF2 = 2a$ . Lembrando que a mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao mesmo tempo em que o divide ao meio, ou seja, forma  $90^\circ$  com o segmento e passa pelo ponto médio deste, temos na figura que M é ponto médio de AF2,  $MA=MF2$ , e os ângulos  $\angle PMA$  e  $\angle PMF2$  são retos.

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**  
Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.



Vídeos da TV Escola

## DICAS PEDAGÓGICAS

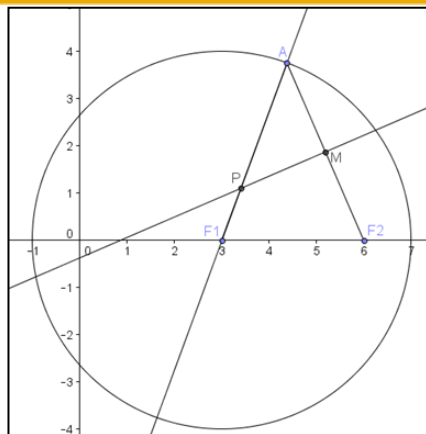


Imagem do autor.

Daí vem que os triângulos PMA e PMF2 são congruentes, pelo caso LAL, visto que PM é um lado comum aos dois triângulos. Assim  $PA=PF2$ . Como  $PF1 + PA = \text{raio} = \text{constante} = 2a$ , por construção, então, temos que  $PF1 + PF2 = 2a$ , como queríamos demonstrar.

- j) A soma das distâncias do ponto P aos focos é sempre constante e igual a  $2a$ .
- m) O lugar geométrico é uma elipse.
- p) Basta observar que quando P está sobre o eixo menor, temos um triângulo retângulo cuja hipotenusa é igual à metade da constante, logo igual a  $a$  e com catetos  $b$  (metade do eixo menor) e  $c$  (metade da distância focal). Logo, temos que  $a^2 = b^2 + c^2$ .

### Questões para discussão

- 1) O Universo é eterno? Ou seja, ele sempre existiu?
- 2) Qual a idade do Universo? E da Terra?
- 3) Quais as vantagens tecnológicas advindas do conhecimento científico sobre o Espaço Sideral?
- 4) O infinito na Matemática: pesquise sobre os diferentes infinitos de Cantor.
- 5) O que é o Hotel de Hilbert?

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**

Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.





Vídeos da TV Escola

## DICAS PEDAGÓGICAS

Professor(a), esperamos que essa proposta tenha ampliado suas ideias. Tenha em mente que é totalmente possível mudar o que foi proposto, alterar a ordem, excluir ou incluir perguntas, abordagens, assunto etc. O mais importante é adequar a proposta à realidade de sua turma. Os nossos e-mails são [ivailmuniz@gmail.com](mailto:ivailmuniz@gmail.com) e [fernandovillar@ufrj.br](mailto:fernandovillar@ufrj.br). Por favor, entre em contato para informar o que achou desta dica pedagógica e se a utilizou em suas aulas. O seu retorno é muito importante para a Rede da TV ESCOLA.

### Referências

- BRUMMELEN, V. G. *The Mathematics of the heavens and the earth. The early history of trigonometry*. Princeton University Press, 2009.
- GASPAROTO, L. et. al. *Elipse*. Portal do Professor, 2012. Disponível em: <<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=943>>.
- HARTUNG, G. E.. *Construção das Cônicas com Dobraduras*. Portal do Professor, 2010. Disponível em: <<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=27219>>.
- HARTUNG, G. E.. *A Segunda Lei de Kepler na Geometria Analítica*. Portal do Professor, 2010b. Disponível em: <<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=27219>>.
- LEONARDO, G.A. O movimento dos planetas. Site do departamento de Matemática da UFMG, disponível em <<http://www.mat.ufmg.br/~syok/cursos/mat039/projetos2/leonardo/planeta.html>>. Acesso em 12 de Abril de 2013.
- LIMA, E. L. et al. *A matemática do Ensino Médio. Volume 3*. Coleção do Professor de Matemática. SBM/IMPA, 2002.
- RANGEL, L. G. et. al. *Cônicas no CAP UFRJ: Elipse*. Portal do Professor, 2009. Disponível em: <<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=12833>>.

**Consultores: Ivail Muniz Junior e Fernando Celso Villar Marinho**

A TV Escola leva até a sua sala de aula os melhores documentários e séries de conteúdo educativo. Acompanhe nossa programação no **Canal 123 da Embratel**, no **Canal 112 da SKY**, no **Canal 694 da Telefônica TV Digital** ou gratuitamente sintonizando sua **antena parabólica: analógica - Hor /Freq. 3770 e digital banda C Vert /Freq. 3965**  
Na internet acesse <http://tvescola.mec.gov.br> e assista ao vivo, 24 horas.