Matemática e Arte: Perspectiva, um passeio histórico, artístico e teórico através da Geometria Dinâmica.

Leo Akio Yokoyama, PhD.

CAp/UFRJ

leo.akio@ufrj.br

RESUMO

Neste trabalho são apresentados os princípios básicos da Geometria Projetiva, utilizados para a construção da Perspectiva dentro das Artes. Fazemos uma retrospectiva histórica a respeito do desenvolvimento das noções de perspectiva nas Artes destacando o aparecimento dos primeiros usos de conceitos geométricos de ponto de fuga (ponto do infinito) e plano de terra. Começamos desde as pinturas pré-históricas, passando pelo Renascimento, Barroco, Surrealismo até os dias de hoje. O uso dos conceitos de Geometria Projetiva deve-se ao desejo dos artistas renascentistas em reproduzir em seus quadros o retrato fiel de uma cena ou paisagem. Para isso, buscaram entender um pouco da geometria que estava por trás destas, observadas de um certo ponto de vista promovendo o surgimento da Perspectiva.

Faremos atividades utilizando desenhos no papel e simulações no computador com um software de Geometria Dinâmica. Este trabalho interdisciplinar por natureza, procura mostrar a ligação da Matemática com a Arte usando as novas tecnologias, incentivando e motivando os participantes a explorarem esses dois maravilhosos assuntos: Matemática e Arte.

Palavras-chave: perspectiva, pinturas, geometria projetiva, geometria Dinâmica.

INTRODUÇÃO

Geralmente o ensino de Geometria é colocado meio de lado, ou melhor, é colocado sempre no final do ano e quase sempre não se tem tempo para os alunos se aprofundarem mais nos assuntos geométricos. A Educação Matemática atual necessita de atividades novas para incentivar os alunos e os professores aprender mais a Geometria.

O estudo da Geometria Projetiva parece proporcionar isso, pois tem a possibilidade de unir Matemática e Arte.

A Geometria Projetiva foi desenvolvida a partir dos estudos de pintores renascentistas

HISTÓRIA DA GEOMETRIA PROJETIVA E DA PERSPECTIVA

A Perspectiva começa a dar seus primeiros passos com o desejo dos pintores renascentistas de colocar em suas telas, da maneira mais fiel possível, seus objetos de pintura. Esse movimento começa quase simultaneamente na Itália e na Alemanha.

O termo Renascimento é comumente aplicado à civilização européia que se desenvolveu entre 1300 e 1650. Os pintores do Renascimento buscaram a representação da realidade. Os pintores florentinos do início do século XV, queriam fazer da pintura uma ciência derivada da **geometria euclideana** por influência dos círculos intelectuais neo-platônicos da alta burguesia. Buscavam um método científico de representação da realidade baseado em leis matemáticas: **a perspectiva geométrica ou linear.** Esta é uma das principais características da pintura renascentista, a construção racional do espaço, mediante leis objetivas que se baseiam na teoria da perspectiva linear. Se cria assim, de forma artificial, um espaço pictórico tridimensional, no qual se situam os objetos de forma rigorosa segundo uma ordem marcado pela proporção e que se mostra ante o espectador como se o quadro fosse uma janela aberta.

Filippo Di Ser Brunellesco (1377-1446). Arquiteto florentino. Utilizou pela primeira vez princípios geométricos e matemáticos para o estabelecimento de leis da percepção visual na perspectiva. Um dos célebres arquitetos da Renascença que se dedicou aos estudos matemáticos da perspectiva linear. Brunellescho desenvolveu os seus estudos sobre a perspectiva com o objetivo de aplicação aos planos arquitetônicos. Os seus esforços são visíveis no plano da Igreja do Espírito Santo.

Leon Battista Alberti foi o primeiro a expor formalmente as idéias matemáticas que estavam por trás da perspectiva. Apesar de ser mais conhecido pela sua obra arquitetônica, é freqüentemente considerado como o autor das primeiras formulações sobre as leis da perspectiva. Em sua obra *Della pictura* (1435), escreveu o primeiro tratado formal de uma nova técnica para representar um piso (fig.2a e fig.2b).

Observando as figuras abaixo temos que os pontos F, G, H, I, J, K são projeções dos pontos f, g, h, i, j, k.

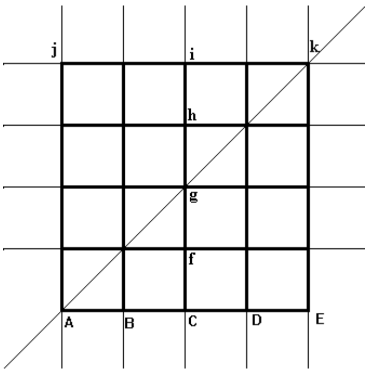


fig. 2a

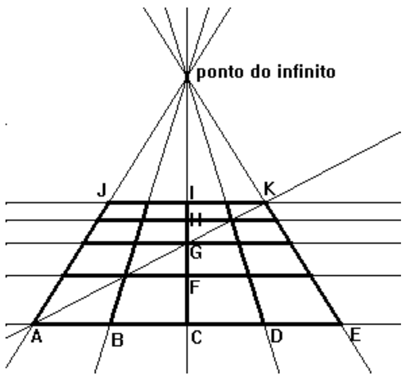
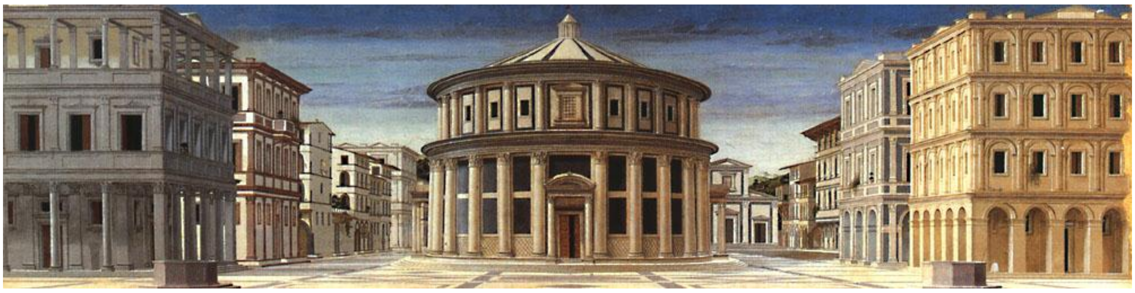


fig. 2b

Ele já havia percebido que retas paralelas podem ser vistas como retas concorrentes que se cruzam na linha do horizonte. Os ensinamentos de Alberti viriam a influenciar Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer e Piero della Francesca. De fato, as suas idéias conduziriam à perfeição geométrica de *Flagelação de Cristo,* de Piero della Francesca.

Piero della Francesca (1410?-1492). Pintor italiano de afrescos, em *De prospectiva pingendi* (cerca de 1478), estudou o problema mais complicado de representar, sobre o plano da pintura, objetos em três dimensões observados de um ponto de vista dado. Foi o primeiro a tentar aplicar de maneira sistemática a perspectiva geométrica na pintura. Piero foi um geômetra, como seu discípulo LUCA PACIOLI. No seu trabalho faz uma elaboração rigorosa e científica da perspectiva, "que se tornaria o 'método' da cultura plástica ocidental até ao cubismo e as outras vanguardas".

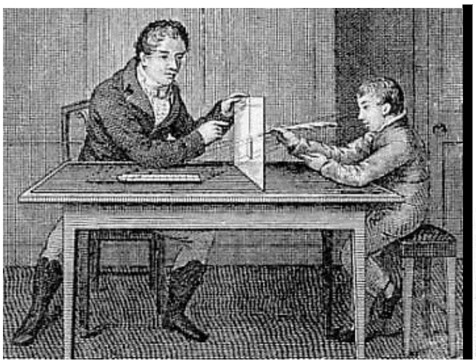
Defende a construção do espaço segundo linhas que se dispõem: paralelamente à base do quadro; na sua perpendicular; e as terceiras convergentes para o ponto de fuga. Para este pintor, a perspectiva é harmonia, *"é o produto de uma racionalidade superior e divina que sanciona o acordo perfeito entre o homem e a natureza."*

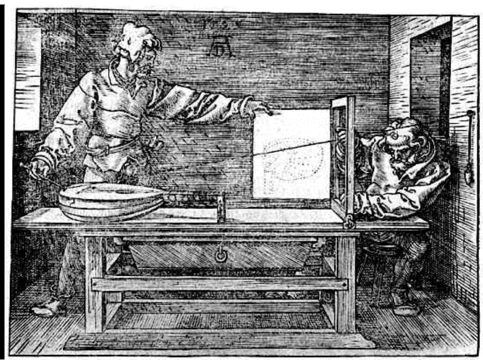


Cidade Ideal – Piero della Francesca.

