Diferentes significados de um mesmo conceito: o caso das frações.[1]

Cleiton Batista Vasconcelos e Elizabeth Belfort

Muitos conceitos matemáticos podem ser usados em mais de uma situação. Um exemplo simples é a adição de números naturais, que pode ser associada às idéias de reunir / juntar ou acrescer / aumentar / ganhar. Especialmente para uma criança, as duas situações podem ser bastaste diversas. É muito diferente, por exemplo, pensar em quantas figurinhas reunidas ela e seu irmão têm ou tentar saber quantas figurinhas terá após acrescentar mais 40 figurinhas à sua própria coleção! No entanto, para resolver as duas situações-problema ela deverá utilizar a mesma operação matemática. É o que se chama de mais de um contexto, e é importante que os alunos sejam capazes de identificar que a operação a ser utilizada em cada um deles é a mesma.

As frações, assim como as operações fundamentais, também estão associadas a mais de uma idéia e, ao contrário do que se pensa, as frações estão presentes em muitas situações do nosso dia a dia. Em qualquer profissão que você exerça poderá encontrar situações em que deverá usar frações. Elas estão presentes quer numa mistura de bolo; quer na medida de canos e conexões; quer na manipulação de remédios.

Entretanto, como muitos outros temas de matemática, seu ensino limita-se, em geral, a aplicação de fórmulas e regras, sem que os alunos entendam muito bem o que estão fazendo. E, no caso específico das frações, muitas vezes a explanação limita-se a algumas idéias particulares, sem realmente abranger uma variedade das idéias que lhes são associadas. São fórmulas e regras desprovidas de significados e que devem ser memorizadas e repetidas.

Uma fração... muitas idéias

Você já se deu conta de que uma mesma fração pode representar várias idéias diferentes? Se não, pense um pouco e analise as situações que seguem. Sem esgotar as possibilidades, discutimos algumas das diferentes situações nas quais frações são úteis. Para exemplificar, vamos tomar a fração $\frac{2}{5}$. Que idéias ela pode representar?

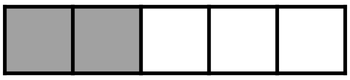
Idéia 1: Fração como parte de uma unidade.

A idéia mais usual de fração é aquela que pensa a fração como parte de uma unidade, que foi dividida em partes iguais.

Usando esta idéia, podemos pensar a fração $\frac{2}{5}$ como um todo que foi dividido em cinco partes iguais e se tomou duas dessas partes. Assim, temos a seguinte representação:

---

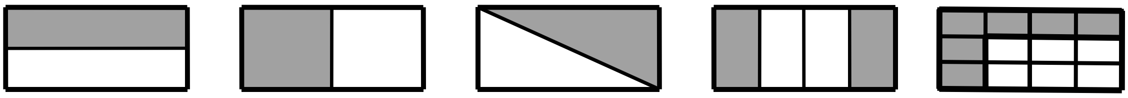
[1] Este texto foi adaptado de um texto de mesmo título, que faz parte da programação do **Salto para o Futuro**, da TV Escola, na série "*Discutindo Práticas em Matemática*", exibido pela primeira vez pela TV Escola na semana que se iniciou em 28 de agosto de 2006.



Cada uma das partes em que o todo foi dividido – esteja ela pintada ou não – representa um quinto do todo.

Discutindo a prática:

Uma primeira observação que merece ser feita é sobre o significado da palavra igual. A igualdade a que nos referimos não é de forma ou quantidade, mas sim de “área”, ou seja, da medida da superfície que representa o objeto. Assim, as partes pintadas de todos os retângulos da figura abaixo representam a fração $\frac{1}{2}$, e todas têm a mesma área.

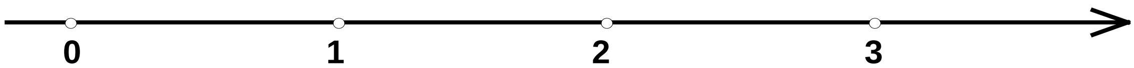


Outro ponto importante é que, muitas vezes, essa é a única idéia que é trabalhada com o aluno em sala de aula. Ressalte-se que, as primeiras noções de frações como partes de um todo ele já traz de casa. É muito comum ele ter de repartir ou o pão, ou o bolo, ou o chocolate com o irmão ou irmãos, ou com um ou mais amigos. Cada um deles recebendo $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{3}$, ou $\frac{1}{4}$ do pão, do bolo ou do chocolate. Mas essa idéia deve ser aprimorada na escola, pois é muito comum ouvirmos meninos pequenos falarem que querem a “metade maior”. Isso significando que o conceito de fração como parte de um todo que foi dividido em partes iguais ainda não está bem construído.

