

**SIMONE DA SILVA DIAS CAETANO**

**INTRODUZINDO A ESTATÍSTICA NAS SÉRIES INICIAIS  
DO ENSINO FUNDAMENTAL A PARTIR DE MATERIAL  
MANIPULATIVO: Uma Intervenção de Ensino**

**MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**PUC/SP  
São Paulo  
2004**

**SIMONE DA SILVA DIAS CAETANO**

**INTRODUZINDO A ESTATÍSTICA NAS SÉRIES INICIAIS  
DO ENSINO FUNDAMENTAL A PARTIR DE MATERIAL  
MANIPULATIVO: Uma Intervenção de Ensino**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da  
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como  
exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE  
EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação da  
Profª Drª Sandra Maria Pinto Magina.*

**PUC/SP  
São Paulo  
2004**

**Banca Examinadora**

---

---

---

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta  
Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

**Assinatura:** \_\_\_\_\_ **Local e Data:** \_\_\_\_\_

*A meus pais,  
Roberto e Isabel,  
meu carinho*

## **AGRADECIMENTOS**

*Ao longo desta jornada, muitas pessoas auxiliaram-me com conhecimento, incentivo e amizade. Foram momentos compartilhados com intensidade e alegria. Agora que chegamos ao final, é tempo de agradecer.*

*A Deus pelo dom da vida, proteção e providência.*

*A Capes pelo apoio financeiro.*

*A minha orientadora Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Sandra Maria Pinto Magina por ser, antes de tudo, uma verdadeira amiga. Sua hospitalidade faz de sua sala uma pequena "comunidade científica", fraterna, dinâmica e alegre. Seu incentivo e apoio constantes levam-nos a olhar para frente e prosseguirmos. Sua compreensão e paciência com os iniciantes na pesquisa, acrescentadas às suas firmes orientações transmitem-nos confiabilidade e respeito. Enfim, Sandra, obrigada por transcender o âmbito profissional em seu papel de educadora.*

*Às Prof<sup>as</sup> Dr<sup>as</sup> Dione Lucchesi de Carvalho e Anna Franchi, integrantes da banca examinadora, pelas sugestões que muito contribuíram para o enriquecimento deste trabalho.*

*Às Prof<sup>as</sup> Dr<sup>as</sup> Anna Franchi, Lulu Healy e Cleda de Queiroz e Silva Coutinho pela ajuda em diversos momentos do desenvolvimento desta pesquisa.*

*Aos professores do Programa de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática, pelas experiências e pelo conhecimento compartilhado durante o curso.*

*A meu esposo Marco Antonio, pelo constante incentivo, pela paciência em momentos difíceis, pela compreensão em minhas ausências, sempre demonstrando seu amor.*

*A meus pais, Roberto e Isabel, por me ensinarem a nunca desistir, pelo apoio financeiro e, sobretudo, por acreditarem em mim. A minha irmã Eliete, por me ajudar tantas vezes, mesmo estando distante. A minha sobrinha Isabella, pelo sorriso e alegria ao reencontrar-me. A meu irmão Marcelo e esposa Maira, pelo incentivo e apoio. Cada um de vocês muito contribuiu para meu sucesso.*

*Aos colegas Rosana e José Kiochi, pela convivência harmoniosa, pela ajuda mútua e pela compreensão durante o período de trabalho coletivo de nossas pesquisas. MUITÍSSIMO OBRIGADA!*

*À amiga Sandra da Silva Santos, pelas leituras atenciosas dos textos preliminares, pelas sugestões e pela amizade sincera.*

*Aos colegas de mestrado, pela união e companheirismo demonstrados durante todo o curso.*

*À Escola Estadual Professora Marina Cintra, por abrir suas portas para a realização desta pesquisa e, especialmente, às professoras Vilma e Mirian, por cederem as horas de trabalho com seus alunos a nós. Às crianças, que com entusiasmo participaram de nossas atividades.*