A imagem feita por um pintor pode ser vista como uma projeção do original na tela, com o centro de projeção no olho do pintor, como faziam os primeiros artistas preocupados com a perspectiva.

Podemos ver nos quadros abaixo as primeiras tentativas de se pintar exatamente aquilo que se observava. Estas "engenhocas" são conhecidas como as máquinas de Dürer.





A relação entre arte e matemática era também forte na obra de Leonardo da Vinci. Escreveu uma obra, agora perdida, sobre Perspectiva; seu *Trattado della pittura* começa com a advertência: *"Que ninguém que não seja matemático leia minhas obras"*.

Albrecht Dürer (1471-1528). Pintor alemão, um contemporâneo de Leonardo, era considerado o melhor matemático dentre todos os artistas renascentistas. Seus livros mais importantes são: "Investigação sobre a medida com círculos e retas de figuras planas e sólidas" e *"Institutiones Geométricas"*. Chega à Itália para aprender com os mestres italianos. Segue as pegadas de Piero e se vale de suas regras, preocupando-se em melhorar o uso das projeções vertical e horizontal das figuras por ele aplicadas na construção das diversas seções do cone reto e para representar as seções da cabeça e do corpo humano.

Infelizmente os matemáticos da época de Dürer não deram valor a essa ligação entre a matemática e a arte. Esse tipo de estudo foi esquecido por mais de um século.

Na época de Descartes e Fermat, eram os estudos da Geometria Analítica e do Cálculo Infinitesimal que estavam "em alta". Com isso a Geometria Pura foi deixada um pouco de lado.

Surge então a figura de **Girard Desargues**, arquiteto e engenheiro militar francês que nasceu em Lyons em 1591 e morreu na mesma cidade em 1662. Ele se interessou muito pela obra de Apolônio intitulada *As Cônicas*, e com isso começa a desenvolver uma nova fase da Geometria.

Seu ponto de vista pouco ortodoxo sobre o papel da Perspectiva na Arquitetura e Geometria encontrou pouca simpatia, e ele voltou a Lyons para trabalhar em seu novo tipo de matemática quase sozinho. Surgiu em 1639, um dos grandes livros menos bem sucedidos de todos os tempos. O título revela talvez um autor inseguro ou então muito modesto - *Brouillon projet d'une atteinte aux événements dês recontres d'un cone avec un plan*. Isso pode ser traduzido como *"Esboço tosco de uma tentativa de tratar o resultado de um encontro entre um cone e um plano"*.

Existem diversas razões para explicar a rejeição inicial por parte dos matemáticos da época à obra de Desargues. Ela ficou ofuscada pela Geometria Analítica introduzida dois anos antes por Descartes. Com isso os geômetras estavam preocupados em desenvolver esta nova e poderosa ferramenta, e tentando aplicar os infinitésimos a ela. Além disso, Desargues adotou um infeliz e excêntrico estilo de escrever. Ele introduziu cerca de setenta novos termos, muitos provenientes da Botânica. Por exemplo, quando através de vários pontos de uma reta l passam várias outras retas l é chamada de *tronco*. Os pontos no tronco, através dos quais passam outras retas, são chamados de *nós*. Qualquer outra reta que passa através dos nós é chamada de *galho* em relação ao tronco. *Árvore* é uma reta com três pares de pontos de uma involução.. O único termo que sobreviveu foi involução.

Uma hipótese para essa nova linguagem de Desargues sugere que tudo tenha derivado do termo "árvore" usado pelos engenheiros para descrever um eixo. Então seu vocabulário não convencional viria de seus conhecimentos como engenheiro.

Mas a idéia em que se baseia a obra de Desargues é a essência da simplicidade - derivada da Perspectiva na arte da Renascença e do *Princípio da Continuidade* de Kepler.

Sabemos que um círculo olhado obliquamente, aparece como uma elipse, ou que o contorno da sombra de um quebra-luz será um círculo ou uma hipérbole conforme esteja projetada no teto ou numa parede. As formas e tamanhos mudam conforme o plano de incidência que corta o cone de raios visuais ou raios de luz; mas certas propriedades permanecem as mesmas em todas essas mudanças, e foram essas propriedades que Desargues estudou. Primeiro, uma seção cônica continua sendo uma seção cônica, não importa quantas vezes é projetada. As cônicas continuam sendo uma única família de parentes próximos, como Kepler sugerira por razões um tanto diferentes. Mas ao aceitar esse ponto de vista, Desargues tinha que supor, como Kepler, que a parábola tem um foco "no infinito" e que retas paralelas se encontram "num ponto no infinito". Kepler (no seu *Paralipomena in Vitellionem*, 1604) declarou que uma parábola tem dois focos, um deles está infinitamente distante do outro, e que qualquer ponto na curva é "ligado" a este "foco cego" por uma reta paralela ao eixo. Desargues (no seu *Brouillon project* ..., 1639) declarou que retas paralela *"sont entre elles d'une mesme ordonnance dont le but est à distance infinie."* Isto é, retas paralelas têm um ponto final em comum numa distância infinita. E de novo, *"Quand en un plan, aucun des points d'une droit n'y est à distance finie, cette droit y est à distance infinie".* (Quando nenhum ponto de uma reta está numa distância finita, a reta toda está numa distância infinita). Assim se poderia dizer que duas retas sempre se cruzam - seja num ponto ordinário, seja num ponto no infinito (no caso de paralelas), também chamado de ponto ideal.

A Teoria da Perspectiva torna plausíveis essas idéias, pois a luz do Sol é ordinariamente considerada como formada de raios paralelos – formando um cilindro ou feixe de raios paralelos – ao passo que os raios de uma fonte de luz terrestre são tratados como um cone ou feixe de um ponto. O cilindro é simplesmente um cone com vértice no infinito, e um feixe de retas paralelas é simplesmente uma família de retas que passam todas pelo mesmo ponto no infinito. De modo semelhante Desargues estudou um feixe de planos por um ponto.

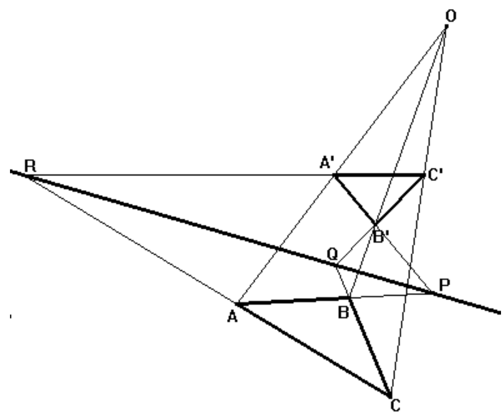
Seu trabalho sobre seções cônicas foi a contribuição mais original para a Geometria Pura no século XVII.

A grande vantagem da Geometria Projetiva sobre a Geometria de Apolônio, Descartes e Fermat é a generalização. Muitos casos especiais se juntam num enunciado geral. No entanto os matemáticos da época não aceitaram os métodos da nova geometria e se opuseram ativamente a eles, considerando-os perigosos e mal fundamentados. Eram tão raros os exemplares do *Brouillon projet* de Desargues que pelo fim do século todos haviam desaparecido, pois Desargues publicava suas obras não para vendê-las mas para dá-las aos amigos. A obra ficou completamente perdida até que em 1847 uma cópia à mão feita por Philippe de Lahire, um dos poucos admiradores de Desargues, foi encontrada numa biblioteca em Paris. Descartes, que conhecera Desargues em paris em 1626, sempre teve alta estima por seu amigo. Mas até Descartes quando ouviu dizer que o *Brouillon projet* trataria de seções cônicas sem usar álgebra ficou desanimado. Não parecia possível dizer algo sobre cônicas que não fosse mais fácil de se exprimir com álgebra.

