CAPÍTULO I
Preliminares

1. A contribuição da Análise Matemática na formação de professores

As disciplinas introdutórias de Análise, que costumam integrar os currículos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática, em geral são totalmente dedicadas a uma apresentação rigorosa do Cálculo. Assim, tal disciplina apresenta excelente oportunidade para desenvolver no estudante de Licenciatura e futuro professores do Ensino Básico aquela habilidade tão necessária no trato com definições, teorema, demonstrações, que são o embasamento lógico de toda a Matemática. (Geraldo Ávila, 2006).

Diante disso, a Análise Matemática objetiva o desenvolvimento do raciocínio algébrico abstrato e a habilidade de compreender simbologias, nomenclaturas, definições e teoremas; ou seja, fornece ao professor as ferramentas necessárias para que este possa pesquisar, compreender e questionar o que é dito nos livros. (Carine B. Loureiro)

O estudo da Análise Matemática está direcionado aos formalismos utilizados em Matemática e às demonstrações dos resultados estudados nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. Elon Lima (LIMA, 2002), um importante matemático brasileiro, autor de alguns dos principais livros desta área adotados em cursos de Matemática, diz que um livro de Matemática não deve ser lido como se lê uma novela; no primeiro caso deve-se se ter lápis e papel na mão para reescrever com suas próprias palavras cada definição ou enunciado de teoremas.

Uma vez que o professor de matemática tem conhecimento sobre os teoremas e demonstrações, ele se sente mais seguro ao ensinar os conteúdos, pois assim ele tem certeza da veracidade do que será transmitido ao aluno. Faltando tal conhecimento ao professor, o mesmo poderá se sentir inseguro sobre o conteúdo e assim poderá omitir certas informações que poderiam facilitar a explicação para a melhor compreensão por parte do aluno, prejudicando o desenvolvimento intelectual do mesmo.

2. Um pouco de história

A Matemática sempre representou uma atividade humana e, em todas as épocas, mesmo nas mais remotas, a ideia de contar sempre esteve presente. Um clássico exemplo da noção intuitiva de contagem era a correspondência entre ovelhas de um rebanho e pedrinhas contidas em pequenos sacos, ou marcas em pedaço de osso ou de madeira, ou ainda por meio de nós em cordões, utilizados pelos incas.

Muitos anos ainda se passaram até que se iniciasse o desenvolvimento teórico do conceito de número que, embora hoje nos pareça natural, foi lento e complexo, envolvendo diversas civilizações.

Os registros históricos nos mostram a utilização de vários sistemas de numeração, por exemplo, os povos babilônios de 2000 a.C., que desenvolveram o sistema de numeração sexagesimal e empregaram o princípio posicional; os egípcios, que já usavam sistema decimal (não posicional); os romanos, que fizeram história através do uso simultâneo do princípio da adição e do raro emprego do princípio da subtração; e os gregos antigos, povos que utilizavam diversos sistemas de numeração.

Quase quatro mil anos separam as primeiras manifestações de numeração escrita da construção do sistema de numeração posicional decimal que utilizamos, munido do símbolo denominado zero. Esse símbolo foi criado pelos hindus nos primeiros séculos da era cristã. A concepção do zero foi ignorada, durante milênios, por civilizações matematicamente importantes como a dos gregos e dos egípcios.

A invenção do zero foi um passo decisivo para a consolidação do sistema de numeração indo-arábico, devido à sua eficiência e funcionalidade em relação aos demais sistemas de numeração. Sem o zero, tornaria se impossível efetuar 385 x 908 usando os algarismos romanos.

Um marco importante na história dos números e da matemática se deu no século VI a.C., na Escola Pitagórica. Em seus estudos, os pitagóricos envolviam-se de um certo misticismo, pois acreditavam que existia uma harmonia interna no mundo governada pelos números naturais.

Desde Pitágoras pensava-se que, dados dois segmentos de reta quaisquer, AB e CD, seria sempre possível encontrar um terceiro segmento EF, contido um número inteiro de vezes em AB e um número inteiro de vezes em CD. Expressamos essa situação dizendo que EF é um **submúltiplo comum** de AB e CD ou que AB e CD são **comensuráveis.**

Essa ideia nos permite comparar dois segmentos de reta da seguinte maneira: dados dois segmentos, AB e CD, dizer que a razão AB/CD é o número racional m/n, significa que existe um terceiro segmento EF, submúltiplo comum desses dois, satisfazendo: AB é **m** vezes EF e CD é **n** vezes EF.

Era natural imaginar que, para dois segmentos AB e CD dados, era sempre possível tomar EF suficientemente pequeno para caber um número inteiro de vezes simultaneamente em AB e em CD. Para os pitagóricos, dois segmentos de reta eram sempre **comensuráveis**, sendo, portanto, os números naturais suficientes para expressar a razão entre eles e, de modo mais geral, a relação entre grandezas da mesma natureza.

O reinado dos números naturais, na concepção pitagórica, foi profundamente abalado por uma descoberta originada no seio da própria comunidade pitagórica e que se deu, em particular, numa figura geométrica comum e de propriedades aparentemente simples, o quadrado. Trata-se da **incomensurabilidade** entre a diagonal e o lado de um quadrado.

De fato, ao considerarmos a diagonal e o lado de um quadrado comensuráveis, teremos, a diagonal como medida **nt** e o lado com medida **mt**. Pelo teorema de Pitágoras, temos que:

$$n^2t^2 = m^2t^2 + m^2t^2 \quad \Rightarrow \quad n^2t^2 = 2m^2t^2 \quad \Rightarrow \quad n^2 = 2m^2$$

o que é absurdo, pois em n^2 há uma quantidade par de fatores de primos e, em $2m^2$, uma quantidade par de fatores primos, em contradição com a unicidade da decomposição de um número natural em fatores primos, como mostra o Teorema Fundamental da Aritmética. **(Todo número inteiro positivo n > 1 é igual a um produto de fatores primos).**

Essa situação só foi contornada através do matemático e astrônomo ligado à Escola de Platão, Eudoxo de Cnidos (408 a.C – 355 a.C.), que criou a ***Teoria das Proporções*** para tratar as grandezas incomensuráveis através da Geometria, que apesar do progresso, contribuiu para a desaceleração do desenvolvimento da aritmética e da álgebra por muitos séculos.

O coroamento da fundamentação matemática do conceito de número ocorreu somente no final do século XIX, principalmente através dos trabalhos propostos por Richard Dedekind (1831–1916), Georg Cantor (1845–1918) e Giuseppe Peano (1858–1932). Esses estudos foram motivados pelas demandas teóricas que surgiram a partir do volume de conhecimento matemático adquirido a partir do cálculo diferencial e integral de Isaac Newton (1643–1727) e Gottfried Leibniz (1646–1716), no século XVII.

É interessante estudar como o processo histórico da conceituação de número assemelha-se à nossa própria formação desse conceito. Antes de iniciarmos nossa vida escolar, admitimos os números naturais como fruto do processo de contagem, da mesma forma que a humanidade os admitiu até o século XIX. Entre os gregos da época de Euclides, números eram os que hoje escrevemos como 2, 3, 4, 5 etc., ou seja, os números naturais maiores do que 1. O próprio 1 era concebido como a unidade básica a partir da qual os números, as quantidades, eram formadas. O zero, como vimos, foi uma concepção já dos primeiros séculos da era cristã, criada pelos hindus, para a numeração escrita. Para uma criança aprendendo a contar, este ato só faz sentido a partir da quantidade 2, senão contar o quê? Ela só admite o zero depois de ter passado alguns anos experimentando os números "de verdade", isto é, contando e adquirindo experiência, o que se dá no início de sua aprendizagem da numeração escrita.

As frações eram admitidas pelos gregos não como números, mas como razão entre números (2, 3, 4, etc.). Da mesma forma, os números negativos, inicialmente utilizados para expressar dívidas, débitos e grandezas que são passiveis de serem medidas em sentidos opostos, só receberam o ***status*** de números séculos após serem utilizados na matemática e em suas aplicações. Aqui nota-se a semelhança com a nossa experiência pessoal em matemática.

A existência de grandezas incomensuráveis e a ausência de um tratamento eficiente para expressá-las, isto é, o desconhecimento de uma fundamentação teórica para o conceito de número real, não impediu o progresso de ramos da matemática do século XVI ao século XIX. No entanto, a complexidade dessa matemática conduziu a problemas para cuja compreensão e solução o entendimento intuitivo não era suficiente. É mais ou menos deste modo que formamos o nosso conceito de número real: apesar de ouvirmos falar de números reais desde o Ensino Fundamental, concretamente só trabalhamos com números racionais. Isso ocorre até mesmo no Ensino Superior.

Os números complexos apareceram no estudo de equações, no século XVI, com o matemático italiano Girolamo Cardano (1501–1576), mas também só adquiriram o ***status*** de número a partir de suas representações geométricas, dadas no século XVIII pelos matemáticos Carl Friedrich Gauss (1777–1855) e Jean Robert Argand (1768–1822) e da sua álgebra, apresentada por W. R. Hamilton em 1833, na qual eles eram definidos como pares ordenados de números reais. Estes, por sua vez, foram construídos rigorosamente a partir dos racionais, décadas depois, por R. Dedekind e G. Cantor. Aqui também há um paralelo com a nossa educação escolar: supondo conhecidos os reais, não é tão complicado concebermos os complexos. No entanto, o conceito rigoroso de número real só se aborda no curso de Análise Matemática. Isso, porém, é feito de forma axiomática, isto é, o conjunto dos números reais é admitido por axioma como um corpo ordenado completo, e não construído a partir dos racionais, como deve ser feito.

Por fim, os números racionais podem ser construídos rigorosamente a partir dos números inteiros e esses a partir dos naturais. Mas, e os números naturais, os primeiros que são admitidos pela nossa intuição? Assim se perguntaram alguns matemáticos do século XIX, na busca de completar o conceito matematicamente rigoroso de número. Eles podem ser construídos a partir da Teoria dos Conjuntos ou podem ser apresentados através de axiomas, como fez George Peano, em 1889.

Por fim, este curso pretende apresentar os conjuntos numéricos numa ordem logicamente coerente – naturais, inteiros, racionais e reais – passando a limpo a conflituosa ordem histórica apresentada.

3. Primeiras noções

3.1. Proposição

É qualquer afirmação, verdadeira ou falsa, mas que faça sentido. Por exemplo, são proposições as três afirmações seguintes:

A: Todo número primo maior que 2 é ímpar.

B: A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180º.

C: Todo número ímpar é primo.

Observe que dessas três proposições, as duas primeiras são verdadeira, mas a terceira é falsa, pois 9, 15, 21, etc., são números ímpares que não são primos.

3.2. Teorema

É uma proposição verdadeira do tipo "P implica Q", onde P e Q são também proposições. Escreve-se, simbolicamente, "P $\Rightarrow$ Q", que tanto se lê "P implica Q", como "P acarreta Q" ou "Q é consequência de P". P é ***a hipótese*** e Q é ***a tese*** do teorema. Por exemplo, a proposição A acima é um teorema, que pode ser escrito na forma D $\Rightarrow$ E, onde D e E são as proposições seguintes:

D: *n é um número primo maior do que 2.*
E: *n é um número ímpar.*

Observe que quando se enuncia um teorema A $\Rightarrow$ B, não está se afirmando que a hipótese A é verdadeira; apenas que, se for verdadeira, então B também será.

3.3. Lema e Corolário

Lema é um teorema preparatório para a demonstração de outro teorema. **Corolário** é um teorema que segue como consequência natural de outro.

Muitos autores utilizam a palavra "proposição" para designar os teoremas de uma certa teoria, reservando a palavra "teorema" para aqueles resultados que devem ser ressaltados como os mais importantes.

Ao longo deste curso, os verbos "demonstrar", "provar" e "mostrar" serão usados com o mesmo significado. Antigamente, falava-se somente "demonstrar", mas com a influência do inglês, os verbos "provar" e "mostrar" foram tomando o lugar de "demonstrar".

3.4. Axioma

É uma proposição aceita como sendo verdade inicial, não sendo demonstrável pela sua evidência.

4. Relação de Equivalência

Uma relação R em A diz-se ***relação de equivalência*** se possuir as seguintes propriedades:

i) reflexiva: $a \sim a$, para todo $a \in A$;
ii) simétrica: se $a, b \in A$ e $a \sim b$, então $b \sim a$;
iii) transitiva: para $a, b, c \in A$, se $a \sim b$ e $b \sim c$, então $a \sim c$.

CAPÍTULO II
Construção dos Números Reais

Parte I – Números Naturais

1. Conjuntos Numéricos e suas representações nos diagramas

Os números podem ser organizados em conjuntos.

Há uma simbologia convencionada para representar os principais conjuntos formados pelos números. Vejamos:

Conjuntos dos números naturais

É representado por N. Então: N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...}

Conjuntos dos números inteiros

É representado por Z. Então: Z = {..., –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}

Conjuntos dos números racionais

É representado por Q. Então: $Q = \left\{ x \mathbin{/} x = \dfrac{p}{q}, \text{ sendo p e q inteiros, com } q \neq 0 \right\}$.

A letra Q é a inicial da palavra quociente. Todo racional é o quociente da divisão de dois inteiros.