*Aos secretários Francisco e Vera, pela atenção e pelo apoio dispensados.*

*Enfim a todos que, de uma maneira ou de outra, participaram de minha jornada, quero agradecer dividindo este momento especial.*

## RESUMO

O objetivo desta dissertação foi investigar o desenvolvimento da leitura e interpretação de gráficos e o conceito de média aritmética por crianças da 4ª série do Ensino Fundamental, por meio de uma intervenção de ensino com o uso de material manipulativo, a fim de responder à seguinte questão de pesquisa: “Quais as contribuições de uma intervenção de ensino com o uso de material manipulativo para o ensino-aprendizagem de conceitos elementares de Estatística nas séries iniciais do Ensino Fundamental?” Para tanto, foi desenvolvida uma pesquisa de caráter intervencionista com alunos de duas classes de 4ª série do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública estadual de São Paulo; uma delas constituiu-se em grupo controle (GC) e a outra em grupo experimental (GE). A pesquisa de campo contemplou duas etapas – aplicação dos instrumentos diagnósticos (pré e pós-testes), tanto no GE como no GC e aplicação da intervenção de ensino com uso de material manipulativo apenas no GE. Os resultados obtidos em cada uma dessas etapas foram analisados considerando os dois objetos da pesquisa – a leitura e interpretação de gráficos e o conceito de média aritmética – bem como os dois tipos de gráficos usados – gráfico de barras verticais e gráfico de dupla entrada (extraído do software Tabletop). Os resultados apontaram para as dificuldades dos alunos na leitura e interpretação de gráficos em situações específicas, como gráficos com escalas não unitárias e ou com frequência nula. A leitura e interpretação do gráfico de dupla entrada não apresentou maiores dificuldades. Quanto à média aritmética, os resultados mostraram um crescimento de quase 50% no desempenho dos alunos do GE, no pós-teste. Tendo por base tais resultados pode-se concluir que a associação da intervenção de ensino com o material manipulativo possibilitou o desenvolvimento de estratégias para a resolução das situações apresentadas e permitiu o estabelecimento de importantes relações entre os dois conteúdos abordados, as quais, por sua vez, influenciaram na ampliação do conhecimento do aluno sobre o “Tratamento da Informação”.

**Palavras-chave:** Estatística; formação de conceitos; séries iniciais; leitura e interpretação de gráficos; média aritmética.

## ABSTRACT

The aim of this dissertation was to investigate 4<sup>th</sup> grade children's skills in reading and interpreting graphs as well as their conceptions of the statistical measure *mean*. More specifically, the study addressed the research question: *What are the contributions of a teaching intervention based on the use of manipulative materials to the teaching and learning of elementary statistical concepts the primary school?* To this end, an interventionist research approach was adopted in a study involving two classes of the fourth year of "Ensino Fundamental" in a public school in São Paulo. One class constituted the control group (GC) and the other the experimental group (GE). The field research was organised in two phases – the administration of diagnostic instruments (pre- and post-tests) to both the experimental and control groups; and the teaching intervention, which was applied only with the experimental group. The results from each phase were analysed in relation to two research foci – the reading and interpretation of graphs and the concept of arithmetic mean – and in relation to the types of graphs used – vertical-bar graphs and "two-entry" graphs (as represented in the software Tabletop). Analysis of the results indicated student difficulties in the reading and interpreting of graphs in particular situations, such as graphs with non-unitary scales and/or with null frequency; The reading and interpretation of two-entry graphs was not associated with major difficulties. For the arithmetic mean, an increase of almost 50% in students' performance was observed from comparisons of the pre- and post-test results. On the basis of these results, it appears that the teaching intervention enabled the development of strategies for solving the presented situations as well as favouring the forging of important relations between the two concepts investigated, which influenced the amplification of students' knowledge of Data Handling.

**Keywords** : Statistics ; concept formation; school level; initials grades; reading and interpretation of graphs; arithmetic mean.