Uma das idéias mais importantes de Desargues é justamente de ponto ideal ou ponto do infinito. Não estamos realmente trabalhando em Geometria Projetiva até que estejamos preparados para esquecer o *status* inferior de tais pontos extras e admiti-los dentro da "comunidade" como verdadeiros membros tendo os mesmos privilégios dos pontos ordinários. Esta emancipação foi feita pelo, K. G. C. von Staudt (1798-1867). O último vestígio de dependência da Geometria ordinária foi removida em 1871, com Felix Kelin munido de fundamentos algébricos para Geometria Projetiva em termos de "coordenadas homogêneas", que foram descobertas independentemente por K. W. Feuerbach e A. F. Möbius em 1827. Esse foi mais um dos motivos pelos quais a obra de Desargues não cativou os matemáticos da época: a dificuldade de se trabalhar com pontos do infinito, pois estavam acostumados com retas paralelas (aquelas que não têm nenhum ponto em comum.

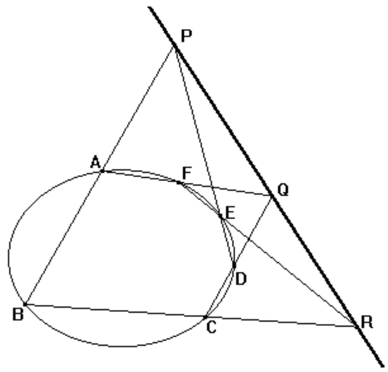
O prestígio da Álgebra era tal que por quase dois séculos a beleza da Geometria Projetiva passou despercebida. Mesmo hoje o nome de Desargues é familiar não por ser o autor de *Brouillon projet* mas por uma proposição que não aparece no livro, o famoso teorema de Desargues:

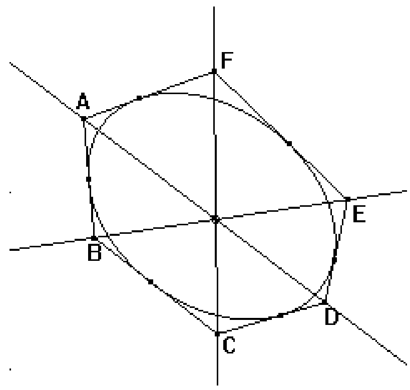
"Se dois triângulos estão colocados de tal maneira que as retas que unem os pares de vértices correspondentes (AA', BB', CC') são concorrentes em um ponto O, então os pontos de interseção (P, Q, R) de pares de lados correspondentes (AB e A'B', etc) são colineares, e reciprocamente."



Desargues foi o profeta da Geometria Projetiva. Esta nova geometria ficou adormecida até o começo do século XIX, quando homens como Gergonne, Poncelet, Brianchon, Dupin, Chasles, e Steiner obtiveram grandes avanços nessa área.

Dentre todos os ramos da matemática, a Geometria tem sido o mais sujeito a mudanças de gosto, de uma época para outra. Através dos esforços de **Monge** e **Carnot** houve alguns sintomas de reavivamento da Geometria Pura durante o período da Revolução Francesa, mas a redescoberta quase explosiva da Geometria como um ramo vivo da matemática veio principalmente no início do século dezenove. A École Polytechnique teve um papel nesse movimento, pois ali foi descoberto por um estudante o bem conhecido teorema de Brianchon, que foi publicado em 1806 no Journal de I'École Polytechnique. **Charles Julien Brianchon** (1758-1864) tinha entrado na escola um ano antes apenas, quando estudou com Monge e leu a *Géométrie de position* de Carnot. O estudante de vinte e um anos, mais tarde oficial da artilharia e professor, primeiro retomou o teorema de **Pascal**, há muito esquecido, e exprimiu em forma moderna: *"em todo hexágono inscrito numa seção cônica, os três pontos de interseção dos lados opostos sempre estão sobre uma reta."* Continuando com mais algumas demonstrações chegou à que tem seu nome: *"em todo hexágono circunscrito a uma seção cônica as três diagonais se cortam num mesmo ponto".*





A determinação de um ponto por duas retas, sutilmente se compara com a determinação de uma reta por dois pontos. Mais genericamente, veremos que toda afirmação sobre pontos e retas (no plano) pode ser feita por uma afirmação *dual* sobre retas e pontos. A possibilidade de se fazer isto é conhecido como o *"princípio da dualidade".*

O Princípio da Dualidade no plano afirma que toda definição continua tendo sentido e todo teorema permanece verdadeiro, quando trocamos as palavras *ponto* e *reta* e conseqüentemente outros certos pares de palavras tais como *colinear* e *concorrente*, *vértice* e *lado*, etc.

Os teoremas de Pascal e Brianchon são, na verdade, fundamentais no estudo projetivo das cônicas. Formam, além disso, o primeiro exemplo claro de um par de teoremas "duais" significativos na Geometria. Outro exemplo:

Dadas duas *retas* distintas, existe um único *ponto* que *pertence* a ambas.

Dados dois *pontos* distintos, existe uma única *reta* que os *contêm.*

Ainda mais simples é o dual do triângulo (consistindo de vértices e lados) que é o próprio triângulo (consistindo de lados e vértices); então o triângulo é dito uma figura *auto-dual.*

A existência de pontos do infinito é que permite a existência deste postulado e seu dual.

Poncelet reivindicou este princípio como descoberta sua, mas a natureza deste princípio foi mais claramente entendida por outro matemático, **Julius Plücker** (1801-1868). Dualidade dá à Geometria Projetiva um charme peculiar, fazendo-a mais sintética do que a Geometria ordinária (Euclideana).

Uma das mais atraentes características da Geometria Projetiva é a simetria e a economia que existe em torno do Princípio da Dualidade, como mostram os exemplos acima.

Tais relações entre pontos e retas sobre cônicas foram mais tarde exploradas eficazmente por outro graduado da École Polytechnique, o homem que se tornou o verdadeiro fundador da Geometria Projetiva. **Jean Victor Poncelet** (1788-1867), estudou também com Monge, entrou no corpo de engenheiros do exército bem a tempo para tomar parte na malfadada campanha de Napoleão na Rússia em 1812, e passou vários anos numa prisão em Moscou. Foi aí que se iniciou seu grande trabalho.

Durante os anos de 1813-1814, em condições precárias numa prisão militar russa em Saratow, Poncelet compusera um tratado de Geometria Analítica, *Aplications d'analyse et de geométrie*}. Essa obra, porém, só foi publicada cerca de meio século depois (2 volumes, 1862-

1864), apesar de originalmente, na intenção do autor, ter servido de introdução ao seu muito mais célebre *Traité des proprietés des figures* de 1822. Essa última obra diferia muito da primeira pois tinha forma sintética em vez de analítica, e com ela iniciou-se o chamado “grande período” na história da Geometria Projetiva.

Em 1829 a justificativa lógica do Princípio da Dualidade foi solidamente estabelecida por **Julius Plücker** (1801-1868) através de um novo e importante ponto de vista na Geometria Analítica. Plücker tornou-se o primeiro especialista moderno em Geometria Analítica. Redescobriu um novo sistema de coordenadas que já tinha sido inventado independentemente três vezes. Era o que chamamos coordenadas homogêneas. Um dos descobridores foi **A. F. Möbius** (1790-1860).

As linhas de raciocínio dos inventores diferiam, mas todos tinham algo em comum - usavam três coordenadas em vez de duas para determinar um ponto no plano.

Finalmente se tinha conseguido ligar os elementos infinitos de Kepler, Desargues e Poncelet a um sistema de coordenadas de números ordinários. Esse novo sistema de coordenadas é o ideal para o estudo da Geometria Projetiva, que até então fora estudado quase exclusivamente do ponto de vista da Geometria Pura.

Plücker havia descoberto o correspondente analítico do princípio geométrico de dualidade, a respeito do qual Gergonne e Poncelet haviam brigado; ficou claro agora que a justificação que a Geometria Pura havia buscado em vão era aqui fornecida pelo ponto de vista algébrico.

Um dos problemas que Poncelet atacou foi o estudo das propriedades gráficas das figuras, que ele define como aquelas que não envolvem tamanho de segmentos ou de ângulos. A distância de dois pontos não é invariante projetivamente, mas procurando configurações invariantes projetivamente ele encontrou a relação harmônica e com isso desenvolveu o comprimento na Geometria Projetiva.