Conjuntos dos números reais

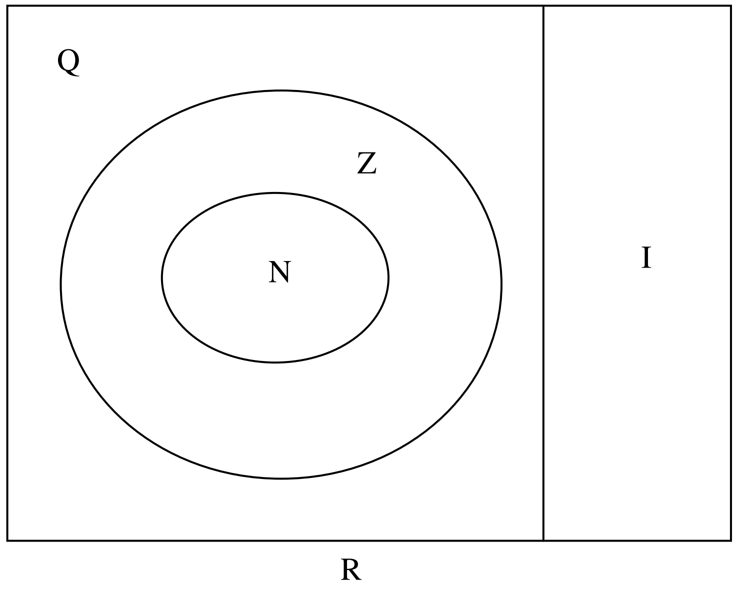
É representado por R. Então: R = {x / x é racional ou irracional}

Todo número natural é número inteiro. Mas há números inteiros que não naturais (por exemplo: –1, –2, –3).

Todo número inteiro é número racional. Mas há números racionais que não são inteiros $\left(\text{por exemplo: } \dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{3}, -\dfrac{3}{10}\right)$.

Todo número racional é um número real. Mas há números reais que não racionais (são os irracionais).

Num diagrama, podemos representar os conjuntos numéricos, respeitando as observações acima, do seguinte modo:



2. Definição

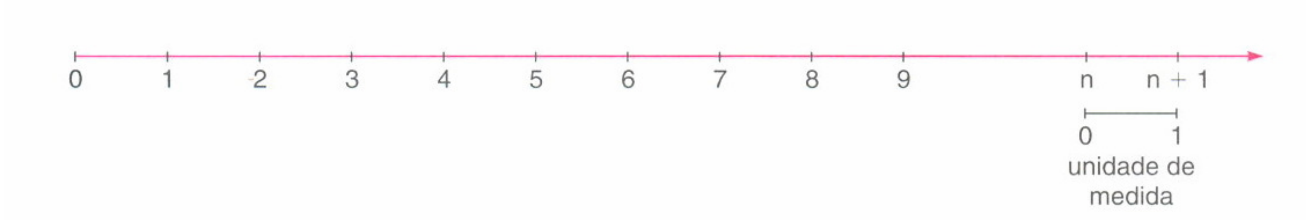
Os números naturais chamam-se "naturais" justamente por surgirem "naturalmente" em nossa experiência com o mundo físico, já nos primeiros anos da infância.

Intuitivamente, podemos dizer que números são medidas de grandezas. Considerando que as grandezas podem ser discretas (que podem ser contadas) ou contínuas (que não podem ser contadas), definimos os números naturais como sendo medidas de grandezas discretas; nas palavras de Leonard Euler:

Número é o resultado da comparação de duas grandezas da mesma espécie, sendo uma tomada como unidade. (L. Euler, Elements of Algebra, 1765)

Essa definição intuitiva de número natural é boa porque traduz em palavras nossa experiência cotidiana de contagem, resumindo o que podemos dizer com base no senso comum; entretanto, a definição não satisfaz os critérios de precisão e rigor, característicos da matemática contemporânea; também não serve para desenvolvermos uma teoria dos números naturais no padrão axiomático-dedutivo. Para a Matemática, interessa uma rigorosa teoria axiomática-dedutiva dos números naturais porque isso significa tanto o aprofundamento de nossa compreensão quanto a organização lógica dos conceitos e propriedades desses números, o que nos possibilita a investigação de propriedades sutis (que não são evidentes ou são contraintuitivas) e também permite aplicações em contextos inusitados. (Lúcio Fassarella, 2002)

3. Representação gráfica



4. Propriedades Operatórias (N, +), (N, *) e (N, +, *)

Os números naturais são munidos de duas operações internas: a adição (+) e multiplicação (*).

A1 – Para todos a e b em **N** tem-se: a + b pertence a **N**.

(Propriedade do fechamento)

A2 – Para todos a, b e c em **N** tem-se: (a + b) + c = a + (b + c)

(Propriedade associativa da adição)

A3 – Existe um elemento $0 \in$ **N** tal que para todo $a \in$ **N** tem-se: 0 + a = a + 0 = a

(Propriedade do elemento neutro da adição)

A4 – Para todos $a, b \in$ **N** tem-se: a + b = b + a.

(Propriedade comutativa da adição)

M1 – Para todos a e b em **N** tem-se: $a \bullet b$ pertence a N.

(Propriedade do fechamento)

M2 – Para todos a, b e c em **N** tem-se: $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$

(Propriedade associativa da multiplicação)

M3 - Existe um elemento $1 \in$ **N** tal que para todo $a \in$ **N** tem-se $a \bullet 1 = 1 \bullet a = a$

(Propriedade do elemento neutro da multiplicação)

M4 - Para todos $a, b \in$ **N** tem-se: $a \bullet b = b \bullet a$

(Propriedade comutativa da multiplicação)

D1 – Para todos a, b e c em **N** tem-se: $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$

(Propriedade distributiva à esquerda da multiplicação em relação à adição)

D2 - Para todos a, b e c em **N** tem-se: $(a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c$

(Propriedade distributiva à direita da multiplicação em relação à adição)

5. Princípio da Indução Finita (PIF) ou Princípio da Boa Ordem

5.1. Introdução

O Princípio da Indução Finita é um eficiente instrumento para a demonstração de fatos referentes aos números naturais. Por isso deve-se adquirir prática em sua utilização. Por outro lado, é importante também conhecer seu significado e sua posição dentro do arcabouço da Matemática. Entender o Princípio da Indução Finita é praticamente o mesmo que entender os números naturais.

Apresentamos abaixo uma breve exposição sobre os números naturais, onde o Princípio da Indução se insere adequadamente e mostra sua força teórica antes de ser utilizado na lista de exercícios propostos ao final.

5.2. A Sequência dos Números Naturais

Os números naturais constituem um modelo matemático, uma escala padrão, que nos permite a operação de contagem. A sequência desses números é uma livre e antiga criação do espírito humano. Comparar conjuntos de objetos com essa escala abstrata ideal é o processo que torna mais precisa a noção de quantidade; esse processo (a contagem) pressupõe, portanto o conhecimento da seqüência numérica. Sabemos que os números naturais são 1, 2, 3, 4, 5,… A totalidade desses números constitui um conjunto, que indicaremos com o símbolo N e que chamaremos de conjunto dos naturais. Portanto N = {1, 2, 3, 4, 5,…}.

Evidentemente, o que acabamos de dizer só faz sentido quando já se sabe o que é um número natural. Façamos de conta que esse conceito nos é desconhecido e procuremos investigar o que há de essencial na sequência 1, 2, 3, 4, 5… .

Deve-se a **Giussepe Peano** (1858 – 1932) a constatação de que se pode elaborar toda a teoria dos números naturais a partir de quatro fatos básicos, conhecidos atualmente como os *axiomas de Peano*. Noutras palavras, o conjunto N dos números naturais possui quatro propriedades fundamentais, das quais resultam, como consequências lógicas, todas as afirmações verdadeiras que se podem fazer sobre esses números. Os axiomas de Peano são:

P1: Se a é um número natural, então a tem um único sucessor que também é um número natural.

P2: Zero não é sucessor de nenhum número natural.

P3: Dois números naturais que têm sucessores iguais são, eles próprios, iguais.

P4: Se um conjunto S de números contém o zero e também o sucessor de todo número de S, então todo número está em S.

5.3. Elemento Mínimo

Definição: Seja A um conjunto de naturais. Chama-se elemento mínimo de A um elemento **a** $\in$ tal que a $\leq$ x para todo x $\in$ A. Notação: a = min A.

min A = a se, e somente se, (a $\in$ A e $\forall$ x $\in$ A, então a $\leq$ x).

Teorema: Se a é elemento mínimo de A, então este elemento é único.

5.4. Indução Matemática

Teorema: Seja P(n) uma proposição associada a cada inteiro positivo n e que satisfaz às duas seguintes condições:

1) P(1) é verdadeira.

2) Para todo inteiro k, se P(k) é verdadeira, então P(k + 1) também é verdadeira. Nestas condições, a proposição P(n) é verdadeira para todo inteiro positivo n.

5.5. Princípio da Indução Finita (PIF).

Teorema: Seja S um subconjunto do conjunto N dos inteiros positivos (S $\subset$ N) que satisfaz as duas seguintes propriedades:

1) 1 pertence a S (1 $\in$ S).

2) Para todo inteiro positivo k, se k $\in$ S, então (k + 1) $\in$ S;

3) Nestas condições, S é o conjunto N dos inteiros positivos: S = N.

Vejamos três exemplos:

Exemplo 1: Prove $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo n $\geq$ 1.

Resolução:

i) Provar que é verdadeira para n = 1.

L.E. = 1

$$\text{L.D.} = \frac{1 \bullet (1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Portanto, é verdadeiro para n = 1.

ii) Supor que é verdadeiro para n = k. **(Hipótese de Indução).**

$$1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad \text{(H.I.)}$$

iii) Provar que é verdadeiro para n = k + 1.

$$1 + 2 + 3 + ... + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + ... + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Pela hipótese de indução temos que $1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Substituindo, temos:

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) =$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)\,(k+2)}{2}$$

que é igual ao L.D.

Portanto: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}, \ \forall \ n \geq 1.$

Exemplo 2: $1 + 4 + 9 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ para todo $n \geq 1$.

i) Provar que é verdadeira para n = 1.

L.E. = 1

$$\text{L.D.} = \frac{1 \bullet (1+1) \bullet (2 \bullet 1 + 1)}{6} = \frac{1 \bullet 2 \bullet 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Portanto, é verdadeiro para n = 1.

ii) Supor que é verdadeiro para n = k. **(Hipótese de Indução).**

$$1 + 4 + 9 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad \text{(H.I.)}$$

iii) Provar que é verdadeiro para n = k + 1.

$$1 + 4 + 9 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+1+1)[2(k+1)+1]}{6}$$

$$1 + 4 + 9 + ... + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 3)}{6}$$

Pela hipótese de indução temos que $1 + 4 + 9 + ... + k^2 = \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6}$. Substituindo, temos:

$$\frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6} + (k + 1)^2 =$$

$$= \frac{k(k + 1)(2k + 1) + 6(k + 1)^2}{6} = \frac{(k + 1)[k(2k + 1) + 6(k + 1)]}{6} =$$

$$= \frac{(k + 1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} = \frac{(k + 1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 3)}{6}$$

que é igual ao L.D.

Portanto: $1 + 4 + 9 + ... + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$, $\forall\ n \geq 1$.

Exemplo 3: $1 + 8 + 27 + ... + n^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$ para todo $n \geq 1$.

i) Provar que é verdadeira para n = 1.

L.E. = 1

$$\text{L.D.} = \frac{1^2 \bullet (1 + 1)^2}{4} = \frac{1 \bullet 4}{4} = 1^2$$

Portanto, é verdadeiro para n = 1.

ii) Supor que é verdadeiro para n = k. **(Hipótese de Indução).**

$$1 + 8 + 27 + ... + k^3 = \frac{k^2(k + 1)^2}{4} \quad \text{(H.I.)}$$

iii) Provar que é verdadeiro para n = k + 1.

$$1 + 8 + 27 + ... + k^3 + (k + 1)^3 = \frac{(k + 1)^2(k + 2)^2}{4}$$

Pela hipótese de indução temos que $1 + 8 + 27 + ... + k^3 = \frac{k^2(k + 1)^2}{4}$. Substituindo, temos:

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 =$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4} =$$

$$= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

que é igual ao L.D.

Portanto: $1 + 8 + 27 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\forall\ n \geq 1$.

Exercícios

1) Prove por indução finita, para todo $n \geq 1$.

a) $2 + 6 + 10 + ... + (4n - 2) = 2n^2$

b) $4 + 10 + 16 + ... + (6n - 2) = n(3n + 1)$

c) $2 + 4 + 6 + ... + (2n) = n(n + 1)$

d) $1 + 5 + 9 + ... + (4n - 3) = n(2n - 1)$

e) $1 + 3 + 6 + ... + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

f) $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$

g) $2 + 4 + 6 + \ldots + (2n) = n(n + 1)$

h) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

i) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2 = \dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

j) $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \ldots + (2n - 1) \cdot 2n = \dfrac{n(n+1)(4n-1)}{3}$

Parte II – Números Inteiros

1. Origens

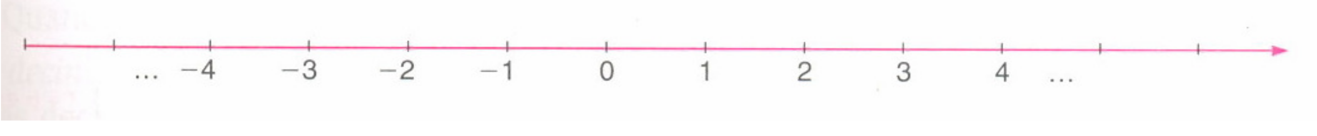
Os algarismos que usamos hoje em dia surgiram da Índia, no século VII, e sua difusão pelo mundo se deve, em grande parte, aos árabes. Daí a designação “indo-arábicos” atribuída a eles. A maneira de grafar esses símbolos foi se modificando ao longo do tempo, e a forma moderna mal se assemelha à original. Importa, porém, que foi a partir da Índia, quando o Ocidente estava mergulhando na estagnação e no obscurantismo da primeira fase do período medieval, que o sistema de numeração posicional decimal começou a se tornar padrão. Inclusive o zero, que mesmo entre os gregos do período alexandrino era usado apenas para indicar “ausência” (o que já era um avanço em relação a outras épocas e outros povos), com os hindus ganhou “status” pleno de número.