# ÍNDICE

## **CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO**

1.1.	Introdução.....	002
1.2.	Problemática.....	003
1.3.	Objetivo e questão de pesquisa.....	006
1.4.	Descrição da dissertação.....	008

## **CAPÍTULO II – A LEITURA E INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICOS**

2.1.	Introdução.....	011
2.2.	A leitura e interpretação de gráficos sob o ponto de vista do PCN.....	011
2.3.	A leitura e Interpretação de gráficos sob o ponto de vista das pesquisas sobre o tema em referência.....	018
2.3.1.	Níveis de interpretação e ou compreensão de gráficos.....	021

## **CAPÍTULO III – MÉDIA SOB DIFERENTES PONTOS DE VISTA**

3.1.	Introdução.....	025
3.2.	A média sob o ponto de vista da Estatística.....	025
3.3.	A média sob o ponto de vista do PCN.....	031
3.4.	A média sob o ponto de vista das pesquisas sobre o tema em referência.....	033
3.4.1.	Propriedades da média aritmética.....	037

## **CAPÍTULO IV – CONTRIBUIÇÕES DE DUAS TEORIAS PSICOLÓGICAS PARA A CONSTRUÇÃO DO ESTUDO**

4.1.	Introdução.....	041
4.2.	O “Tratamento da Informação” a partir da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.....	041
4.3.	A Abstração Reflexionante de Piaget.....	055

## **CAPÍTULO V – METODOLOGIA**

5.1.	Introdução.....	060
5.2.	Desenho do experimento.....	060
5.3.	Universo do estudo.....	062
5.4.	Material utilizado.....	063

5.4.1. Materiais da etapa 1 – os testes.....	064
5.4.2. Materiais da etapa 2 – a intervenção.....	064
5.5. Procedimento.....	068
5.5.1. Instrumentos diagnósticos.....	072
5.5.1.1. Questão 1.....	074
5.5.1.2. Questão 2.....	080
5.5.1.3. Questão 3.....	083
5.5.2. Intervenção de ensino.....	088
5.5.2.1. Encontro 1.....	095
5.5.2.2. Encontro 2.....	099
5.5.2.3. Encontro 3.....	102
5.5.2.4. Encontro 4.....	106
5.5.2.5. Encontro 5.....	108
5.5.2.6. Encontro 6.....	111
5.5.2.7. Encontro 7.....	112
5.5.2.8. Encontro 8.....	115

## **CAPÍTULO VI – ANÁLISE DOS RESULTADOS**

6.1. Introdução.....	118
6.2. Análise quantitativa.....	121
6.2.1. Análise geral: Comparação entre o número de acertos dos grupos GE e GC nos pré e pós-teste.....	123
6.2.2. Comparação entre o número de acertos dos grupos GE e GC no pré-teste.....	124
6.2.2.1. Itens de leitura e interpretação de gráficos de barras verticais do pré-teste – GE e GC.....	126
6.2.2.2. Itens de leitura e interpretação de gráficos de dupla entrada do pré-teste – GE e GC.....	129
6.2.2.3. Itens de cálculo da média aritmética baseada nos dados apresentados em um gráfico de barras verticais ou de dupla entrada do pré-teste – GE e GC.....	130
6.2.3. Comparação entre o número de acertos dos grupos GE e GC no pós-teste.....	132
6.2.3.1. Itens de leitura e interpretação de gráficos de barras verticais do pós-teste – GE e GC.....	135