O tratamento algébrico para essa configuração harmônica é chamado razão dupla ou cruzada, que foi a grande contribuição de Chasles para a Geometria Projetiva. **Michael Chasles** (1793-1880) foi também um excelente geômetra sintético. Ele tornou-se professor de Geometria e Matemática na École Polytechnique em 1841. Mostrou como trabalhar Geometria Métrica no contexto projetivo e também como obter a Geometria não-Euclideana, através de uma cônica invariante por uma projeção no plano. No final do século XIX e começo do século XX foi mostrado que adicionando e alterando postulados gradualmente, pode-se passar da Geometria Projetiva para a Euclideana, encontrando outras importantes geometrias pelo caminho, como a Geometria não-Euclideana e a Afim.

Muitas das idéias de Poncelet foram aperfeiçoadas pelo geômetra suíço **Jacob Steiner**, um dos maiores geômetras sintéticos que o mundo conheceu. Steiner nasceu em Utzensdorf em 1796 e não aprendeu a escrever até seus 14 anos. Aos 17 tornou-se um pupilo de Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827), o famoso educador suíço, que estimulou no garoto o amor pela matemática.

Alguns historiadores descrevem Steiner como “o maior geômetra desde a época de Apolônio”. Ele tinha um incrível poder de tratamento sintético da Geometria. Contribuiu enormemente para o desenvolvimento da Geometria Projetiva escrevendo numerosos tratados do mais alto nível.

Outro grande geômetra, a quem se deve grande parte da estruturação da Geometria Projetiva Sintética, foi Von Staudt. Ele marca também o final de um grande período na história da Geometria Projetiva.

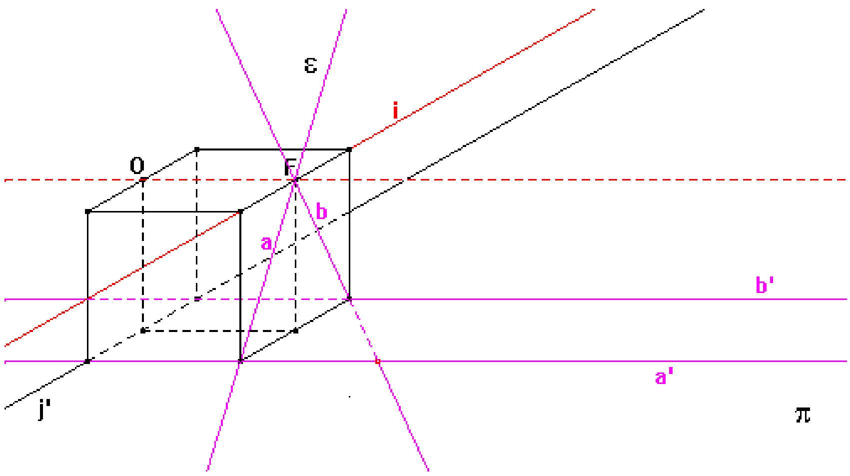
Há claramente um corte no desenvolvimento do método geométrico; o trabalho de geômetras subseqüentes consistiu sobretudo em aperfeiçoamento. Por 15 anos os seguidores deste ramo da matemática foram numerosos e dedicados. Progressos existiram, entretanto, se mantiveram mais concentrados no surgimento de aplicações dos métodos já descobertos do que na descoberta de métodos novos.

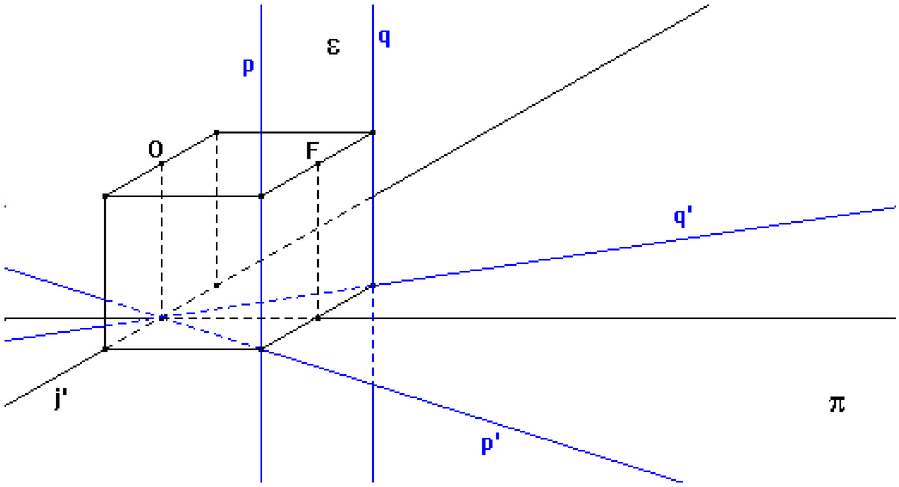
IDÉIAS INTUITIVAS

Considere um ponto de projeção *O*. Podemos pensar nele como se fosse uma fonte luminosa pontual. Considere o plano ε, euclideano, e outro plano π qualquer no espaço. A Geometria Projetiva estuda o que acontece no plano π quando projetamos nele o plano ε, através de *O*. Chamaremos essa transformação de *T*. Quais as semelhanças e as diferenças dos dois planos? Quais as propriedades geométricas que se alteram? E as que não sofrem mudanças? Quais são as regras dessa transformação *T*?

Pensando intuitivamente percebemos que um ponto e uma reta em ε continuam sendo um ponto e uma reta em π. Se o ponto *A* está na reta *a* no plano ε, o ponto projetado *A'* (de *A*) estará na reta projetada *a'* (de *a*) no plano π. Se *A* estivesse em uma curva qualquer, pela projeção, *A'* continuaria na curva projetada em π. Ou seja, a **incidência se preserva.** O que já não acontece com o tamanho de segmentos e de ângulos.

Retas paralelas em ε nem sempre continuam paralelas em π. E retas concorrentes em ε podem se tornar retas paralelas em π, como mostram as figuras abaixo:





Sejam dois planos perpendiculares ε e π e um ponto *O* fora deles.

As duas retas *p* e *q* que eram paralelas em ε pela transformação *T* tornam-se duas retas concorrentes *p'* e *q'* em π. Já as retas *a* e *b* concorrentes em ε tornam-se paralelas em π.

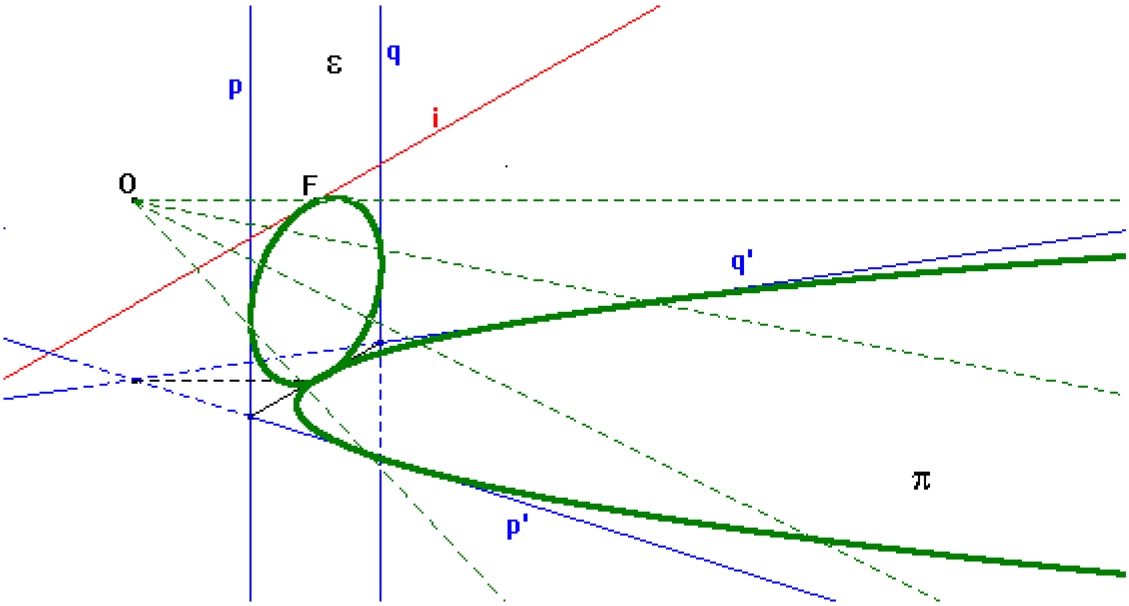
Outra observação interessante é que a reta *i* em ε não é projetada em nenhuma reta do plano π. Podemos pensar como se ela fosse para o infinito (em relação ao plano π pela projeção *T*). Por outro lado, nenhuma reta do plano ε vai parar na reta ordinária *j'* (em π), assim como a reta *i'* vai para o infinito do plano π. Podemos pensar também que existe uma reta (do infinito) do plano ε que é projetada em *j'*. Para entendermos melhor esta última projeção, considere pares de retas paralelas em todas as direções em ε. Quando projetadas em π, o conjunto dos pontos de interseção dessas retas forma a reta *j'*. Na prática *j'* é a interseção do plano π com o plano paralelo ao plano ε que passa por *O*.