Coube também aos hindus a introdução na matemática dos números negativos. O objetivo era indicar débitos. O primeiro registro do uso de números negativos de que se notícia foi feito pelo matemático e astrônomo hindu Brahmagupta (598–?), que já conhecia inclusive as regras para as quatro operações com números negativos. Bhaskara (séc. XII), outro matemático e astrônomo hindu, assinalou que todo número positivo tem duas raízes quadradas, uma negativa e outra positiva, e salientou também a impossibilidade de se extrair a raiz quadrada de um número negativo.

Ao introduzirem os números negativos, os hindus não tinham nenhuma preocupação de ordem teórica. Na verdade, os progresso matemáticos verificados na Índia, por essa época, ocorreram quase que por acaso e em boa parte devido as descompromisso com o rigor e a formalidade.

Mas a aceitação e o entendimento pleno dos números negativos foi um processo longo. Basta ver algumas designações que receberam: Stigel (1486–1567) os chamava de números absurdos; Cardano (1501 – 1576), de números fictícios. Descartes (1596–1650) chamava de falsas as raízes negativas de uma equação. Outros, como F. Viete (1540–1603), importante matemático francês, simplesmente rejeitavam os números negativos.

2. Representação gráfica



3. Propriedades Operatórias (Z, +, *)

Os números inteiros são munidos de duas operações internas: a adição (+) e multiplicação (*).

A1 – Para todos a e b em **Z** tem-se: a + b pertence a Z.

(Propriedade do fechamento)

A2 – Para todos a, b e c em **Z** tem-se: (a + b) + c = a + (b + c)
(Propriedade associativa da adição)

A3 – Existe um elemento $0 \in$ **Z** tal que para todo $a \in$ **Z** tem-se: 0 + a = a + 0 = a

(Propriedade do elemento neutro da adição)

A4 – Para todo elemento $a \in$ **Z**, existe um elemento, denotado por –a, tal que: a + (–a) = –a + a = 0.

(Propriedade do elemento oposto da adição)

A5 – Para todos $a, b \in$ **N** tem-se: a + b = b + a.

(Propriedade comutativa da adição)

M1 – Para todos a e b em **N** tem-se: $a \bullet b$ pertence a N.

(Propriedade do fechamento)

M2 – Para todos a, b e c em **N** tem-se: $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$

(Propriedade associativa da multiplicação)

M3 - Existe um elemento $1 \in$ **Z** tal que para todo $a \in$ **Z** tem-se: $a \bullet 1 = 1 \bullet a = a$

(Propriedade do elemento neutro da multiplicação)

M4 - Para todos $a, b \in$ **Z** tem-se: $a \bullet b = b \bullet a$

(Propriedade comutativa da multiplicação)

D1 – Para todos a, b e c em **N** tem-se: $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$

(Propriedade distributiva à esquerda da multiplicação em relação à adição)

D2 - Para todos a, b e c em **N** tem-se: $(a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c$

(Propriedade distributiva à direita da multiplicação em relação à adição)

4. Construção dos números inteiros

Pretende-se aqui dar um sentido matemático a todas as expressões do tipo a – b, para quaisquer a, $b \in$ N, de maneira a poder tratar como entes do mesmo conjunto tanto aquelas como 7 – 3, 5 – 1 e 4 – 0 quanto aquelas como 3 – 7, 1 – 3 e 0 – 2, por exemplo. Nesse sentido convém observar primeiro que subjacente a cada "diferença" a – b está o par ordenado (a, b) ∈ N x N. Além disso é fácil ver que, por exemplo, a igualdade em N

$$5 - 3 = 9 - 7$$

equivale a 5 + 7 = 9 + 3. De uma maneira geral, se a, b, c, d ∈ N, a ≥ b e c ≥ d, vale a equivalência:

$$a - b = c - d \Leftrightarrow a + d = b + c$$

Essas considerações, aliadas ao fato de que o conjunto dos inteiros a ser construído, deve ser uma "ampliação" de N.

No conjunto N x N consideremos a relação ~ definida da seguinte maneira: para quaisquer (a, b) e (c, d) em N x N,

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

Para a relação ~ valem as propriedades:

- **Reflexiva**, pois, como para todo (a, b) ∈ N x N, se verifica a + b = b + a, então (a, b) ~ (b, a);
- **Simétrica**, ou seja, se (a, b) ~ (c, d), temos a + d = b + c. Temos que a + d = b + c ⇒ b + c =a + d, e pela propriedade comutativa temos c + b = d + a e, portanto: então (c, d) ~ (a, b)
- **Transitiva**, pois, se (a, b) ~ (c, d) e (c, d) ~ (e, f), então a + d = b + c e c + f = d + e. Daí temos que a + d + f = b + c + f e c + f + b = e + d + b, o que implica a + d + f = e + d + b e portanto a + f = e + b, ou seja: (a, b) ~ (e, f)

Vejamos um exemplo envolvendo os números inteiros:

Exemplo: Mostre que $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$ é um número inteiro.

Resolução:

$$\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} = x$$

Elevando ambos os membros ao cubo, vem:

$$\left(\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}\right)^3 = x^3$$

Desenvolvendo temos:

$$\left(\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}\right)^3 + 3\bullet\left(\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}\right)^2\bullet\left(\sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}\right) + 3\bullet\left(\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}\right)\bullet\left(\sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}\right)^3 = x^3$$

$$7 + 5\sqrt{2} + 3 \bullet \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} \bullet \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} \bullet \left(\underbrace{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}}_{x}\right) + 7 - 5\sqrt{2} = x^3$$

$$14 + 3 \bullet \sqrt[3]{\left(7+5\sqrt{2}\right)\left(7-5\sqrt{2}\right)} \bullet x = x^3$$

$$14 + 3x \bullet \sqrt[3]{49 - 25 \bullet 2} = x^3$$

$$14 + 3x \bullet \sqrt[3]{-1} = x^3$$

$$14 - 3x = x^3$$

$$x^3 + 3x - 14 = 0$$

As possíveis raízes da equação polinomial são: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\}$.

Testando as raízes temos:

$x = 1 \Rightarrow 1^3 + 3 \bullet 1 - 14 = 1 + 3 - 14 = -10 \neq 0$. Portanto, 1 não é raiz.

$x = 1 \Rightarrow 1^3 + 3 \bullet 1 - 14 = 1 + 3 - 14 = -10 \neq 0$. Portanto, 1 não é raiz.

$x = 1 \Rightarrow (2)^3 + 3 \bullet 2 - 14 = 8 + 6 - 14 = 0$. Portanto, 2 é raiz.

Portanto, $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ é um número inteiro.

Exercícios

2) Mostre que é inteiro o número $\sqrt[3]{2 + \frac{10}{9}\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10}{9}\sqrt{3}}$.

3) Classifique as proposições abaixo em verdadeira (V) ou falsa (F):

a) $0 \in N$

b) $0 \notin Z$

c) $-10 \notin Z$

d) $Z_+ \supset N$

e) $(2 - 3) \in Z$

f) $N \subset Z$

g) O conjunto dos números naturais é finito.

4) Classifique as sentenças abaixo em verdadeira (V) ou falsa (F), sendo **m**, **n** e **p** números naturais distintos:

a) $[(m + n) . p] \in N$

b) $[m . (n - p)] \in Z$

c) $(m + n) . (p + n) > 0$

d) $(mp - n) \in N$

Parte III – Números Racionais

1. Origens

Sempre que a divisão de um inteiro por outro não era exata, os egípcios antigos, já por volta do ano 2000 a.C., usavam frações para exprimir o resultado. E usavam também frações para operar com seu sistema de pesos e medidas.

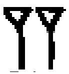
Contudo, por razoes difíceis de explicar, com exceção das frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, às vezes, os egípcios usavam apenas ***frações unitárias***, ou seja, frações cujo numerador é 1. Por exemplo, no problema 24 do papiro Rhind (cerca de 1700 a.C.) no qual o escriba pede que se efetue a divisão de 19 por 8, a resposta é dada, usando a nossa notação, por:

$$2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

Embora os egípcios não adotassem sempre o mesmo procedimento, pode-se mostrar que toda fração entre 0 e 1 é a soma de frações unitárias, o que representa uma garantia teórica para essa opção.

Aliás, o uso das frações unitárias, além de não ficar confinado ao Egito antigo, se estendeu por vários séculos. Basta dizer que Fibonacci, no seu já citado *Líber abaci*, escrito no século XIII d.C., não só as usava como fornecia tabelas de conversão das frações comuns para unitárias. É que, embora uma das finalidades dessa obra fosse divulgar os numerais indo-arábicos e a notação decimal posicional, Fibonacci não chegou a perceber a grande vantagem deste sistema: sua aplicabilidade para exprimir frações. Por exemplo:

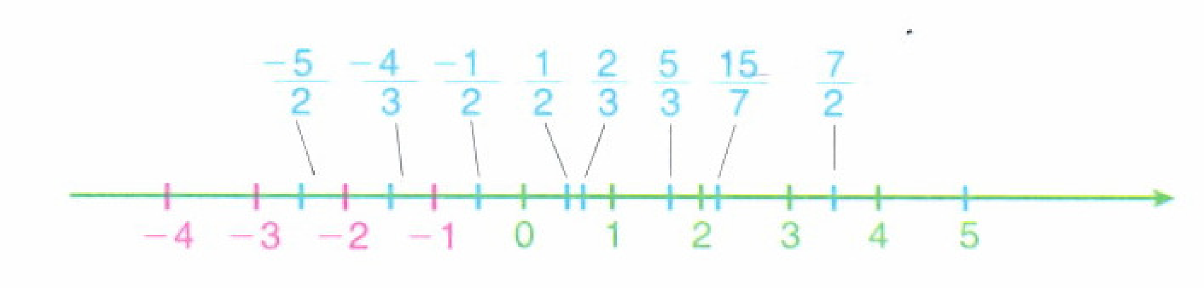
$$\frac{1}{4} = 0{,}25$$

Mas convém registrar que os babilônios, 2 000 anos antes de Cristo, apesar de algumas ambiguidades, decorrentes de não contarem com um símbolo para o zero e outro para separatriz, conseguiram estender o princípio posicional às frações no seu sistema de base 60. Por exemplo, o numeral  que representa o inteiro $1 + 1 \cdot 60 = 61$, também poderia ser uma representação de

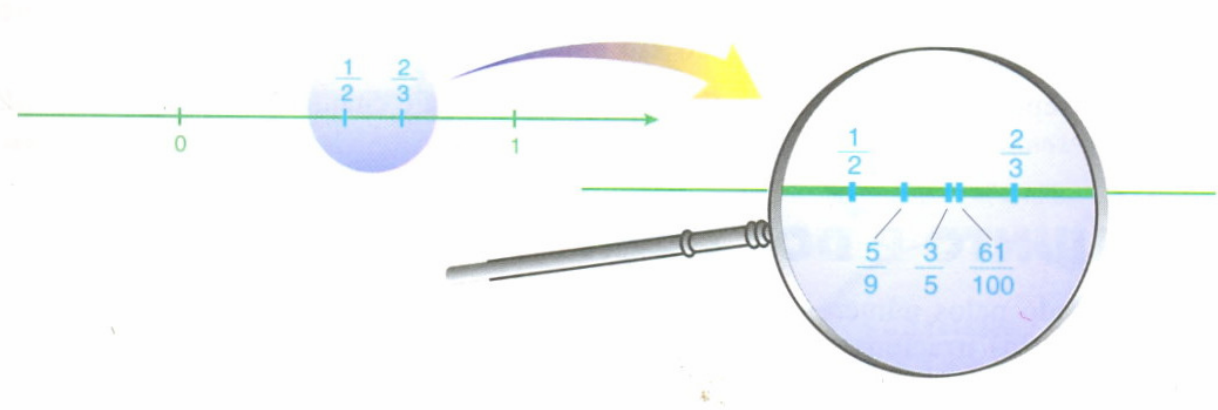
$$1 + \frac{1}{60}$$

Na verdade, o uso da ***forma decimal*** para representar frações, tal como em $\frac{1}{4} = 0{,}25$, somente começaria a vingar após a publicação, em 1585m de um pequeno texto de Simon Stevin (1548–1620) intitulado *De thiende* (O décimo). Embora a essa altura a forma decimal já não constituísse uma novidade para os especialistas, esse trabalho de Stevin alcançou grande popularidade e conseguiu seu intento, que era ensinar a "como efetuar, com facilidade nunca vista, todos os cálculos necessários entre os homens, por meio de inteiros sem frações". A notação inicialmente usada por Stevin acabou sendo melhorada com o emprego da vírgula ou do ponto como separatriz decimal, conforme sugestão de John Napier (1550–1617), feita em 1617.

2. Representação gráfica



Podemos notar que entre dois inteiros consecutivos existem infinitos números racionais e também que entre dois racionais quaisquer há infinitos racionais. Por exemplo, entre os racionais $\frac{1}{2}$ = 0,5 e $\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$, podemos encontrar os racionais $\frac{5}{9} = 0,\overline{5}$, $\frac{3}{5}$ = 0,6 e $\frac{61}{100}$ = 0,61, entre outros.