6.2.3.2. Itens de leitura e interpretação de gráficos de dupla entrada do pós-teste – GC e GE.....	137
6.2.3.3. Itens de cálculo da média aritmética baseada nos dados apresentados em um gráfico de barras verticais ou de dupla entrada do pós-teste – GC e GE.....	138
6.2.4. Comparação intra e intergrupos – uma síntese.....	139
6.2.5. Análise do número de acertos do pré e pós-teste do GE por item.....	143
6.2.5.1. Itens de leitura e interpretação de gráficos de barras verticais dos pré e pós-teste – GE.....	143
6.2.5.2. Itens de leitura e interpretação de gráficos de dupla entrada dos pré e pós-teste – GE.....	149
6.2.5.3. Itens de cálculo da média aritmética baseada nos dados apresentados em um gráfico de barras verticais ou de dupla entrada dos pré e pós-teste – GE.....	152
6.3. Análise qualitativa.....	159
6.3.1. Análise qualitativa focando a leitura e interpretação de gráficos.....	160
6.3.1.1. Gráfico X Realidade.....	162
6.3.1.2. Níveis de leitura e interpretação de gráfico.....	165
6.3.1.3. Extrapolação.....	172
6.3.2. Análise qualitativa focando a média aritmética.....	174
6.3.2.1. Significados atribuídos à média aritmética.....	176
6.3.2.2. Percepção dos invariantes operatórios da média aritmética.....	185
6.3.2.3. “Inferência” utilizando a média aritmética.....	200

## **CAPÍTULO VII – CONCLUSÃO**

7.1. Introdução.....	206
7.2. A trajetória do estudo.....	206
7.3. Síntese dos principais resultados.....	209
7.4. Respostas às questões de pesquisa.....	212
7.5. Sugestões para futuras pesquisas.....	219

## **CAPÍTULO VIII – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1: Distribuição por ficha de atividade da quantidade de questões e de itens em cada questão.....	064
Tabela 5.2: Distribuição da correspondência entre as questões do pré e pós-teste.....	073
Tabela 5.3: Distribuição dos valores característicos associados à média aritmética.....	077
Tabela 5.4: Distribuição das atividades desenvolvidas na intervenção de ensino.....	090
Tabela 5.5: Distribuição das habilidades de leitura e interpretação de gráficos desenvolvidas na atividade 2B.....	100
Tabela 6.1: Distribuição do desempenho geral dos dois grupos – GE e GC – no pré e pós-teste.....	123
Tabela 6.2: Distribuição da evolução nas respostas do pré para o pós-teste na categoria gráfico X realidade.....	163
Tabela 6.3: Evolução nas respostas do pré para o pós-teste na categoria nível 3 de leitura e interpretação de gráficos.....	169
Tabela 6.4: Evolução nas respostas do pré para o pós-teste na categoria significados atribuídos à média aritmética.....	177

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1.1: Exemplo ilustrativo de gráfico utilizado na mídia.....	004
Quadro 2.1: Níveis de leitura e interpretação de gráficos, conforme Curcio (1987).....	022
Quadro 3.1: Elementos típicos de uma distribuição.....	026
Quadro 3.2: Propriedades da média aritmética, conforme Strauss e Bichler (1988).....	038
Quadro 4.1: Campo conceitual de Santos (SANTOS, 2003, p. 26).....	044
Quadro 4.2: Campo conceitual – “Tratamento da Informação” .....	046
Quadro 5.1: Desenho do experimento.....	061
Quadro 5.2: Questão 1 do pré e pós-teste.....	075
Quadro 5.3: Itens “a” e “b” da questão 1 do pré e pós-teste.....	075
Quadro 5.4: Item “c” da questão 1 do pré e pós-teste.....	076
Quadro 5.5: Item “d” da questão 1 do pré e pós-teste.....	078
Quadro 5.6: Item “e” da questão 1 do pré e pós-teste.....	079
Quadro 5.7: Questão 2 do pré-teste.....	080
Quadro 5.8: Questão 2 do pós-teste.....	080
Quadro 5.9: Item “a” da questão 2 do pré e pós-teste.....	081
Quadro 5.10: Itens “b” e “c” da questão 2 do pré e pós-teste.....	081
Quadro 5.11: Item “d” da questão 2 do pré e pós-teste.....	082
Quadro 5.12: Itens “e” e “f” da questão 2 do pré e pós-teste.....	082
Quadro 5.13: Questão 3 do pós-teste.....	084
Quadro 5.14: Item “a” da questão 3 do pré e pós-teste.....	085
Quadro 5.15: Item “b” da questão 3 do pré e pós-teste.....	086
Quadro 5.16: Item “c” da questão 3 do pré e pós-teste.....	087
Quadro 5.17: Item “d” da questão 3 do pré e pós-teste.....	088
Quadro 5.18: Atividade 1A da intervenção de ensino.....	095
Quadro 5.19: Atividade 1B da intervenção de ensino.....	097
Quadro 5.20: Atividade 1C da intervenção de ensino.....	098
Quadro 5.21: Atividade 2A da intervenção de ensino.....	099
Quadro 5.22: Atividade 2B da intervenção de ensino.....	100
Quadro 5.23: Atividade 2C da intervenção de ensino.....	101
Quadro 5.24: Atividade 3A da intervenção de ensino.....	103
Quadro 5.25: Atividade 3B da intervenção de ensino.....	104
Quadro 5.26: Atividade 3C da intervenção de ensino.....	104
Quadro 5.27: Atividade 3D da intervenção de ensino.....	104