Juntando estas idéias podemos concluir que retas paralelas, quando são projetadas em outros planos, podem deixar de ser paralelas. E retas concorrentes podem vir a se tornar paralelas por uma projeção. Com isso, podemos considerar a existência de um ponto de interseção entre quaisquer duas retas.

Então podemos pensar que **duas retas distintas, quaisquer, se interceptam em um ponto** (ordinário ou ideal).

A projeção da circunferência é um caso interessante.

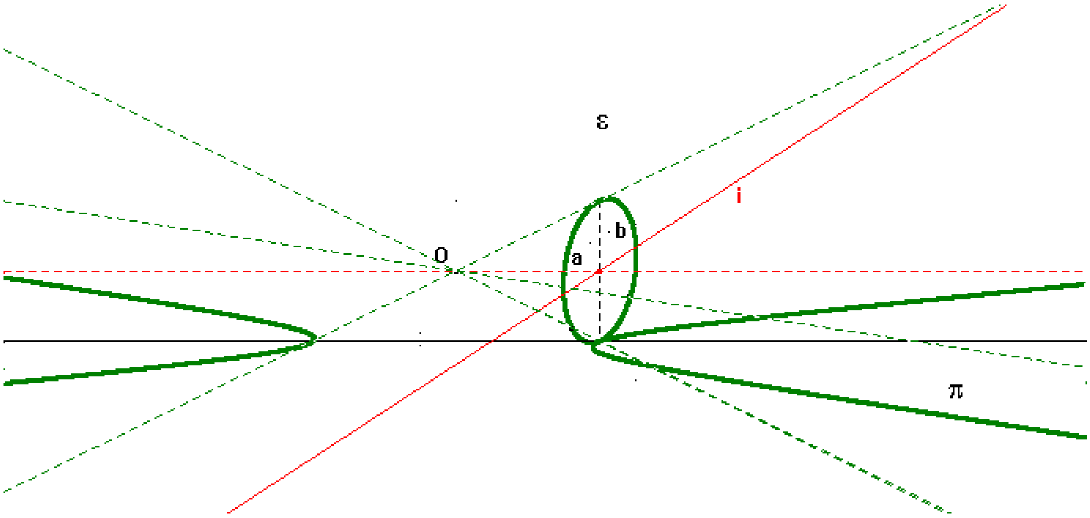
Considerando a figura a seguir, a reta *i* em ε é tangente à circunferência *C* no ponto *F*, e pela projeção, do ponto *O* para o plano π, *F* iria para o infinito em π. Mas em π a circunferência se transforma em uma parábola *k*. Pois podemos imaginar ainda um cone de vértice *O* onde a seção dele com o plano ε é uma circunferência e com o plano π é uma parábola.

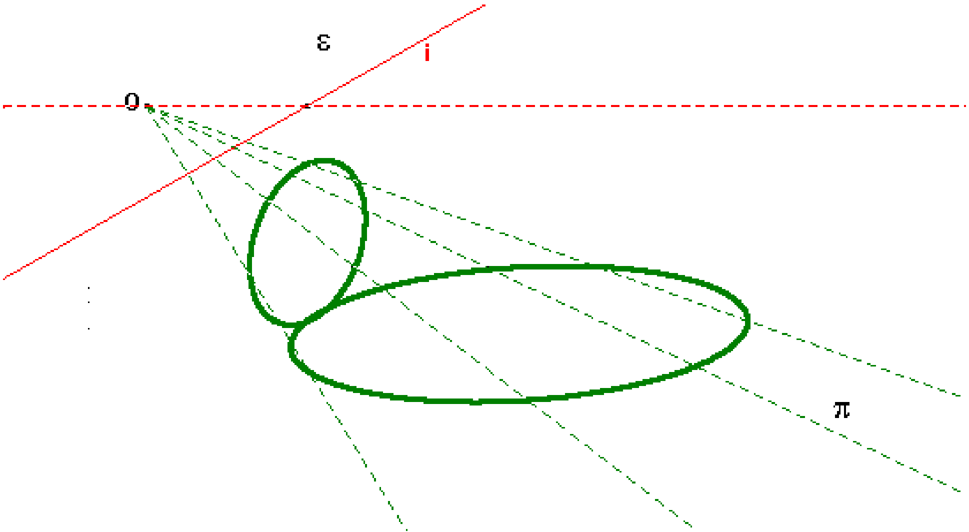


Ainda temos mais dois casos de projeção da circunferência.

Quando a reta *i*, que vai para o infinito, é secante à circunferência, a projeção é uma hipérbole. E quando a reta *i* é exterior à circunferência, a projeção de *C* é uma elipse.

Sempre podemos pensar em cones com vértice em *O*, onde as projeções são as seções do plano π com o cone, como mostram as figuras abaixo.





No plano projetivo, a distinção entre elipse, hipérbole e parábola, pode ser feita determinando uma posição especial para a reta do infinito. Mas essencialmente **cônicas são o mesmo objeto geométrico.**

Então podemos dizer que a parábola é uma cônica com apenas um de seus pontos no infinito, a hipérbole é uma cônica com apenas dois de seus pontos no infinito e a elipse é uma cônica com nenhum de seus pontos no infinito.

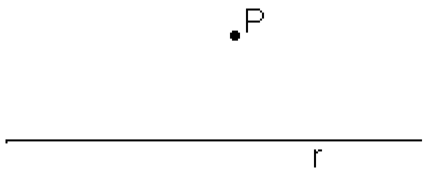
Podemos realizar esta transformação quantas vezes quisermos com quaisquer planos e quaisquer pontos de projeção. Dizemos então que temos uma projetividade do primeiro plano com o enésimo plano.

Estamos prontos para ver agora a formalização da Geometria Projetiva.

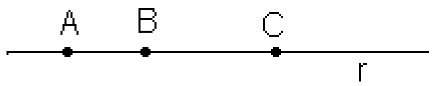
GEOMETRIA PROJETIVA: AXIOMAS

Os axiomas da Geometria Projetiva são basicamente os mesmos da Geometria Euclideana a menos do Postulado das Paralelas, de onde se constrói uma Geometria totalmente diferente. Onde retas "paralelas" se encontram num ponto do infinito, ou seja, não existem retas paralelas.

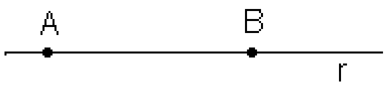
Axioma 1: *Existem um ponto e uma reta que não são incidentes.*



Axioma 2: *Toda reta é incidente com no mínimo três pontos distintos.*



Axioma 3: *Quaisquer dois pontos distintos são incidentes com apenas uma reta*



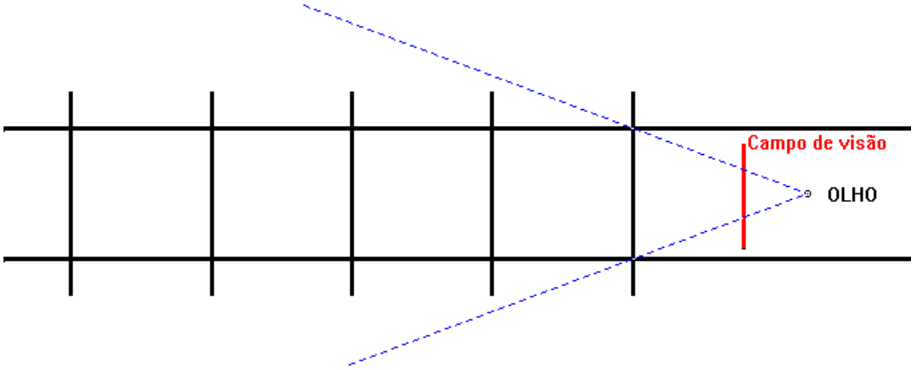
Axioma 4: *Quaisquer duas retas distintas têm no mínimo um ponto em comum.*

A motivação para este 4º axioma surge exatamente nos quadros dos renascentistas que escolhiam um determinado ponto para ser o *Ponto de Fuga* onde as retas paralelas iriam se encontrar.