Um procedimento comum para achar um número compreendido entre outros dois é calcular a média aritmética entre eles; no caso, temos:

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{2} = \frac{\frac{3+4}{6}}{2} = \frac{\frac{7}{6}}{2} = \frac{7}{12} \quad \text{ou} \quad \frac{0,5+0,\overline{6}}{2} = \frac{1,1\overline{6}}{2} = 0,58\overline{3} = \frac{7}{12}$$

3. Propriedades Operatórias (Q, +, *)

Os números racionais são munidos de duas operações internas: a adição (+) e multiplicação (*).

A1 – Para todos a e b em **Q** tem-se: a + b pertence a Q.

(Propriedade do fechamento)

A2 – Para todos a, b e c em **Q** tem-se: (a + b) + c = a + (b + c)

(Propriedade associativa da adição)

A3 – Existe um elemento $0 \in$ **Q** tal que para todo $a \in$ **Z** tem-se: 0 + a = a + 0 = a

(Propriedade do elemento neutro da adição)

A4 – Para todo elemento $a \in$ **Q**, existe um elemento, denotado por –a, tal que: a + (–a) = –a + a = 0.

(Propriedade do elemento oposto da adição)

A5 – Para todos $a, b \in$ **Q** tem-se: a + b = b + a.

(Propriedade comutativa da adição)

M1 – Para todos a e b em **Q** tem-se: $a \bullet b$ pertence a N.

(Propriedade do fechamento)

M2 – Para todos a, b e c em **Q** tem-se: $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$

(Propriedade associativa da multiplicação)

M3 - Existe um elemento $1 \in$ **Q** tal que para todo $a \in$ **Z** tem-se $a \bullet 1 = 1 \bullet a = a$

(Propriedade do elemento neutro da multiplicação)

M4 - Para todos $a, b \in$ **Q** tem-se: $a \bullet b = b \bullet a$

(Propriedade comutativa da multiplicação)

M5 – Para todo elemento não nulo a de **Q**, existe um elemento, denotado por a^{-1}, tal que $a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = 1$

(Propriedade do elemento inverso da multiplicação)

D1 – Para todos a, b e c em **Q** tem-se: $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$

(Propriedade distributiva à esquerda da multiplicação em relação à adição)

D2 - Para todos a, b e c em **Q** tem-se: $(a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c$

(Propriedade distributiva à direita da multiplicação em relação à adição)

4. A divisão em Q

Sejam a, b $\in$ Z, b $\neq$ 0. Se a é múltiplo de b, então existe um único c $\in$ Z de maneira que a = bc. Este elemento c é chamado ***quociente*** de a por b e costuma ser indicado por:

$$c = \frac{a}{b} \text{ ou } c = a : b$$

A operação que a cada par (a, b), nas condições expostas, associa c = a : b é a ***divisão em Z***. Portanto, a divisão em Z só está definida em

$$\{(a, b) \in Z \times Z : b \neq 0 \text{ e } b / a\}$$

5. Construção dos números racionais

Consideremos o conjunto Z x Z* = {(a, b) / a $\in$ Z e b $\in$ Z*}. Definamos nele a relação: (a, b) ~ (c, d) quando ad = bc.

Para a relação ~ valem as propriedades:

- **Reflexiva**, pois, como para todo (a, b) $\in$ N x N, se verifica ab = ba, então (a, b) ~ (b, a);
- **Simétrica**, ou seja, se (a, b) ~ (c, d), temos ad = bc. Temos que ad = bc $\Rightarrow$ bc = ad. Pela propriedade comutativa, temos cb = da. Temos então (c, d) ~ (a, b).
- **Transitiva**, pois, se (a, b) ~ (c, d) e (c, d) ~ (e, f), então a + d = b + c e c + f = d + e. Daí temos que a + d + f = b + c + f e c + f + b = e + d + b, o que implica a + d + f = e + d + b e portanto a + f = e + b, ou seja: (a, b) ~ (e, f)

Temos, então:

a) (1, 2) ~ (2, 4) ~ (–31, –62)

b) (5, 1) ~ (–10, –2)

Vejamos alguns exemplos envolvendo números racionais:

Exemplo 1: Prove que a soma de dois números racionais é um número racional.

Resolução:

Sejam m = $\frac{a}{b}$, com a $\in$ Z^*, b $\in$ N^* e m $\in$ Q; e n = $\frac{c}{d}$, com c $\in$ Z^*, d $\in$ N^* e n $\in$ Q. Quer se provar que m + n $\in$ Q.

Então, $m + n = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$.

Como $a \in Z^*$, $b \in N^*$, $c \in Z^*$ e $d \in N^*$, temos então que ad + bc e bd são números inteiros, pois o produto de dois números inteiros é um número inteiro, e a soma de dois números inteiros é um número inteiro. Portanto:

$m + n = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \in Q$. (c.q.d.)

Exemplo 2: Prove que a divisão de dois números racionais é um número racional.

Resolução:

Sejam $m = \frac{a}{b}$, com $a \in Z^*$, $b \in N^*$ e $m \in Q$; e $n = \frac{c}{d}$, com $c \in Z^*$, $d \in N^*$ e $n \in Q$. Quer se provar que $m + n \in Q$.

Entendemos por divisão em Q, a operação Q x Q* em Q definida por $(a, b) \rightarrow ab^{-1}$, onde b^{-1} é o elemento inverso de b.

Então, $m : n = \frac{a}{b} \bullet \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \bullet \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

Como $a \in Z^*$, $b \in N^*$, $c \in Z^*$ e $d \in N^*$, temos então que ad e bc são números inteiros, pois o produto de dois números inteiros é um número inteiro. Portanto:

$m : n \in Q$. (c.q.d.)

Exemplo 3: Mostre que $\frac{1\,515}{3\,333} = \frac{15}{33}$.

Resolução:

Temos que $\frac{1\,515}{3\,333} = \frac{15 \bullet 100 + 15}{33 \bullet 100 + 33} = \frac{15 \bullet (100 + 1)}{33 \bullet (100 + 1)} = \frac{15}{33}$

Exemplo 4: Determine $r \in Z$ de maneira que a fração ordinária $\frac{10r}{2r-1}$ represente números inteiros.

Resolução:

Efetuando a divisão temos:

$$\begin{array}{r|l} 10r & 2r-1 \\ \cline{2-2} \underline{-10r + 5} & 5 \\ 5 & \end{array}$$

Temos, então, que: $\frac{10r}{2r-1} = 5 + \frac{5}{2r-1}$.

Para que a fração represente um número inteiro, 2r – 1 deve ser múltiplo de 5, ou seja:

$2r - 1 = 1 \Rightarrow 2r = 2 \Rightarrow r = 1$

$2r - 1 = -1 \Rightarrow 2r = 0 \Rightarrow r = 0$

$2r - 1 = 5 \Rightarrow 2r = 6 \Rightarrow r = 3$

$2r - 1 = -5 \Rightarrow 2r = -4 \Rightarrow r = -2$

Portanto, para a fração representar um número inteiro, r deve assumir os seguintes valores: –2, 0, 1, 3.

6. Determinação da fração geratriz de dízimas periódicas

Denomina-se dízima periódica os números decimais que são formados por números que se repetem infinitamente. Os algarismos que se repetem são chamados de algarismos periódicos.

Caso a dízima periódica possuir após a vírgula algarismos que não se repetem, estes são chamados de não periódicos.

Exemplos:

a) 0,555..... a parte periódica é o 5.

b) 0,132132132.... a parte periódica é 132.

c) 0,002500250025... a parte periódica é 0025.

d) 0,32777... a parte não periódica é 32 e a periódica é 7.

e) 0,023858585... a parte não periódica é 023 e a periódica 85.

Quando temos uma parte inteira diferente de zero, devemos ver este número como a soma da parte inteira com a parte fracionária.

Exemplos:

a) 4,315315315... = 4 + 0,315315315....

b) 1,710979797... = 1 + 0,710979797...

Regras para determinação de uma fração geratriz

a) Simples:

Em uma dízima periódica simples, o período se apresenta imediatamente após a vírgula, como, por exemplo, 0,4444... ou 2,5555... ou, ainda, 2,343434...

Para obter a fração geratriz de uma dízima periódica simples, podemos tratá-la como uma incógnita, como x, por exemplo.

$x = 0{,}4444...$

Em seguida, multiplicamos os dois termos da igualdade por uma potência de 10 cujo expoente é igual à quantidade de numerais do período da dízima.

$$x = 0{,}4444...$$
$$10x = (0{,}444...) \cdot 10$$
$$10x = 4{,}444...$$

Subtraindo uma expressão da outra, isto é, fazendo:

$$(10x - x) = 4{,}444... - 0{,}444...$$

obtemos:

$$9x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{9}$$

Assim, a geratriz da dízima 0,444... é a fração $\frac{4}{9}$.

b) composta

Em uma dízima periódica composta, entre o período e a vírgula há um ou mais numerais que não fazem parte do período, como, por exemplo, 0,23333... ou 1,03242424...

De modo semelhante ao que foi feito anteriormente, nomearemos a dízima de x.

$$x = 0{,}2333...$$

Visto que o período é formado apenas por um algarismo, multiplicaremos toda a expressão por 10, para separar a parte periódica da não periódica.

$$x = 0{,}2333$$
$$10x = 2{,}333...$$

Em seguida, multiplicamos os dois termos da igualdade por uma potência de 10 cujo expoente é igual à quantidade de numerais do período da dízima.

$$100x = 23{,}333...$$

Subtraindo as duas últimas expressões, temos:

$$(100x - 10x) = 23{,}333... - 2{,}333...$$

obtemos:

$$90x = 21 \Rightarrow x = \frac{21}{90}$$

Assim, a geratriz da dízima 0,2333... é a fração $\frac{21}{90}$.

Dos dois exemplos acima, generalizando foi criada as seguintes regras:

Regra 1: A fração geratriz de uma dízima periódica simples tem como ***numerador*** o número formado pela parte periódica. O ***denominador***, tantos noves quantos forem os algarismos que formam a parte periódica.

Exemplos:

a) $0{,}7777... = \frac{7}{9}$ b) $0{,}676767... = \frac{67}{99}$ c) $0{,}001001001... = \frac{1}{999}$

Regra 2: A fração geratriz de uma dízima periódica composta tem como ***numerador*** o número formado pela junção das partes não periódica e periódica **menos** o número formado pela parte não periódica. O ***denominador*** tantos noves quantos forem os algarismos da parte periódica acrescidos de tantos zeros quantos forem os não periódicos.

Exemplos:

a) $0{,}13555.. = \frac{135-13}{900} = \frac{122}{900}$ b) $0{,}4113113113... = \frac{4113-4}{9990} = \frac{4109}{9990}$

7. Dízimas periódicas e cíclicas

O que será que acontece se o denominador de uma fração irredutível contiver algum fator primo diferente de 2, 3 e 5? Consideremos o exemplo da conversão de 5/7 em decimal, ilustrada abaixo. Na primeira divisão (de 50 por 7), obtemos o resto 1; depois, nas divisões seguintes, vamos obtendo, sucessivamente, os restos 3, 2, 6, 4 e 5. No momento em que obtemos o resto 5, que já ocorreu antes, sabemos que os algarismos do quociente voltarão a se repetir, resultando no período 714285. Essa repetição acontecerá certamente, pois os possíveis restos de qualquer divisão por 7 são 0, 1, 2, 4, 5 e 6. Vemos também que o período terá no máximo seis algarismos.

$$
\begin{array}{l|l}
5{,}00000000 & \underline{\ 7\ \ } \\
\ 10 & 0{,}71428571... \\
\ \ \ 30 & \\
\ \ \ \ \ 20 & \\
\ \ \ \ \ \ \ 60 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ 40 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 50 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 10 &
\end{array}
$$

No caso da divisão de 41 por 23, podemos garantir que a repetição de um resto parcial ocorrerá no máximo até a 23a casa decimal. De fato, para a fração $\frac{41}{23}$, a dízima é a seguinte:

1,78260869565217391304347826086956521739130434...

ou seja, ela apresenta um período enorme, formado por um "pacote" de 22 casas decimais.

Portanto, ao efetuarmos a divisão da fração irredutível $\frac{m}{n}$, os únicos restos possíveis serão {1, 2, 3, 4, 5, ..., n – 1}. Assim, o processo de divisão que gera uma dízima periódica recomeça no enésimo passo ou antes dele. O desenvolvimento decimal de $\frac{m}{n}$ será periódico e seu período terá, no máximo, n – 1 algarismos.

No caso do exemplo acima, a fração $\frac{41}{23}$ tem por período seu "comprimento" máximo: n – 1 = 23 – 1 = 22 algarismos.

Exercícios

5) Explique porque não consideramos como números:

a) $\frac{0}{0}$ b) $\frac{1}{0}$

6) $\sqrt[3]{n}$ pode ser um número racional? Explique.

7) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é um número racional? Explique.

8) Mostre que o número $x = \sqrt{19+8\sqrt{3}} + \sqrt{19-8\sqrt{3}}$ é racional.

9) Prove que 0,9999... é igual a 1.

10) Mostre que $x = \sqrt{12+6\sqrt{3}} + \sqrt{12-6\sqrt{3}}$ é racional.

11) Classifique as proposições abaixo em V (verdadeira) ou F (falsa).

a) $\frac{4}{5} \in Q$ b) $\frac{2}{3}-1 \notin Q$ c) $-\frac{1}{3} \in Q-Z$

d) $0{,}333... \in Q$ e) $1{,}\overline{9} \in Z$ f) $-\frac{15}{11} \notin Q$

12) Escreva dois números racionais que estão entre:

a) 0 e $\frac{3}{5}$ b) 1 e $\frac{9}{4}$ c) $-\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{5}$

13) Calcule:

a) 2,33333... • 1,75

b) 1,25555... • 4,44444...

c) 0,757575... : 0,66666...

d) 0,666... – 0,6

e) 0,23 : 0,2333...

f) –0,1777... + 0,1

g) 0,161616... : 0,4777...