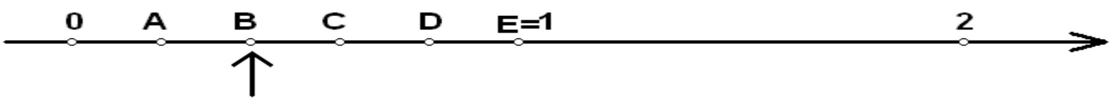
Idéia 2: Representação de frações na reta numérica

<u>**Texto para Leitura:**</u>

A visualização dos números fracionários na reta numérica não deveria, a rigor, ser considerada como uma nova idéia, pois também se trata da divisão de <u>uma unidade</u> em partes iguais. Só que, ao invés de destacarmos a parte, passamos a destacar <u>pontos</u> da reta. Como em uma régua, marcamos os valores inteiros em intervalos iguais, como ilustrado abaixo. O número 1 passa, então, a ser representado por um ponto na reta, que dista uma unidade do zero para a direita, o número 2 pelo ponto que dista uma unidade para a direita do número 1, e assim sucessivamente...



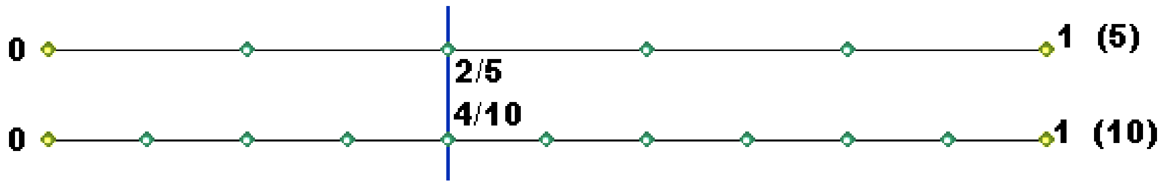
Na reta numérica, para determinar a posição da fração $\frac{2}{5}$, dividimos o intervalo que vai de zero até 1 em cinco partes iguais, encontrando os pontos **A**, **B**, **C**, **D** e **E** (esse último coincidindo com o número 1).



O ponto **A** é associado com $\frac{1}{5}$, o ponto **B**, assinalado na figura, representa a fração $\frac{2}{5}$, e assim sucessivamente, sendo que **E** representa a unidade completa, ou seja, $\frac{5}{5}$.

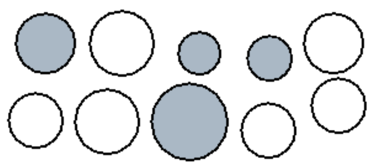
Discutindo a prática

A identificação das frações com pontos na reta numérica não apenas ajuda ao aluno a perceber a fração como um novo tipo de número, que ele começa a conhecer, como pode ser um ótimo recurso didático no momento de estudar o conceito de frações equivalentes. Por exemplo, na figura abaixo vemos a divisão da unidade em cinco e em dez partes iguais. Fica simples perceber que as frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{10}$ representam o mesmo ponto no intervalo, ou seja, são frações equivalentes.



Idéia 3: Fração como parte de um conjunto

Uma terceira idéia, que pode ser considerada uma variante da idéia 1 para o caso de grandezas discretas, é aquela que associa as frações a subconjuntos de um conjunto. De acordo com essa idéia, cada fração de um conjunto é um subconjunto desse conjunto. De acordo com essa interpretação, de um conjunto com 5 elementos, cada subconjunto com 2 elementos corresponde a $\frac{2}{5}$ desse conjunto; de um conjunto de 10 elementos, qualquer subconjunto de 4 elementos corresponde a $\frac{2}{5}$ desse conjunto; e assim por diante. Por exemplo:



As bolas pintadas de cinza correspondem a $\frac{2}{5}$ do total de bolas representadas na figura.