Portanto a frase: *"Retas Paralelas se encontram no Infinito"* é verdadeira na Geometria Projetiva.

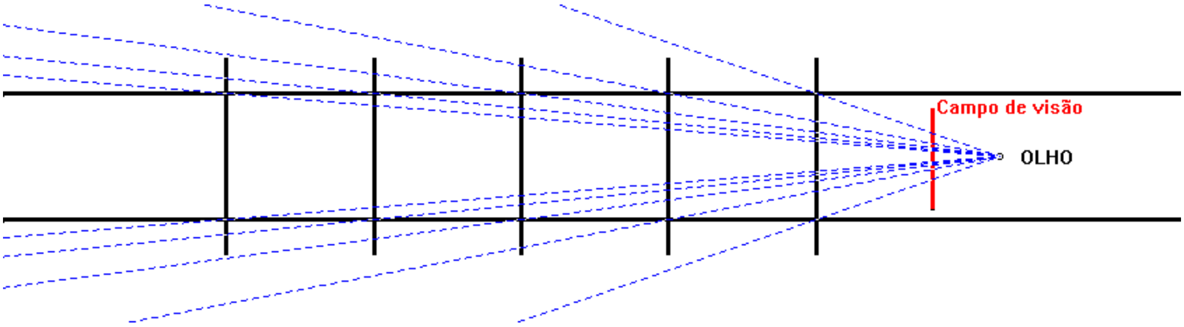
ATIVIDADE 1:

Vamos tentar entender através da Geometria Dinâmica o que acontece quando olhamos para uma estrada de ferro e vemos os trilhos convergirem para um ponto, apesar de sabermos que eles são paralelos.



Teorema do Ponto do Infinito

Se duas ou mais retas no mundo real são paralelas uma à outra, mas não são paralelas ao plano da figura, então elas têm o mesmo ponto do infinito. A imagem em perspectiva destas retas não será de retas paralelas. Se isto se estende a todo o desenho, as imagens das retas irão se intersectar no ponto do infinito.



PINTURAS ANTES DA PERSPECTIVA

As pinturas feitas antes do Renascimento não usavam a técnica da perspectiva. Por isso esses trabalhos artísticos não davam a noção de profundidade.

- Pintura Egípcia

- Pintura Romana

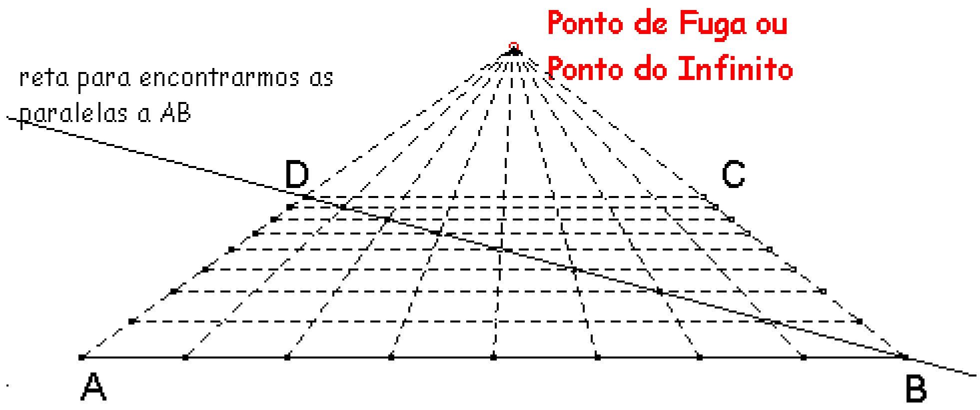
- Pintura Gótica: Os principais artistas na pintura gótica são os verdadeiros precursores da pintura do Renascimento.

- Primeiras tentativas para retratar a noção de profundidade: Máquinas de Dürer, 1525

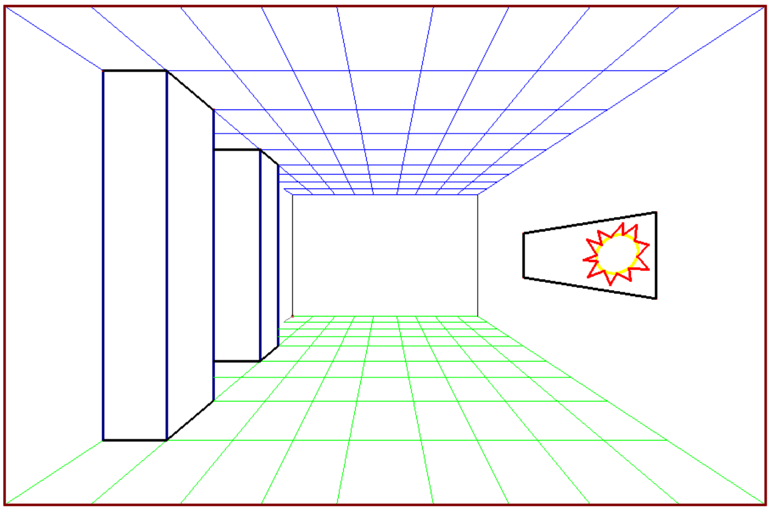
ATIVIDADE 2:

Plano de terra

A primeira exposição formal de problemas de perspectiva se deu na obra de *Leon Battista Alberti* (1404-1472) chamada *Della Pictura* (1435), onde descreve um método de representação de figuras planas sobre um "plano de terra".



Vamos aprender como desenhar o chão, o teto e as paredes em Perspectiva



PINTURAS DEPOIS DA PERSPECTIVA

- Barroco:

- A arte barroca originou-se na Itália (séc. XVII).
- Suas características gerais são:
- * emocional sobre o racional; seu propósito é impressionar os sentidos do observador, baseando-se no princípio segundo o qual a fé deveria ser atingida através dos sentidos e da emoção e não apenas pelo raciocínio.
- * busca de efeitos decorativos e visuais, através de curvas, contracurvas, colunas retorcidas;
- * entrelaçamento entre a arquitetura e escultura;
- * violentos contrastes de luz e sombra;
- * pintura com efeitos ilusionistas, dando-nos às vezes a impressão de ver o céu, tal a aparência de profundidade conseguida.

- Rococó: Intermediário

- Neoclassicismo:

Nas duas últimas décadas do século XVIII e nas três primeiras do século XIX, uma nova tendência estética predominou nas criações dos artistas europeus.

A pintura desse período foi inspirada principalmente na escultura clássica grega e na pintura renascentista italiana, sobretudo em Rafael, mestre inegável do equilíbrio da composição.

Características da pintura:

* Formalismo na composição, refletindo racionalismo dominante.

* Exatidão nos contornos

* Harmonia do colorido

- Romantismo:

O século XIX foi agitado por fortes mudanças sociais, políticas e culturais causadas por acontecimentos do final do século XVIII que foram a Revolução Industrial e a Revolução Francesa.

Características da pintura:

- Aproximação das formas barrocas;
- * Composição em diagonal sugerindo instabilidade e dinamismo ao observador;
- * Valorização das cores e do claro-escuro; e
- * Dramaticidade

- Realismo:

Entre 1850 e 1900 surge nas artes européias, sobretudo na pintura francesa, uma nova tendência estética chamada Realismo, que se desenvolveu ao lado da crescente industrialização das sociedades.

Características da pintura:

* Representação da realidade com a mesma objetividade com que um cientista estuda um fenômeno da natureza, ou seja o pintor buscava representar o mundo de maneira documental;

* Ao artista não cabe “melhorar” artisticamente a natureza, pois a beleza está na realidade tal qual ela é; e.

* Revelação dos aspectos mais característicos e expressivos da realidade.

- Impressionismo:

O Impressionismo foi um movimento artístico que revolucionou profundamente a pintura e deu início às grandes tendências da arte do século XX.

Principais características da pintura:

* A pintura deve registrar as tonalidades que os objetos adquirem ao refletir a luz solar num determinado momento, pois as cores da

natureza se modificam constantemente, dependendo da incidência da luz do sol.