14) Um professor encontrou entre os cálculos de seus alunos quatro diferentes formas de efetuar a adição de duas frações:

Aluno A: $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = 0{,}5 + 0{,}4 = 0{,}9$

Aluno B: $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{5}{10} + \frac{4}{10} = \frac{9}{10}$

Aluno C: $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{3}{7}$

Aluno D: $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{5+4}{10} = \frac{9}{10}$

15) Determine as frações geratrizes das dízimas periódicas usando a regra prática.

a) 0,1515...
b) 0,416416...
c) 2,111...
d) 20,2020...
e) 8,1212...
f) 0,1555...
g) 1,155...
h) – 2,01717...
i) 2,007777...
j) 100,0777...
l) 4,0757575...

16) Se a = $0,\overline{4}$ e b = $0,\overline{3}$, então $b\sqrt{a}$ é igual a:

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{2}{9}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{7}{9}$

17) (XXI OBM 1999 – Primeira fase – Nível 2) Qual o 1999º algarismo após a vírgula na representação decimal de $\frac{4}{37}$?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 7 e) 8

18) Mário estava fazendo esta divisão:

```
9          |_7______
20         1,285714
 60
  40
   50
    10
     30
      2
```

Cansado, não quis mais continuar.
Marisa olhou e disse:
– Na verdade, você não precisa continuar! Assim já dá para perceber qual é o resultado.
Marisa tem razão. Explique por que e depois apresente o quociente da divisão.

Parte IV – Números Reais e Irracionais

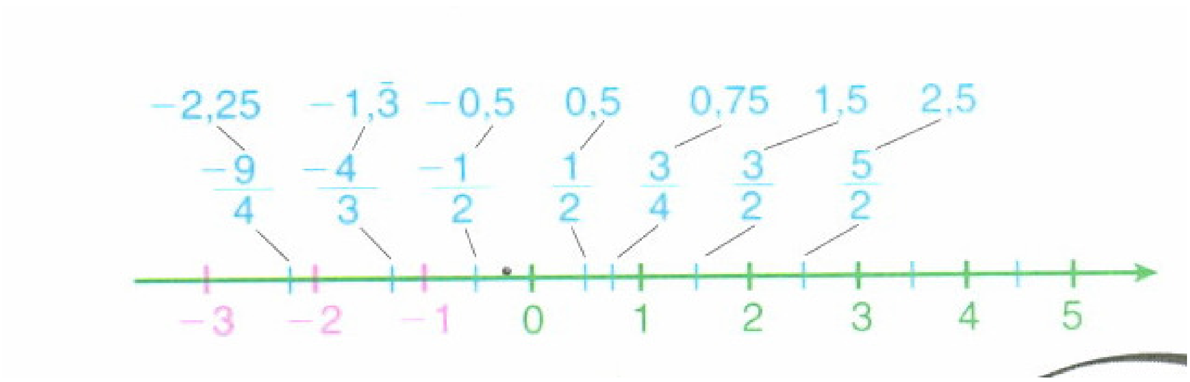
1. Definição

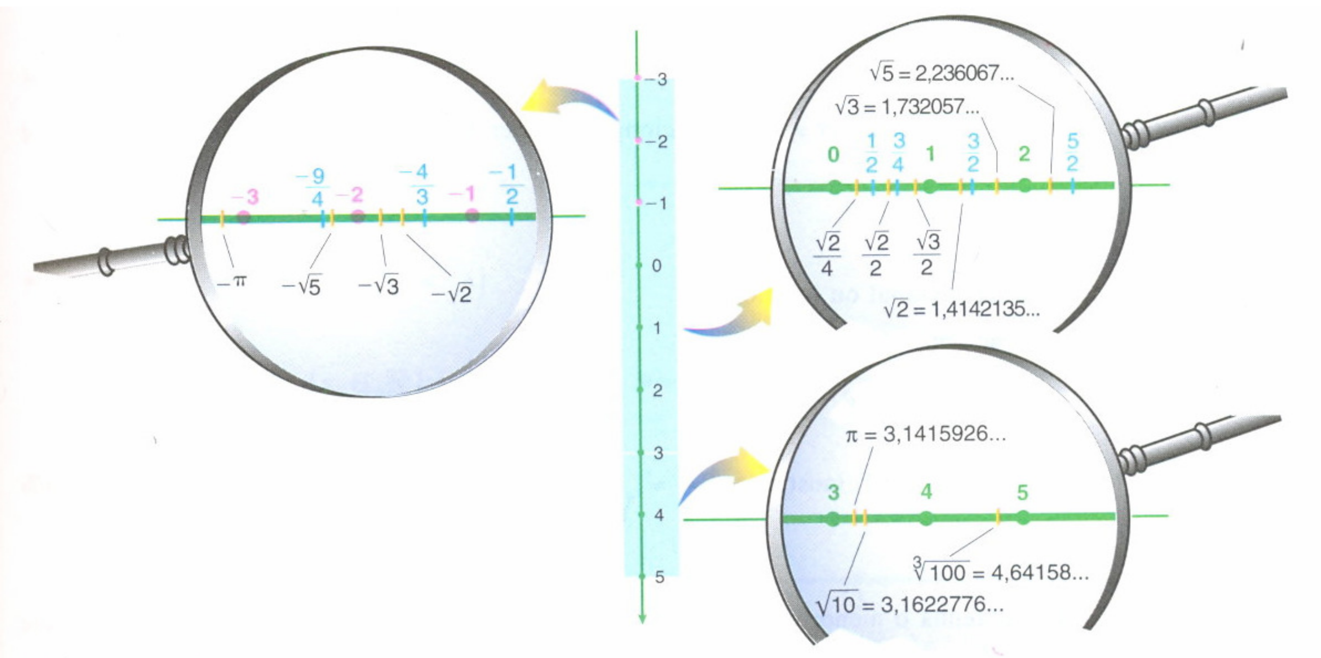
Os números reais são os alicerces da Análise Matemática. **Número real** é todo número que é **racional** ou **irracional.** Observa-se que os números naturais e os números inteiros são casos particulares de números racionais, de forma que quando dizemos um número é racional, fica aberta a possibilidade de ele ser um número inteiro (positivo ou negativo) ou simplesmente um número natural.

A totalidade dos números racionais, juntamente com os irracionais é o chamado conjunto dos **números reais.**

2. Representação gráfica

Retomemos a reta numerada, com alguns números racionais (inteiros ou não) já assinalados:





3. Propriedades Operatórias (R, +, *)

Os números reais são munidos de duas operações internas: a adição (+) e multiplicação (*).

A1 – Para todos a e b em **R** tem-se: a + b pertence a Q.

(Propriedade do fechamento)

A2 – Para todos a, b e c em **R** tem-se: (a + b) + c = a + (b + c)

(Propriedade associativa da adição)

A3 – Existe um elemento $0 \in$ **R** tal que para todo $a \in$ **Z** tem-se: 0 + a = a + 0 = a

(Propriedade do elemento neutro da adição)

A4 – Para todo elemento $a \in$ **R**, existe um elemento, denotado por –a, tal que: a + (–a) = –a + a = 0.

(Propriedade do elemento oposto da adição)

A5 – Para todos $a, b \in$ **R** tem-se: a + b = b + a.

(Propriedade comutativa da adição)

M1 – Para todos a e b em **R** tem-se: $a \bullet b$ pertence a N.

(Propriedade do fechamento)

M2 – Para todos a, b e c em **R** tem-se: $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$

(Propriedade associativa da multiplicação)

M3 - Existe um elemento $1 \in$ **R** tal que para todo $a \in$ **Z** tem-se $a \bullet 1 = 1 \bullet a = a$

(Propriedade do elemento neutro da multiplicação)

M4 - Para todos $a, b \in$ **R** tem-se: $a \bullet b = b \bullet a$

(Propriedade comutativa da multiplicação)

M5 – Para todo elemento não nulo a de **R**, existe um elemento, denotado por a^{-1}, tal que $a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = 1$

(Propriedade do elemento inverso da multiplicação)

D1 – Para todos a, b e c em **R** tem-se: $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$

(Propriedade distributiva à esquerda da multiplicação em relação à adição)

D2 - Para todos a, b e c em **R** tem-se: $(a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c$

(Propriedade distributiva à direita da multiplicação em relação à adição

4. Grandezas incomensuráveis

Historicamente, a primeira evidência da necessidade dos números irracionais ocorre com a ideia de "incomensurabilidade". Na Grécia Antiga, os únicos números reconhecidos como tais eram os números naturais 2, 3, 4, etc. O próprio 1 não era considerado número, mas a "unidade", a partir da qual se formavam os números. As frações só apareciam indiretamente, na forma de razão de duas grandezas, como, por exemplo, quando dizemos que o volume de uma esfera está para o volume do cilindro reto que a circunscreve assim como 2 está para 3.

A descoberta de grandezas incomensuráveis foi feita pelos próprios pitagóricos; e representou um momento de crise da Matemática.

Devemos lembrar que Pitágoras notara certas relações numéricas envolvendo o comprimento de uma corda musical e o som por ela emitido. Ao que parece, ele fez observações semelhantes com relação a outros fenômenos, intuindo daí que o número fosse de fato a essência de todos os fenômenos, permeando a Natureza inteira. Sendo assim, era de se esperar que a razão de dois segmentos de reta pudesse sempre ser expressa como a razão de dois números (naturais).

Dizer que a razão de dois segmentos A e B é a fração m/n significa dizer que existe um segmento c tal que A = mc e B = nc. Ora, com a descoberta dos incomensuráveis, ficou claro que isso nem seria possível.

5. Números irracionais

Podemos conceber números cuja representação decimal não é nem finita nem periódica. Esses são os chamados ***números irracionais.***

É fácil produzir números irracionais, basta inventarmos uma regra de formação que não permita aparecer período. Podemos conseguir isso, por exemplo, utilizando dois algarismos quaisquer, como 5 e 0, colocando o 5 seguido de um zero, depois o 5 seguido de dois zeros, etc. Assim, temos:

0,50 500 5000 50000...

Outros três números irracionais importantes e conhecidos são: o π (lê-se: pi), o φ (lê-se: fi) e o **e** (número neperiano). Temos, respectivamente, os três números com suas 300 primeiras casas decimais:

Número π

3,141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998
6280348253421170679821480865132823066470938446095505822317253594081284811174502841
0270193852110555964462294895493038196442881097566593344612847564823378678316527120
1909145648566923460348610454326648213393607260249141273...

Número φ

1,618033988749894848204586834365638117720309179805762862135448622705260462818902449 707207204189391137484754088075386891752126633862223536931793180060766726354433389 086595939582905638322661319928290267880675208766892501711696207032221043216269548 626296313614438149758701220340805887954454749246185695364...

Número e

2,718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724076630353547594 571382178525166427427466391932003059921817413596629043572900334295260595630738132 328627943490763233829880753195251019011573834187930702154089149934884167509244761 460668082264800168477411853742345442437107539077744992069...

Os três pontos utilizados nos números irracionais não têm o mesmo significado das dízimas periódicas, por exemplo. Aqui significa que os algarismos se sucedem indefinidamente, sem nenhuma lei de formação explicitada.

As raízes quadradas dos números naturais que são quadrados perfeitos (0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...), as raízes cúbicas de cubos perfeitos (0, 1, 9, 27, 64, ...) e assim por diante, são números naturais.

$\sqrt{0} = 1$	$\sqrt[3]{0} = 0$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt[3]{8} = 2$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt[4]{16} = 2$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt[5]{32} = 2$

As raízes quadradas dos números naturais que não são quadrados perfeitos, cubos perfeitos e assim por diante; são números irracionais.

$\sqrt{3} = 1{,}732050808...$	$\sqrt{61} = 7{,}810249676...$
$\sqrt{10} = 3{,}16227766...$	$\sqrt[3]{6} = 1{,}817120593...$

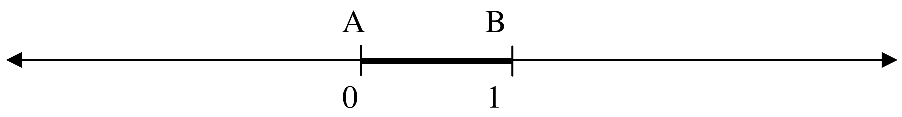
6. Representação geométrica dos números irracionais

Apesar de os irracionais não poderem ser escritos na forma de fração não é correto dizer que eles não têm valor exato. Esse assunto foi objeto de preocupação entre os matemáticos da Escola pitagórica, por volta séc. V a. C. Conta-se que Hippaso de Metaponto, filósofo grego, em uma embarcação marítima, comprovou, geometricamente, que os números irracionais tinham um valor exato, contradizendo a ideias dos pitagóricos fanáticos da época. Por esse motivo foi lançado ao mar.

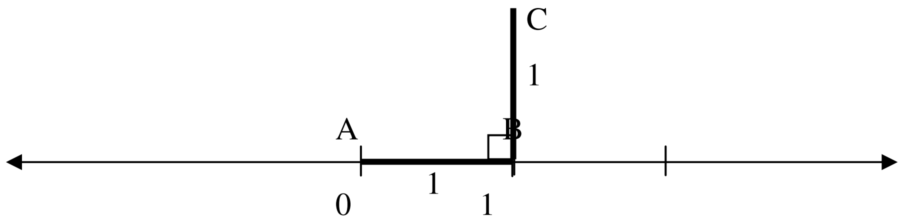
Impossível de se verificar algebricamente, é verdade, mas de fácil visualização geométrica. Com os números reais em mãos, situaremos cada um deles sobre uma reta, de modo que cada ponto da reta representará um número real. Esse ponto será chamado imagem do número. Reciprocamente o número será chamado de abscissa do ponto.