Discutindo a prática:

As frações também estão sendo utilizadas aqui para representar uma ou mais partes de um todo que foi dividido em partes iguais. Só que, nesse caso, o todo é um conjunto, ou seja, uma grandeza discreta e o que se divide são os elementos do conjunto, formando, assim, um subconjunto. Desta vez, as partes iguais não são necessariamente iguais em forma ou tamanho. São iguais em **número de elementos**. Assim é que de um conjunto com quatro pessoas, independente de idade, de cor, de tamanho, de sexo etc. duas quaisquer dessas pessoas representam metade do conjunto, ou $\frac{1}{2}$ do conjunto.

Um ponto a se considerar é o “tamanho” (número de elementos) do conjunto considerado como todo. É importante que o professor fique atento para que não ocorra, em um primeiro momento, a necessidade de se dividir (quebrar) algum dos elementos do conjunto. Lembre que não faz muito sentido falar em uma bola de gude dividida em duas partes ou em um ovo dividido em três partes, por exemplo.

Para iniciar um trabalho com crianças, um número bom de elementos para o conjunto que vai representar o todo é 12, uma vez que de um conjunto com doze elementos pode-se, facilmente, encontrar $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$.

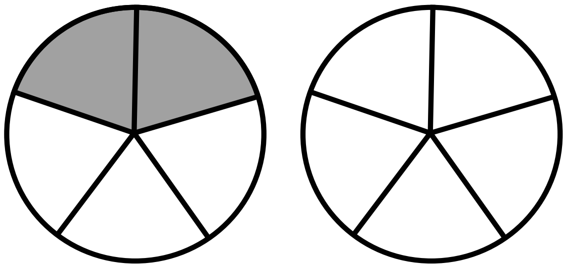
Idéia 4: Frações como quociente de divisão de um número inteiro por outro.

Uma quarta idéia, também bastante importante, mas que dificilmente é encontrada nos livros didáticos (e mesmo nas salas de aula) é a que vê a fração $\frac{2}{5}$ como o resultado da divisão de dois números inteiros: o numerador será dividido pelo denominador.

Imagine o seguinte problema: Temos duas pizzas e queremos dividi-las igualmente para cinco pessoas. Qual a parte que cada um receberá?

Uma forma de resolver o problema é dividir cada uma das pizzas em 5 pedaços, como mostra a figura abaixo. Cada pedaço representa $\frac{1}{5}$ de uma pizza.

Agora temos uma situação simples: um total de 10 pedaços para dividir entre 5 pessoas. Cada uma vai ganhar dois pedaços, ou seja $\frac{2}{5}$ de <u>uma pizza</u>.



Discutindo a prática

Observe que resolver esse problema é encontrar o resultado da divisão de 2 unidades – ou seja – duas pizzas, em cinco partes! A resposta deve ser dada na mesma unidade – ou seja – devemos responder dizendo que fração de **<u>uma pizza</u>** deve ser dada a cada pessoa. De acordo com essa idéia, a fração é o quociente (resultado) da divisão. Assim, a fração $\frac{2}{5}$ é o resultado da divisão de 2 unidades em 5 partes iguais.

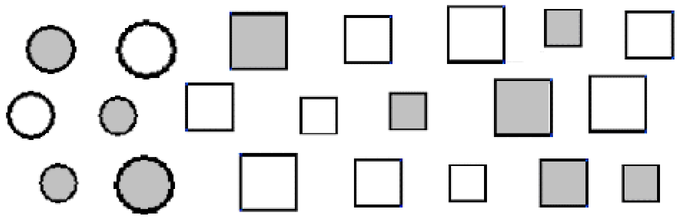
Neste caso, cada uma das duas pizzas representa uma unidade. Assim, temos duas unidades que queremos repartir em cinco partes iguais. Ou seja, queremos encontrar o quociente da divisão de 2 por 5.

Na prática, para efetuarmos essa divisão, cada unidade deverá ser dividida em 5 partes. A resposta procurada, ou seja, o quociente, é a fração <u>de uma pizza</u> (a unidade) que cada um vai receber.

Como se pode ver a partir do desenho, cada um vai receber duas das cinco partes em que a unidade foi dividida. Cada um receberá $\frac{2}{5}$ <u>de uma pizza</u>, isto é, $\frac{2}{5}$ <u>da unidade</u>.