* As figuras **não devem ter contornos nítidos**, pois a linha é uma abstração do ser humano para representar imagens.

* As sombras devem ser luminosas e coloridas, tal como é a impressão visual que nos causam, e não escuras ou pretas, como os pintores costumavam representá-las no passado.

* Os contrastes de luz e sombra devem ser obtidos de acordo com a lei das cores complementares. Assim, um amarelo próximo a um violeta produz uma impressão de luz e de sombra muito mais real do que o claro-escuro tão valorizado pelos pintores barrocos.

* As cores e tonalidades não devem ser obtidas pela mistura das tintas na paleta do pintor. Pelo contrário, devem ser puras e dissociadas nos quadros em pequenas pinceladas. É o observador que, ao admirar a pintura, combina as várias cores, obtendo o resultado final. A mistura deixa, portanto, de ser técnica para se óptica.

- Expressionismo:

O Expressionismo é a arte do instinto, trata-se de uma pintura dramática, subjetiva, "expressando" sentimentos humanos. Utilizando cores patéticas, dá forma plástica ao amor, ao ciúme, ao medo, à solidão, à miséria humana, à prostituição. Deforma-se a figura, para ressaltar o sentimento. Predominância dos valores emocionais sobre os intelectuais.

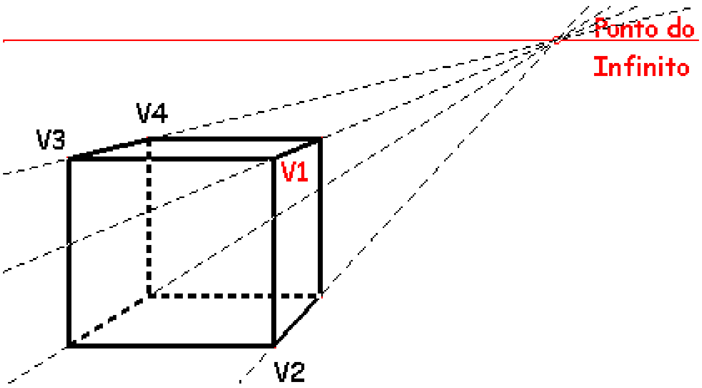
Principais características:

- pesquisa no domínio psicológico;
- * cores resplandecentes, vibrantes, fundidas ou separadas;
- * dinamismo improvisado, abrupto, inesperado;
- * pasta grossa, martelada, áspera;
- * técnica violenta: o pincel ou espátula vai e vem, fazendo e refazendo, empastando ou provocando explosões;

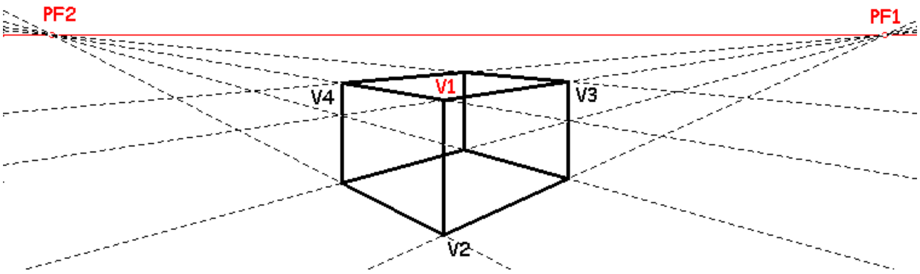
- * preferência pelo patético, trágico e sombrio

ATIVIDADE 3: Como desenhar Paralelepípedos em Perspectiva

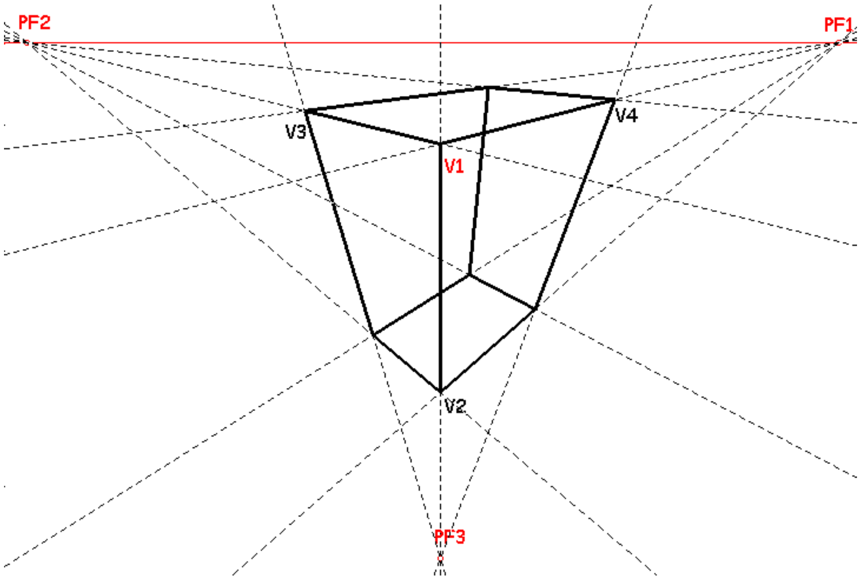
Com 1 ponto de fuga



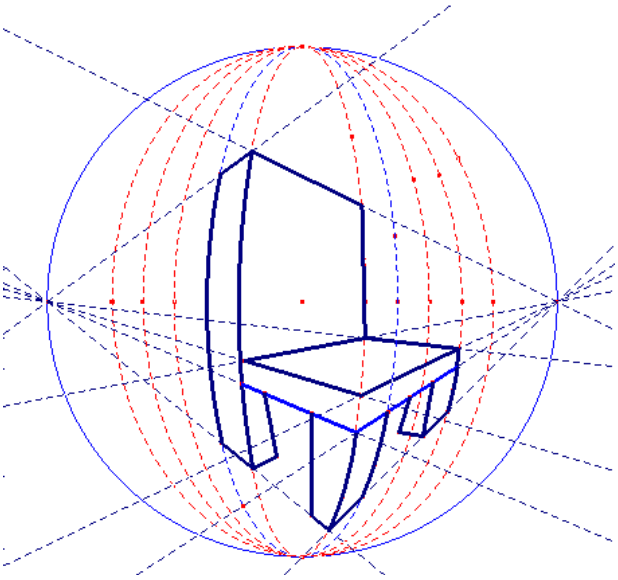
Com 2 pontos de fuga



Com 3 pontos de fuga



Uma brincadeira com 4 pontos de fuga:



- Cubismo:

Historicamente o Cubismo originou-se na obra de Cézanne, pois para ele a pintura deveria tratar as formas da natureza como se fossem cones, esferas e cilindros. Entretanto, os cubistas foram mais longe do que Cézanne. Passaram a representar os objetos com todas as suas partes num mesmo plano. É como se eles estivessem abertos e apresentassem todos os seus lados no plano frontal em relação ao espectador. Na verdade, essa atitude de decompor os objetos não tinha nenhum compromisso de fidelidade com a aparência real das coisas.

O pintor cubista tenta representar os objetos em três dimensões, numa superfície plana, sob formas geométricas, com o predomínio de linhas retas. Não representa, mas sugere a estrutura dos corpos ou objetos. Representa-os como se movimentassem em torno deles, vendo-os sob todos os ângulos visuais, por cima e por baixo, percebendo todos os planos e volumes.

Principais características:

- geometrização das formas e volumes;
- *** renúncia à perspectiva;**
- * o claro-escuro perde sua função;
- * representação do volume colorido sobre superfícies planas;
- * sensação de pintura escultórica;
- * cores austeras, do branco ao negro passando pelo cinza, por um ocre apagado ou um castanho suave.

- Surrealismo:

Nas duas primeiras décadas do século XX, os estudos psicanalíticos de Freud e as incertezas políticas criaram um clima favorável para o desenvolvimento de uma arte que criticava a cultura européia e a frágil condição humana diante de um mundo cada vez mais complexo. Surgem movimentos estéticos que interferem de maneira fantasiosa na realidade.

O surrealismo foi por excelência a corrente artística moderna da representação do irracional e do subconsciente.

Este movimento artístico surge todas às vezes que a imaginação se manifesta livremente, sem o freio do espírito crítico, o que vale é o impulso psíquico. Os surrealistas deixam o mundo real para penetrarem no irreal, pois a emoção mais profunda do ser tem todas as possibilidades de se expressar apenas com a aproximação do fantástico, no ponto onde a razão humana perde o controle.