Para construí-la procedemos da seguinte forma:

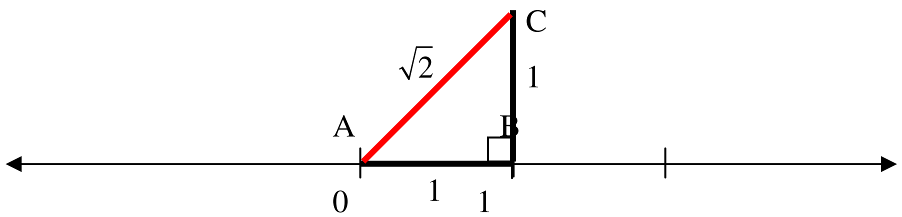
1º passo: Marcamos, no eixo real, dois pontos para serem imagem de 0 e 1 respectivamente. Note que AB = 1.



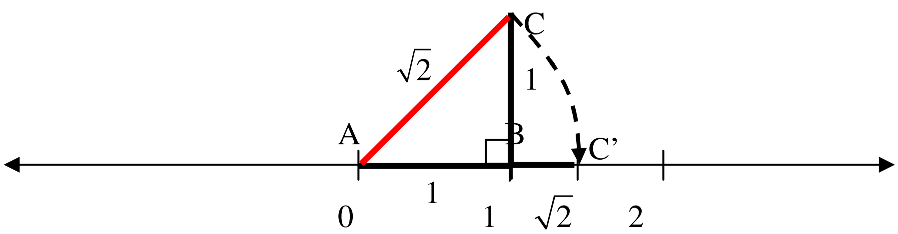
2º passo: Construímos um segmento BC, congruente a BA, com origem em B e que forma um ângulo reto com o eixo. Observe:



3º passo: Ligamos os pontos A e C para formar o segmento AC. Pelo teorema de Pitágoras, descobrimos que AC tem medida igual a $\sqrt{2}$.



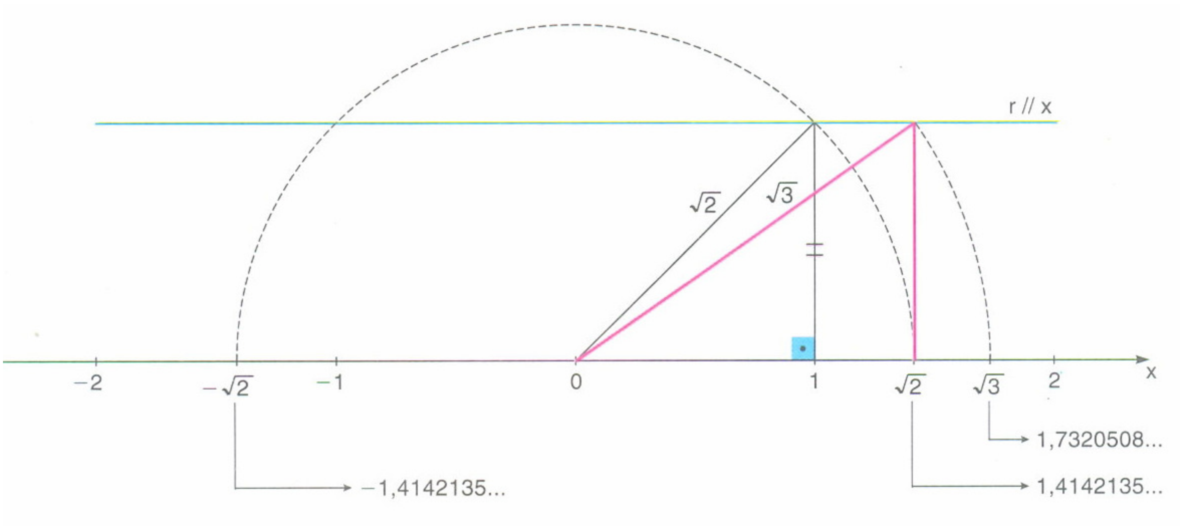
4º passo: Giramos no sentido horário o segmento AC, em torno do ponto A, com o auxílio de um compasso, até se sobrepor ao eixo. Pronto! O local onde o ponto C tocou o eixo (C’) é a imagem de $\sqrt{2}$. Observe:



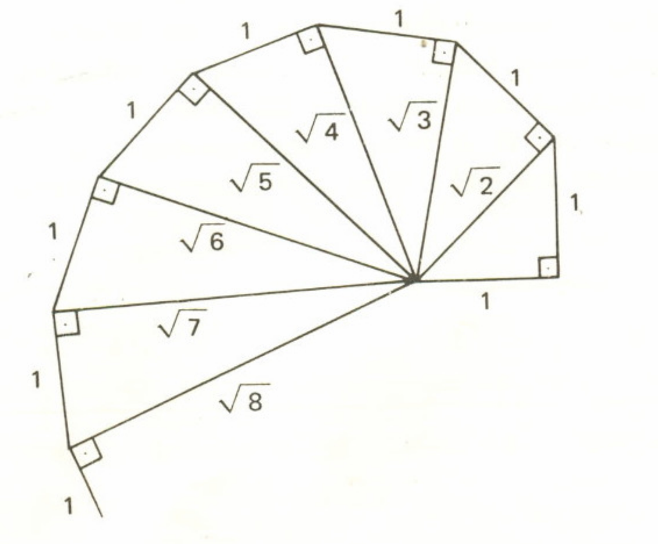
O tamanho da hipotenusa (segmento AC) fornece o valor exato de $\sqrt{2}$. (Nesse caso não consideramos imprecisões nos aparelhos de medida que dispomos). Devemos considerar réguas ideais, embora não existam de fato.

Esse processo é válido para qualquer número irracional. Com esse raciocínio fica provado que, ao contrário do que parece, os irracionais têm valor exato. Embora números desse tipo possuam infinitas casas decimais com algarismos que nunca repetem (indício de não possuir valor exato), podemos visualizar geometricamente (através de uma figura) que há um "tamanho" bem determinado para $\sqrt{2}$, é igual a medida do segmento AC'. Esse um valor exato. Como todos os irracionais têm segmentos cujo tamanho é igual ao seu valor, fica provado que qualquer número irracional tem valor exato, embora a primeira vista pareça o contrário.

Veja, por exemplo, como representamos os números irracionais $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{2}$ na reta:



A construção que se segue é bastante sugestiva para a representação precisa dos números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, ..., $\sqrt{n}$, ... sobre a reta:



7. Provando que $\sqrt{2}$ é um número irracional

Antes de provar a irracionalidade da $\sqrt{2}$, vamos provar antes que o quadrado de todo número par é par.

Seja m um número par. Então temos, $m = 2x$, com $x \in Z$. Elevando ao quadrado, temos:

$$m^2 = (2x)^2 = 4x^2 = 2 \,.\, 2x^2$$

Como x é inteiro, $2x^2$ também. Qualquer número multiplicado por 2 é par. Portanto, o quadrado de qualquer número par é par.

Agora, vamos provar que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

I. Vamos supor, por absurdo, que $\sqrt{2}$ seja racional, isto é, que $\sqrt{2}$ possa ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in Z$ e $b \in Z^*$, de modo que $\frac{a}{b}$ seja irredutível (**a** e **b** são primos entre si). Temos, então, $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

II. Elevando os dois membros ao quadrado, obtemos $2 = \frac{a^2}{b^2}$, ou $a^2 = 2b^2$. Isso significa que a^2 é par, logo, **a é par.**

III. Por outro lado, como a fração $\frac{a}{b}$ é irredutível e **a** é par, então **b** tem que ser **ímpar**.

IV. Se a é par, existe um número inteiro **m** tal que $a = 2m$. Substituindo em $a^2 = 2b^2$, temos:

$$(2m)^2 = 2b^2 \quad \Rightarrow \quad 4m^2 = 2b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 2m^2$$

Ou seja, se b^2 é par, então b também é par.

V. Essa última dedução é um absurdo, pois em III concluímos que b deveria ser ímpar e um número não pode ser par e ímpar ao mesmo tempo. E também, porque a e b devem ser primos entre si.

Por isso, concluímos que a hipótese de $\sqrt{2}$ ser racional é falsa e que, portanto, $\sqrt{2}$ é irracional.

8. Para além dos complexos

Uma pergunta natural, neste ponto, seria: ***os conjuntos numéricos param por aí? Ou seja, C pode ser imerso propriamente em algum outro conjunto de números?*** A resposta é sim! Por exemplo, C pode ser imerso no ***anel dos quatérnios de Hamilton*** que, no entanto, não tem mais a estrutura algébrica de corpo porque a multiplicação deixa de ser comutativa. Os quatérnios são hoje utilizados em robótica, computação gráfica e em outras áreas da ciência. Por sua vez, os quatérnios podem ser imersos nos ***octônios***, no qual a multiplicação não é mais associativa. Os octônios têm importantes aplicações em ramos da física como relatividade especial e teoria das cordas, além de ser relacionarem com outras estruturas matemáticas como os chamados grupos de Lie excepcionais. Esse processo de imersão em conjuntos maiores pode prosseguir ***ad infinitum*** através da chamada Construção de Cayley-Dickson. Um resultado algébrico fundamental, devido a Frobenius (1848–1917), garante, no entanto, que as únicas ***álgebras com divisão finita sobre o corpo dos reais*** são os reais, os complexos, os quatérnios e os octônios.

Na matemática e em suas aplicações, as estruturas de corpo ordenado completo dos reais e de corpo algebricamente fechado dos complexos são importantes por várias razões, em especial, por serem os corpos de escalares dos espaços vetoriais presentes em muitas áreas da matemática.

Vejamos alguns exemplos envolvendo números reais.

Exemplo 1: Prove que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ não pode ser racional.

Resolução:

Seja $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Elevando ambos os membros ao quadrado temos:

$$x^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3$$

Reagrupando, temos:

$$x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$$

Elevando ao quadrado novamente, temos:

$$x^4 - 10x^2 + 25 = 24$$

Reagrupando, temos:

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$

As únicas raízes racionais possíveis desta equação são –1 e 1. Substituindo x por –1 e por 1, nenhum desses dois valores satisfazem a equação. De modo que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, que satisfaz a equação, não pode ser racional.

Exemplo 2: Indique um número irracional entre $\frac{22}{3}$ e $\frac{23}{3}$.

Resolução:

Seja **a** o número procurado: $\frac{22}{3} < a < \frac{23}{3}$.

Como $\frac{22}{3}$ e $\frac{23}{3}$ são números positivos maiores que 1, então:

$$\left(\frac{22}{3}\right)^2 < a^2 < \left(\frac{23}{3}\right)^2$$

Logo, $\frac{484}{9} < a^2 < \frac{529}{9}$.

Podemos atribuir a a^2 qualquer fração que esteja entre $\frac{484}{9}$ e $\frac{529}{9}$. Por exemplo, $a^2 = \frac{495}{9}$.

Logo, $\frac{484}{9} < \frac{495}{9} < \frac{529}{9}$; então, $\frac{484}{9} < 55 < \frac{529}{9}$.

Extraindo a raiz de todos os membros dessa desigualdade, temos:

$$\sqrt{\frac{484}{9}} < \sqrt{55} < \sqrt{\frac{529}{9}}$$
$$\frac{22}{3} < \sqrt{55} < \frac{23}{3}$$

Assim, $\sqrt{55}$ está entre as duas frações dadas.

Exercícios

19) Quaisquer que sejam o racional x e o irracional y, pode se dizer que:

a) $x \bullet y$ é irracional;

b) $y \bullet y$ é irracional;

c) $x + y$ é racional;

d) $x - y + \sqrt{2}$ é irracional;

e) $x + 2y$ é irracional.

20) Classifique as sentenças em verdadeiras ou falsas e apresente um exemplo que confirme sua afirmação.

a) O produto de dois números irracional pode ser um racional.

b) A soma de um racional com um irracional é sempre um irracional

c) A soma de dois irracionais é sempre um número irracional.

d) Se x e y são racionas, então x + y é sempre racional.

e) $\sqrt{5} \bullet x$, se x é racional, esse número pode ser racional.

f) y^3, se y é irracional, esse número pode ser racional.

21) Prove que a soma de dois números pares é sempre um número par.

22) Prove que a soma de dois números ímpares é sempre um número par.

23) Prove que o quadrado de um número ímpar é sempre ímpar.

24) Prove que $\sqrt{3}$ é irracional.

25) Prove que $\sqrt{p}$ é irracional, onde $p > 1$ é um número primo qualquer.

26) Decida se cada uma das frases dadas é verdadeira (V) ou falsa (F). Não é preciso provar, basta justificar a escolha feita.

a) Um número real com infinitas casas decimais não nulas é irracional.

b) Uma dízima periódica composta é um número irracional.

c) 0,9999... = 1

d) Entre os números 1,23456 e 1,23457 não existe nenhum número irracional.

e) Entre os números 1,23456 e 1,23457 não existe nenhum número racional.

f) A soma de dois números racionais pode ser um número irracional.

g) A soma de dois números irracionais pode ser um número racional.

h) A soma de dois números irracionais é um número irracional.

i) O produto de dois números irracionais é um número irracional.

j) Um número irracional elevado a um número racional pode dar um número racional.

27) Prove que $\sqrt[3]{2}$ é um número irracional

28) Prove que os números abaixo são irracionais:

a) $\sqrt[4]{5}-\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$

29) Coloque em ordem crescente os números reais: $\frac{19}{20}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 1, $\sqrt{5}$ e $1,\overline{2}$.