Idéia 5: Fração como medida de comparação entre duas grandezas.

Uma outra idéia, de grande importância mas não tão explorada na aprendizagem de frações, é aquela que associa a fração à razão entre duas grandezas. De acordo com essa idéia uma fração é o quociente (resultado) da comparação (divisão) de uma grandeza (numerador) por outra (denominador). Assim, a fração $\frac{2}{5}$ seria o resultado da comparação de duas grandezas que estão na razão de 2 para 5, ou seja, de cada 7 unidades 2 são de um tipo e 5 são de outro tipo. Por exemplo, das 21 figuras abaixo, 6 são de um tipo e 15 de outro, ou seja, de cada 7 figuras, 2 são de um tipo e 5 de outro.



Repare que, neste caso, não estamos comparando uma parte com o todo, mas sim considerando cada tipo de figura como uma grandeza diferente e determinando a razão entre as duas. Assim, podemos dizer que as bolas estão para os quadrados na razão de 2 (bolas) para 5 (quadrados), A razão pode ser representada pela fração $\frac{2}{5}$.

Discutindo a prática

A utilização de frações para representar a razão entre duas grandezas se dá quando queremos comparar essas grandezas. Quando se trata de grandezas da mesma natureza, é importante lembrar que a subtração também pode ser usada como comparação. Assim, é importante notar que, no caso das frações, essa comparação é uma comparação relativa. Já no caso da subtração, tal comparação, pode-se dizer, ser absoluta.

Por exemplo: vamos comparar as idades de Thiago e Mariana, que têm 10 e 8 anos, respectivamente, podemos chegar aos seguintes resultados:

- *Thiago tem 2 (dois) anos a mais que Mariana.*

Neste caso temos uma comparação absoluta, obtida a partir da subtração 10 – 8. Esta comparação mostra a diferença absoluta entre a idade do Thiago e a da Mariana, que é de 2 anos.

- *A idade da Mariana é* $\frac{4}{5}$ *da idade do Thiago.*

Neste caso, temos uma comparação relativa, obtida ao dividirmos a idade da Mariana pela idade do Thiago. Esta comparação é feita, tomando-se a idade do Thiago como o todo que, nesse caso, está sendo representado pela fração $\frac{5}{5}$. Assim, cada dois anos representam $\frac{1}{5}$ da idade de Thiago. E os 8 anos da Mariana, representam $\frac{4}{5}$ desse todo.

Observe que a relação absoluta de dois anos, obtida pela subtração, se mantém para o resto das vidas de Thiago e Mariana. Ou seja, daqui a dois anos, as idades de Thiago e Mariana serão 12 e 10 anos, respectivamente, e sua diferença ainda será de 2 anos; daqui a 4 anos, as idades serão 14 e 12 e a diferença permanece a mesma; e assim por diante. Como se percebe, não importa o número de anos passados, a diferença absoluta será sempre de 2 anos. Já a relação entre a idade da Mariana e do Thiago, obtida pela divisão da idade da Mariana pela do Thiago, varia com o passar dos anos, conforme se percebe na tabela que segue:

Data	**Idade do Thiago**	**Idade da Mariana**	**Diferença**	$\frac{\textbf{Mariana}}{\textbf{Thiago}}$	**Representação Decimal**
4 anos atrás	6	4	2	$\frac{2}{3}$	≈ 0,67
2 anos atrás	8	6	2	$\frac{3}{4}$	0,75
Hoje	10	8	2	$\frac{4}{5}$	0,80
Daqui a 2 anos	12	10	2	$\frac{5}{6}$	≈ 0,83
Daqui a 4 anos	14	12	2	$\frac{6}{7}$	≈ 0,85
Daqui a 10 anos	20	18	2	$\frac{9}{10}$	0,90
Daqui a 20 anos	30	28	2	$\frac{14}{15}$	≈ 0,93

Na realidade, a última coluna nos permite visualizar que a diferença relativa vai diminuindo com o tempo. Ou seja, com o passar do tempo, a idade da Mariana se torna (relativamente) mais próxima da idade do Thiago. Isso se conclui, uma vez que o quociente está crescendo para 1, ficando cada vez mais próximo deste valor.