A publicação do Manifesto do Surrealismo, assinado por André Breton em outubro de 1924, marcou historicamente o nascimento do movimento.

A livre associação e a análise dos sonhos, ambos métodos da psicanálise freudiana, transformaram-se nos procedimentos básicos do surrealismo, embora aplicados a seu modo. Por meio do automatismo, ou seja, qualquer forma de expressão em que a mente não exercesse nenhum tipo de controle, os surrealistas tentavam plasmar, seja por meio de formas abstratas ou figurativas simbólicas, as imagens da realidade mais profunda do ser humano: o subconsciente.

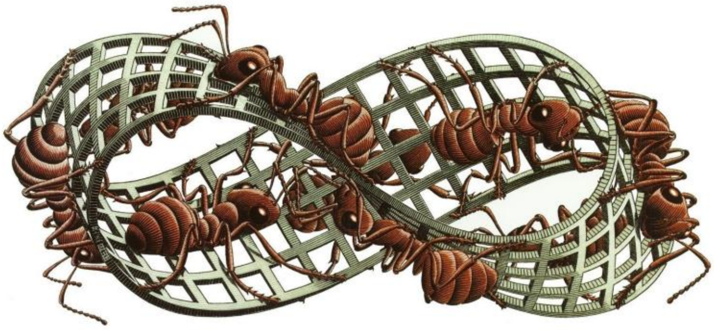
- Op Art:

A expressão “op-art” vem do inglês (optical art) e significa “arte óptica”. Defendia para arte "menos expressão e mais visualização". Apesar do rigor com que é construída, simboliza um mundo precário e instável, que se modifica a cada instante.

Apesar de ter ganho força na metade da década de 1950, a Op Art passou por um desenvolvimento relativamente lento. Ela não tem o ímpeto atual e o apelo emocional da Pop Art; em comparação, parece excessivamente cerebral e sistemática, mais próxima das ciências do que das humanidades. Por outro lado, suas possibilidades parecem ser tão ilimitadas quanto as da ciência e da tecnologia.

O maior expoente desse estilo:

Maurits Cornelis Escher (1898-1972). Holanda: Um Gênio do século XX

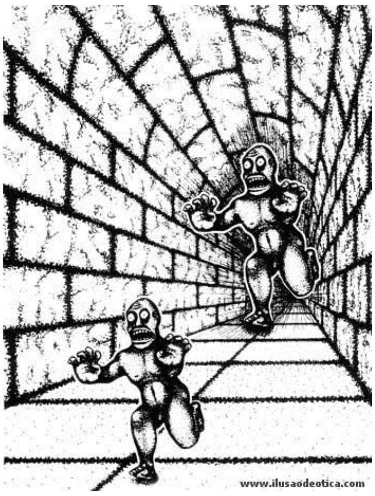


As regras da perspectiva desenvolvidas na Renascença influenciariam a produção das imagens por muitos mais séculos. De tal forma estas regras estavam arraigadas que o seu abandono pelas artes plásticas do século XX, sobretudo por Picasso e Kandinsky, foi um ato radical, revolucionário e polêmico. O olhar do espectador tinha até então contado com a codificação da perspectiva para poder compreender as imagens. Mas no século XX a fotografia e o seu rigor estavam há muito implantados. Surgiu então a necessidade de um olhar novo. Ao contrário do passado, as deformações, ou ausência, da perspectiva passaram a proliferar nas criações artísticas. Porém, o mundo de imagens que nos rodeia é muito mais vasto e no cinema, na televisão, na fotografia, a tridimensionalidade continua a estar representada sobre superfícies planas.

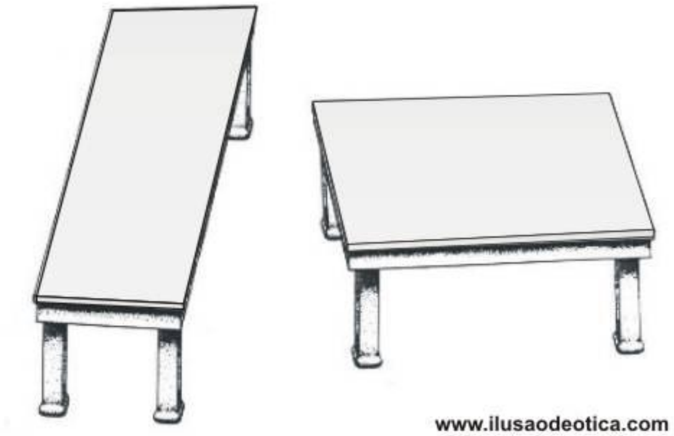
Ilusões de ótica

Podemos usar a Perspectiva para criarmos ilusões de ótica.

O monstro que está perseguindo é muito maior que o perseguido?



Esses tampos de mesa são muito diferentes?



REFERÊNCIAS:

História da Perspectiva:

- FLORES, CLÁUDIA REGINA, **Olhar, Saber, Representar: Ensaios sobre a representação em perspectiva**, Tese de Doutorado – UFSC, 2003.

http://www.math.dartmouth.edu/%7Ematc/math5.geometry/unit11/unit11.html

- http://www.cyberus.ca/~icscis/perspect.htm#Prehistoric1
- http://www.flashmasters.com.br (pontos de fuga)

Geometria Projetiva:

- BOYER, CARL B., **História da Matemática**, tradução Elza F. Gomide, editora Edgard Blucher Ltda. São Paulo, 1968.
- CARMO, M. do, **Elementos de Geometria Diferencial**, Rio de Janeiro, 1971.
- COOLIDGE, J. LOWELL, **A History of Geometrical Methods**, Dover Publications Inc. New York, 1963.
- COURANT, RICHARD and ROBBINS, HERBERT, **What is Mathmetics**, revisado por Ian Stewart, Oxford University Press, 1996.
- COXETER, H.S.M., **Projective Geometry**, Blaisdell Publishing Company, University of Toronto, 1964.

-COXETER, H.S.M, **The Real Projective Geometry Plane**, second ediction by Cambridge University Press, 1955.

- DÖRRIE, HEINRICH, **100 Great Problems of Elementary Mathematics - their history and solution**, Dover Publications, Inc., New York,1965, traduzido por David Antin; originalmente publicado na Alemanha sob o título Triumph der Mathematik, 1958, por Physica-Verlag, Würzburg.
- EVES, J. HOWARD, **An Introduction to the History of Mathematics**, Saunders College Publishing, a division of Holt, Rinehart and Winston Inc., Orlando, Flórida, 1990.

- FIELD, J. V. & GRAY J. J., **The Geometrical Work of Girard Desargues**, Springer-Verlag New York, 1987.

- GIERING, OSWALD, **Affine and Projective Generalization of Wallace Lines**, *Journal for Geometry and Graphics - Vol. 1 No.2, 119-133*, Center of Mathematical Sciences, Munich University of Technology, 1997.

- GUZMÁN, MIGUEL de, **The envelope of the Wallace-Simson lines of a triangle**, (Preliminary version, December 1998), Universidad Complutense de Madrid, http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/deltoide121298/00delten.htm.

- GUZMÁN, MIGUEL de, **A simple proof of the Steiner theorem on the deltoid**, (Preliminary version, December 1998), Universidad Complutense de Madrid, http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/deltoide121298/00delten.htm.

- J.W. ARCHBOLD, M.A., **Introduction to the Algebraic Geometry of a Plane**, Edward Arnold \& CO., London, 1948.

- LAWRENCE, J.DENNIS, **A Catalog of Special Plane Curves**, Dover Publications, Inc., New York, 1972, pg. 132.

- RUTTER, JOHN W., **Geometry of Curves**, Chapman & Hall mathematics series, New York, 1935.

- VEBLEN, OSWALD and YOUNG, JOHN WESLEY, **Projective Geometry - Vol.1**, Ginn and Company, New York, 1910.

- http://ochoa.mat.ucm.es/~jesusr/expogp/expogp.html

Arte:

- http://www.salvador-dali.org
- http://www.tamu.edu/mocl/picasso/
- http://www.historiadaarte.com.br
- http://www.ibiblio.org/wm/paint/

- http://www.abcgallery.com/
- http://ilusaodeotica.com/

Músicas:

- http://members.fortunecity.com/flatpickin/mididl.html
- http://www.classicalarchives.com
- http://www.kunstderfuge.com