30) Disponha em ordem decrescente os números: $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 1, $\frac{21}{20}$, $\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $0,\overline{8}$.

31) Observe os seguintes números:

I. 2,212121...

II. 3,212223...

III. $\frac{\pi}{5}$

IV. 3,1416

V. $\sqrt{-4}$

Assinale a alternativa que identifica os números irracionais:

a) I e II b) I e IV c) II e III d) II e V e) III e V

32) Classifique as afirmações abaixo em V (verdadeira) ou F (falsa).

a) $-3 \in N$ b) $0 \in Z_+$ c) $\sqrt{3} \in Q$

d) $\frac{3}{0} \in R$ e) $\sqrt{-3} \in R$ f) $0{,}123123... \in Z$

33) Classifique as afirmações abaixo em verdadeiras ou falsas:

a) Se $x \in N$, então $x \in Z$

b) Se $x \in Z$, então $x \in N$

c) Se $x \in Q$, então $x \in R$

d) Se $x \in N$, então $x \in Q$

34) Sendo y = 1 : 0,1 e x = 2 : 0,1, mostre que $A = \sqrt{\frac{x}{y}}$ e $B = \sqrt{\frac{x(y-1)}{y}}$ são irracionais, mas que A . B é racional.

35) Identifique a afirmação verdadeira entre as seguintes:

a) No conjunto dos números inteiros relativos, existe um elemento que é menor do que todos os outros.

b) O número real $\sqrt{2}$ pode ser representado sob a forma $\frac{p}{q}$, sendo p e q inteiros, $q \neq 0$.

c) O número real representado por 0,37222... é um número racional.

d) Toda raiz de uma equação algébrica do 2º grau é um número real.

e) O quadrado de qualquer número real é um número racional.

36) Sejam **a**, **b** e **c** números reais quaisquer. Identifique a afirmação verdadeira:

a) $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$

b) $a > b \Leftrightarrow ac > bc$

c) $\sqrt{a^2 + b^2} \geq a$

d) $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$

e) $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$

37) Escreva um número:

a) natural

b) inteiro negativo

c) racional que não inteiro

d) real e não racional

38) Localize os números $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$ e $\sqrt{9}$ na reta real geometricamente.

39) Mostre que o número $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ...}}}}$ é racional. (Sugestão: eleve ao quadrado os dois membros.)

Parte V – Fundamentos Axiomático dos números reais

1. Enumerabilidade

Diz-se que um conjunto é ***enumerável*** quando seus elementos podem ser postos em correspondência biunívoca com os números naturais.

Por exemplo, os números pares 2, 4, 6, ..., constituem um conjunto enumerável, como se vê a seguir:

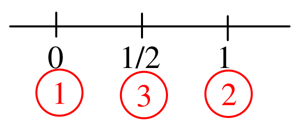
Números pares	2	4	6	8
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
Números naturais	1	2	3	4

Um dos primeiros fatos surpreendentes que surge na consideração de conjuntos infinitos diz respeito à possibilidade de haver equivalência entre um conjunto e um seu subconjunto próprio. Por exemplo, a correspondência n $\to$ 2n, que ao 0 faz corresponder 0, ao 1 faz corresponder 2, ao 2 faz corresponder 4, etc., estabelece equivalência entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números pares positivos. Veja: o conjunto dos números pares positivos é um subconjunto próprio do conjunto **N**; no entanto, tem a mesma cardinalidade que **N**, ou seja, o mesmo número de elementos. Este fenômeno é uma peculiaridade dos conjuntos infinitos e em nada contradiz o que já sabemos sobre conjuntos finitos.

1.1. A enumerabilidade em Q

O conjunto dos números racionais é ***enumerável.*** Se eu tiver "etiquetas" com os números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... eu consigo dar uma "etiqueta" para cada número racional.

A enumerabilidade não precisa preservar a ordem de valores dos números.



1.2. Como enumerar os racionais?

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \; \cdots \\[1em]
2 & \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{2}{7} & \frac{2}{9} & \frac{2}{11} \; \cdots \\[1em]
3 & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{3}{7} & \frac{3}{8} \; \cdots \\[1em]
4 & & & & & \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

Nessa matriz infinita, estão gerados todos os números racionais.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Construa uma bijeção entre o conjunto N e o conjunto dos números ímpares positivos.

Resolução: $n \mapsto 2n + 1$

Exemplo 2: Demonstre que o conjunto dos números racionais, entre 0 e 1 inclusive, é enumerável.

Resolução:

Basta escrever todas as frações de denominador 2, 3, ... considerando só uma vez as frações equivalentes como $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots$ Então, pode-se estabelecer a correspondência biunívoca com os números naturais como segue:

Números racionais	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	...
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
Números naturais	0	1	2	3	4	5	6	7	8	

De modo que o conjunto dos números racionais, entre 0 e 1 inclusive, é enumerável.

Exemplo 3: Prove que o conjunto de todos os reais em [0, 1] não é enumerável.

Resolução:

Todo real em [0, 1] admite uma representação decimal 0, a_1, a_2, a_3 ..., onde a_1, a_2, ..., são quaisquer algarismos 0, 1, 2, ..., 9.

Admitimos que os números cuja representação decimal seja finita, tais como 0,7324, se escrevam 0,73240000..., e que essa representação é equivalente a 0,73239999...

Se os reais em [0, 1] formam um conjunto enumerável, podemos colocá-los em correspondência biunívoca com os números naturais, como se segue abaixo:

$$\begin{array}{l}
1 \leftrightarrow 0,\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ \ldots \\
2 \leftrightarrow 0,\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}\ \ldots \\
3 \leftrightarrow 0,\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{34}\ \ldots \\
\vdots \qquad\qquad \vdots
\end{array}$$

Formemos, agora, o número $b = 0, b_1, b_2, b_3, b_4 \ldots$, onde $b_1 \neq a_{11}$, $b_2 \neq a_{22}$, $b_3 \neq a_{33}$, $b_4 \neq a_{44}$, ... e onde, acima de uma certa ordem, os b não são todos iguais a 9. Um tal número, que pertence a [0, 1], é diferente de todos os números do quadro acima, não figurando, assim, no mesmo, o que contraria a hipótese de que todos os números de [0, 1] tenham sido incluídos.

Essa contradição mostra que os reais em [0, 1] não podem ser colocados em correspondência biunívoca com os números naturais, portanto, o conjunto dos reais em [0, 1] não é enumerável.

2. Conjuntos densos

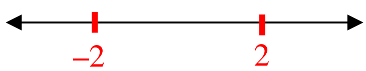
Sejam os conjuntos $A = \{x \in Z \,/\, -2 \leq x \leq 2\}$ e $B = \{x \in R \,/\, -2 \leq x < 2\}$.

Enquanto podemos enumerar os elementos do conjunto A, A = {–2, –1, 0, 1, 2}, o mesmo não ocorre para B, pois seus elementos são infinitos números reais que se situam entre o –2 e o 2.

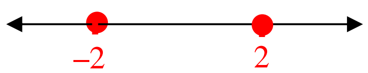
Por isso, o conjunto B é chamado ***conjunto denso.***

No entanto, é possível representar B desenhando seus elementos na reta real:

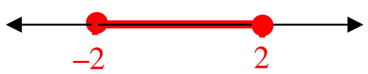
- Marcamos as extremidades do conjunto dado.



- Como –2 é elemento de B, indicamos esse ponto com uma bola cheia; como 2 não é elemento de B, indicamos com uma bola vazia



- Como x é um número maior ou igual a –2 e menor que 2, sombreamos a reta neste intervalo.



3. Distâncias e Vizinhanças

Ao número real não negativo $d(x, y) = |x - y|$ chama-se ***distância*** entre os números reais x e y. São imediatas as seguintes propriedades:

P1: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

P2: $d(x, y) = d(y, x)$ (simetria);

P3: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (desigualdade triangular).

Dado o real $\mathbf{a} \in \mathbf{R}$ e sendo $\varepsilon > 0$ ao conjunto (intervalo), chama-se uma ***vizinhança*** de a com raio ε, ao conjunto:

$$\{x \mid d(x, a) < \varepsilon\} = \{ x \mid |x - a| < \varepsilon \} =]\, a - \varepsilon , a + \varepsilon \,[\,,$$

4. Extremos

Se, para todos os números x de um conjunto C de números reais, existe um M tal que $x \leq M$, o conjunto diz-se ***limitado à direita*** ou ***limitado superiormente***, e M é uma ***cota superior*** ou ***majorante.***

Analogamente, se $x \geq m$, ou seja, $m \leq x$, o conjunto é ***limitado à esquerda*** ou ***limitado inferiormente***, e m é uma ***cota inferior*** ou ***minorante.*** Se tivermos, para todo x, $m \leq x \leq M$, o conjunto diz-se limitado.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: O conjunto dos números naturais é limitado inferiormente, mas não superiormente. Logo, não é limitado.

Exemplo 2: O conjunto dos números racionais menores do que 8 é limitado superiormente, mas não inferiormente. Logo, não é limitado.

Exemplo 3: O conjunto dos números reais $\boldsymbol{x}$ tais que $x^2 \leq 10$ é limitado, tanto à direita como à esquerda; tal conjunto é o mesmo que o intervalo fechado $\left[-\sqrt{10}, \sqrt{10}\right]$, isto é,

$$\left[-\sqrt{10}, \sqrt{10}\right] = \left\{x \in R \mid x^2 \leq 10\right\} = \left\{x \in R \mid -\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}\right\}$$

Um conjunto como este último, que é limitado à direita e à esquerda ao mesmo, é dito, simplesmente, ***conjunto limitado.*** É também limitado qualquer intervalo de extremos finitos $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.

Quando um conjunto é limitado superiormente, ele pode ter um elemento que seja o maior de todos, o qual é chamado o ***máximo*** do conjunto. Por exemplo, o conjunto dos números racionais ***x*** tais que x ≤ 10 tem 10 como seu máximo.

Exemplo 4: O conjunto A = $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ..., \frac{n}{n+1}, ...\right\}$ não tem máximo, embora seja limitado superiormente. Os elementos desse conjunto, como vemos, são frações dispostas de maneira crescente:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < ... < \frac{n}{n+1} < ...$$

Nenhuma dessas frações é maior do que todas as outras. Pelo contrário, qualquer delas é superada pela que vem logo a seguir, isto é, $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$.

4.1. Máximo e Mínimo

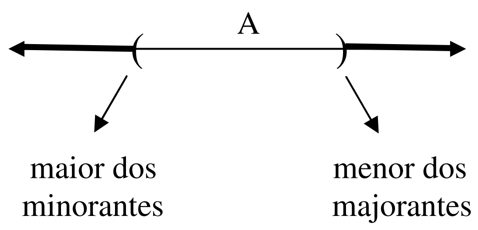
Máximo é o majorante (ou cota superior) que pertence ao conjunto.

Mínimo é o minorante (ou cota inferior) que pertence ao conjunto.

Por exemplo, o conjunto A = [1, 5[= $\{x \in R \mid 1 \leq x < 5\}$ é limitado superiormente (pelo 5 ou qualquer real maior que 5) e limitado inferiormente (pelo 1 ou qualquer real menor que 1), mas não tem ***máximo***, pois 5 é o **MENOR** dos majorantes e **não pertence** ao intervalo.

Entretanto, o conjunto A tem mínimo, pois 1 ∈ A e o 1 é o **MAIOR** dos minorantes.

4.2. Supremo e Ínfimo



Definição:

A menor ***cota superior*** de um conjunto A, quando existe, denomina-se **supremo de A** e indica-se por sup A.

A maior ***cota inferior*** de um conjunto A, quando existe, denomina-se **ínfimo de A** e indica-se por inf A.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 5: No conjunto A = [1, 5[, 5 é o supremo de A e 1 é o ínfimo de A. Temos, então:

5 = sup A e 1 = inf A

Exemplo 6: No conjunto A = {1, 2, 3}, temos:

a) 1 é o mínimo de A, 1 = min A; 3 é máximo de A, 3 = max A.

b) 3, $\frac{10}{3}$, 100 são cotas superiores de A.

c) 1, 0, $-\frac{1}{2}$ são cotas inferiores.

Exemplo 7: Seja o conjunto A = $\left\{2 + \frac{1}{n}, n \in N^*\right\}$. Verifique se:

a) A é limitado superiormente? Tem sup A? Tem máximo?

b) A é limitado inferiormente? Tem inf A? Tem mínimo?

c) É limitado?

Resolução:

a) Temos que A = {2; 2,1; 2,2; ...; 3}, portanto A =]2, 3].

É limitado superiormente pelo 3, pelo 5,2 etc. Temos que 3 = sup A = max A.

b) É limitado inferiormente pelo 2, pelo 0 etc.

Temos que 2 = inf A e não existe min A.

c) É limitado.

Exemplo 8: Seja o conjunto A = $\{x \in R / x^2 - 5x + 6 > 0\}$. Verifique se:

a) A é limitado superiormente? Tem sup A? Tem máximo?

b) A é limitado inferiormente? Tem inf A? Tem mínimo?

c) É limitado?

Resolução:

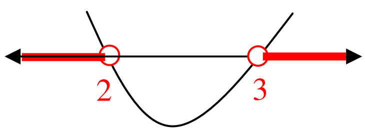
$x^2 - 5x + 6 > 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x - 2)(x - 3) = 0$

$x = 2$ e $x = 3$

$x < 2$ ou $x > 3$



A =]–∞, 2[$\cup$]3, +∞[

a) Não é limitado superiormente. Não existe sup A e nem máx. A.

b) Não é limitado inferiormente. Não existe inf A e nem min. A.

c) Não é limitado.

Exercícios

40) Seja o conjunto $A = \left\{3 - \frac{2}{n},\ n \in N^*\right\}$. Verifique se:

a) A é limitado superiormente? Tem sup A? Tem máximo?

b) A é limitado inferiormente? Tem inf A? Tem mínimo?

c) É limitado?

41) Seja o conjunto $A = \left\{2 - \frac{5}{n},\ n \in N^*\right\}$. Verifique se:

a) A é limitado superiormente? Tem sup A? Tem máximo?

b) A é limitado inferiormente? Tem inf A? Tem mínimo?

c) É limitado?

42) Seja o conjunto $A = \left\{x \in R \,/\, 2x^2 - 5x > 0 \text{ e } 1 - x \geq 0\right\}$. Verifique se:

a) A é limitado superiormente? Tem sup A? Tem máximo?

b) A é limitado inferiormente? Tem inf A? Tem mínimo?

c) É limitado?

43) Construa uma bijeção entre o conjunto N e o conjunto dos números quadrados perfeitos.

44) Construa uma bijeção entre o conjunto N e o conjunto dos números cubos perfeitos.

45) Em nossa vida, lidamos com conjuntos que têm a qualidade de serem densos. Um exemplo disso é o tempo: qual é o instante que é sucessor das 10 horas? É impossível se definir, assim como percebemos que entre dois instantes de tempo há uma infinidade de instantes. Pense em outras duas situações que envolvam conjuntos densos.

46) Classifique em verdadeira ou falsa as expressões matemáticas a seguir.

a) $N \subset Z$ b) $R - I = Q$ d) $Z \cap Q = Q$ d) $Q \cap I = Q$

47) A intersecção dos três conjuntos $R \cap C$, $(N \cap Z) \cup Q$ e $N \cup (Z \cap Q)$ é:

a) N b) $\varnothing$ c) Q d) R e) Z

5. Números algébricos e transcendentes

Chama-se ***número algébrico*** um número x que é solução da equação polinomial

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}\,x + a_n = 0$$

onde $a_0 \neq 0$, os $\mathbf{a_i}$ são inteiros e **n** é um inteiro positivo (grau da equação).

Número transcendente é aquele que não pode ser raiz de nenhuma equação polinomial de coeficientes inteiros.

Por exemplo, $\frac{2}{3}$ e $\sqrt{2}$, que são soluções de $3x - 2 = 0$ e de $x^2 - 2 = 0$, respectivamente, são números algébricos.

Os números $\boldsymbol{\pi}$ e **e** são números transcendentes. Ainda não é possível determinar se um número tal como $e\pi$ é algébrico ou não.

O conjunto dos números algébricos é infinito enumerável, mas o conjunto dos números transcendentes é infinito não-enumerável.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Prove que $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ é um número algébrico.

Resolução:

Para provar que um número algébrico, basta provar que o número é raiz de uma equação polinomial com coeficientes inteiros.

Seja $x = \sqrt{2+\sqrt{3}}$. Mediante duas quadraturas consecutivas, é possível livrar-se dos radicais. Então, temos:

$$x^2 = 2 + \sqrt{3}$$

$$x^2 - 2 = \sqrt{3}$$

$$x^4 - 4x^2 + 4 = 3$$

$$x^4 - 4x^2 + 1 = 0$$

Como se trata de uma equação polinomial com coeficientes inteiros, segue-se $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, que é solução, é um número algébrico.

Exemplo 2: Prove que $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ é um número algébrico.

Resolução:

Seja x = $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$. Então, $x - \sqrt{3} = \sqrt[3]{2}$. Elevando ao cubo e simplificando, temos:

$$x^3 - 3x^2\sqrt{3} + 3x \cdot 3 + \sqrt{3^3} = 2$$

$$x^3 - 3x^2\sqrt{3} + 9x + 3\sqrt{3} = 2$$

Reorganizando, temos:

$$x^3 + 9x - 2 = 3x^2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$$

$$x^3 + 9x - 2 = 3\sqrt{3}\,(x^2 + 1)$$

Elevando ambos os membros ao quadrado e simplificando, temos:

$$x^6 + 81x^2 + 4 + 18x^4 - 4x^3 - 18x = 9 \cdot 3\,(x^4 + 2x^2 + 1)$$

$$x^6 + 18x^4 - 4x^3 + 81x^2 - 18x + 4 = 27\,(x^4 + 2x^2 + 1)$$

$$x^6 + 18x^4 - 4x^3 + 81x^2 - 18x + 4 = 27x^4 + 54x^2 + 27$$

$$x^6 + 18x^4 - 4x^3 + 81x^2 - 18x + 4 - 27x^4 - 54x^2 - 27 = 0$$

$$x^6 - 9x^4 - 4x^3 + 27x^2 - 18x - 23 = 0$$

Como se trata de uma equação polinomial com coeficientes inteiros, segue-se $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$, que é solução, é um número algébrico.

Exercícios

48) Prove que os números abaixo são algébricos:

a) $\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

b) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$

49) Prove que $-1 + i\sqrt{3}$ é um número algébrico.

50) Mostre que o número $\sqrt{5 - 3\sqrt{1 + \sqrt{2}}}$ é algébrico.

51) Demonstre que $\sqrt{2}$ é um número algébrico de grau 2.

52) Demonstre que $\sqrt[3]{3}$ é um número algébrico de grau 3.

53) Mostre que $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$.

54) Mostrar que existem **a** e **b** racionais tais que $\sqrt{18 - 8\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$.

55) Se todo número racional pode ser escrito como uma dízima periódica, será sempre possível representar um racional como uma soma de infinitas frações. Por exemplo, no caso dos racionais $\frac{4}{5}$ e $\frac{7}{6}$, essas somas seriam:

$$\frac{4}{5} = 0{,}8 = 0{,}7999... = \frac{7}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + ...$$
$$\frac{7}{6} = 1{,}1666... = 1 + \frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} + ...$$

Usando essa mesma ideia, escreva as frações a seguir como soma de infinitas frações:

a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{7}{3}$ c) $\frac{7}{5}$ d) $\frac{10}{9}$

56) Prove que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ é irracional.

57) Determine, caso existam, o máximo, mínimo, supremo e ínfimo.

a) $A = \{x \in R \,/\, -3 \leq x \leq 4\}$

b) $A = \{x \in R \,/\, -3 < x < 4\}$

c) $A = \{x \in R \,/\, x < 5\}$

d) $A = \{x \in R \,/\, x \geq 2\}$

e) $A = \left\{x \in R \,/\, |3x - 1| > 1\right\}$

f) $A = \{-3, -1, 0, 2, 1\}$

g) $A = \left\{\frac{n}{n+1} \,/\, n \in N\right\}$

58) Em relação ao exercício 58, quais conjuntos são limitados superiormente e quais são limitados inferiormente?

59) $A = \left\{\frac{x^2}{1 + x^2} \,/\, x \in R\right\}$ é limitado superiormente? Por quê?

Respostas

Capítulo II
Construção dos Números Reais

3a) V c) F e) V g) F

b) F d) V f) V

4a) V b) V c) V d) F, será verdadeira somente se $p > 1$

5a) Se definirmos a/b como o número (se existir) tal que bx = a, então 0/0 é o número x tal que 0x = 0. Mas, como isso é verdade para todos os números, vemos que não existe um número único representado por 0/0, expressão que consideramos, por isso, indeterminada.

b) Como em (a), se definirmos 1/0 como o número x (se existir) tal que 0x = 1, concluiremos que tal número não existe. Assim, a divisão por zero não tem sentido.

6) Sim. Basta n assumir valores que sejam cubos perfeitos. Exemplos: 8, –27, $-\frac{1}{8}$.

7) Não é racional. Para um número do tipo $\frac{a}{b}$ ser racional, devemos ter a e b números inteiros (com $b \neq 0$). Neste caso, 2 é inteiro, mas $1 + \sqrt{5}$ não é inteiro.

11a) V b) F c) V d) V e) F f) F

12) Resposta pessoal

13a) $\frac{49}{12}$ c) $\frac{25}{22}$ e) $\frac{9}{10}$ g) $\frac{160}{473}$

b) $\frac{452}{81}$ d) $\frac{1}{15}$ f) $-\frac{7}{90}$

14) Aluno A: Correto. O aluno escreveu as frações em notação decimal e, depois, efetuou a adição.

Aluno B: Correto. Esse aluno trocou as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{5}$ por frações equivalentes de mesmo denominador (10) e, depois, efetuou a adição.

Aluno C: Errado. Aqui o aluno adicionou os numeradores das parcelas e os denominadores das parcelas, encontrando, assim, erroneamente o numerador e o denominador do total.

Aluno D: Correto. O aluno substituiu as duas frações por outras equivalentes com o mesmo denominador 10 e adicionou os numeradores.

15a) $\frac{5}{33}$
b) $\frac{416}{999}$
c) $\frac{19}{9}$
d) $\frac{2000}{99}$
e) $\frac{268}{33}$
f) $\frac{7}{45}$
g) $\frac{52}{45}$
h) $-\frac{1997}{990}$
i) $\frac{1807}{900}$
j) $\frac{9007}{90}$
l) $\frac{269}{66}$

16) Alternativa B

17) Alternativa B

18) O resto acabou de repetir: deu 2 pela segunda vez. Agora, o quociente vai se repetir também, originando uma dízima periódica. O quociente é $1,\overline{285714}$.

19a) V b) F c) F d) F e) V

20a) V b) V c) F d) V e) F f) V

25) Resposta: A resolução deste exercício utiliza o mesmo raciocínio do texto de $\sqrt{2}$. Se $\sqrt{p}$ fosse racional, teríamos $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$, com m e n primos entre si. Então, $p = \frac{m^2}{n^2}$, donde $m^2 = pn^2$. Isso mostra que m^2 é divisível por p; logo, m também é divisível por p, ou seja, m = rp, com r inteiro. Daqui e de $m^2 = pn^2$ segue-se $r^2p^2 = pn^2$, donde $n^2 = pr^2$, significando que n também é divisível por p. Mas isto é absurdo, senão m e n seriam ambos divisíveis por p e $\frac{m}{n}$ não seria uma fração irredutível. O absurdo a que chegamos é consequência da hipótese inicial de que $\sqrt{p}$ fosse racional. Somos assim forçados a afastar esta hipótese e concluir que $\sqrt{p}$ é irracional.

26a) falso
b) falso
c) verdadeiro
d) falso
e) falso
f) falso
g) verdadeiro
h) falso
i) falso
j) falso

29) $\frac{19}{20}$, 1, $1,\overline{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$

30) $\frac{21}{20}$; 1; $0,\overline{8}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt{5}}{5}$

31) Alternativa C

32a) F b) V c) F d) F e) F f) F

33a) V b) F c) V d) V e) V

35) Somente a alternativa c é correta.

36) Somente a alternativa c é correta.

37) Resposta pessoal

40a) A = [1, 3[. É limitado superiormente pelo 3, pelo 7,5 etc.
3 = sup A e não existe max. A.

b) É limitado inferiormente pelo 1, pelo 0 etc.
1 = inf. A = min. A.

c) É limitado

41a) A = [–3, 2[. É limitado superiormente pelo 2, pelo π, pelo 7,5 etc.
2 = sup A e não existe max. A.

b) É limitado inferiormente pelo –3, pelo $-\pi$, etc.
–3 = inf. A = min. A.

c) É limitado

42a) A =] –∞, 0[. É limitado superiormente pelo 0, pelo π, etc.
0 = sup A e não existe max. A.

b) Não é limitado inferiormente.

c) Não é limitado.

43) $n \mapsto n^2$

44) $n \mapsto n^3$

45) Resposta pessoal

46a) Verdadeira b) Verdadeira c) Falsa d) Falsa

47) Alternativa e

54) a = 4 e b = –1

55a) $\frac{3}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{4}{10^4} + ...$

b) $2 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + ...$

c) $1 + \frac{3}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + ...$

d) $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + ...$

57a) –3 = min A = sup A e 4 = max A = sup A

b) 4 = sup A e –3 = inf A

c) 5 = sup A

d) 2 = min A = inf A

e) Não existe nenhum item

f) –3 = min A = inf A e 1 = max A = sup A

g) 0 = min A = inf A

58a) É limitado superiormente e inferiormente

b) É limitado superiormente e inferiormente

c) É limitado superiormente

d) É limitado inferiormente

e) Não é limitado superiormente e nem inferiormente

f) É limitado inferiormente

g) É limitado inferiormente

59) Não, é limitado inferiormente. Neste conjunto 0 é o menor de todos os elementos.

Bibliografia

AVILA, G. **Análise Matemática para licenciatura.** 3 ed. São Paulo: Blucher, 2006.

DANTE, L. R. **Matemática: Conceitos & Aplicações.** 3 ed. São Paulo: Ática, 2004.

GUIDORIZZI, H. L. **Curso de Cálculo**. vol. 2. Rio de Janeiro: 2001

FERREIRA, J. **A construção dos números.** 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

FIGUEREIDO, D. G. **Números Irracionais e Transcendentes.** 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

HOFFMANN, L. D.; BRADLEY, G. L. **Cálculo: um curso moderno e suas aplicações.** Rio de Janeiro, LTC, 2002

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. vol. I. São Paulo: IMPA, 2001

LOUREIRO, C.; PERES, E. e GARCIA, M. **A Contribuição da Análise Matemática na Formação de Professores.**

NAME, M. A. **Tempo de Matemática.** s.e. São Paulo: Editora do Brasil, 1996.

SPIEGEL, M. R. **Cálculo Avançado.** 3 ed. São Paulo: McGraw Hill, 1974.

THOMAS, G. B. **Cálculo**. vol. I São Paulo, Pearson, 2005.