Quadro 5.28: Atividade 4 da intervenção de ensino.....	107
Quadro 5.29: Atividade 5A da intervenção de ensino.....	109
Quadro 5.30: Atividade 5B da intervenção de ensino.....	110
Quadro 5.31: Atividade 6A da intervenção de ensino.....	112
Quadro 5.32: Atividade 6B da intervenção de ensino.....	113
Quadro 5.33: Atividade 7A da intervenção de ensino.....	115
Quadro 5.34: Atividade 7B da intervenção de ensino.....	116
Quadro 6.1: Estrutura da análise.....	119
Quadro 6.2: Subdivisão por tema abordado dos itens do pré-teste.....	126
Quadro 6.3: Desempenho dos dois grupos – GE e GC – nos itens referentes à leitura e interpretação de gráficos de barras verticais no pré-teste.....	127
Quadro 6.4: Desempenho dos dois grupos – GE e GC – nos itens referentes à leitura e interpretação de gráficos de dupla entrada no pré-teste.....	129
Quadro 6.5: Desempenho dos dois grupos – GE e GC – nos itens referentes ao cálculo da média aritmética simples no pré-teste.....	131
Quadro 6.6: Subdivisão por tema abordado dos itens do pós-teste.....	135
Quadro 6.7: Desempenho dos dois grupos – GE e GC – nos itens referentes à leitura e interpretação de gráficos de barras verticais no pós-teste.....	136
Quadro 6.8: Desempenho dos dois grupos – GE e GC – nos itens referentes à leitura e interpretação de gráficos de dupla entrada no pós-teste.....	137
Quadro 6.9: Desempenho dos dois grupos – GE e GC – nos itens referentes ao cálculo da média aritmética simples no pós-teste.....	138
Quadro 6.10: Desempenho do grupo GE nos itens referentes à leitura e interpretação de gráficos de barras verticais no pré e pós-teste.....	144
Quadro 6.11: Excerto do diálogo que evidencia a dificuldade com a proporcionalidade da escala do gráfico.....	146
Quadro 6.12: Desempenho do grupo GE nos itens referentes à leitura e interpretação de gráficos de dupla entrada no pré e pós-teste.....	150
Quadro 6.13: Desempenho do grupo GE nos itens referentes ao cálculo de média aritmética no pré e pós-teste.....	153
Quadro 6.14: Quadro-resumo da evolução do desempenho do GE em cada um dos itens do pré e pós-teste.....	156
Quadro 6.15: Estrutura da análise qualitativa.....	159
Quadro 6.16: Estrutura da análise qualitativa com foco na leitura e interpretação de gráficos.....	162

Quadro 6.17: Justificativa do S18 ao item “1a” do pós-teste – resposta baseada na realidade.....	164
Quadro 6.18: Justificativa do S9 e S3 ao item “3a” do pré-teste – respostas baseadas na realidade.....	164
Quadro 6.19: Resultados do item de nível 1 “ler os dados”.....	166
Quadro 6.20: Resultados dos itens de nível 2 “ler entre os dados”.....	166
Quadro 6.21: Diálogo durante a atividade 4 – frequência nula não considerada como ponto de mínimo.....	167
Quadro 6.22: Resultados do item de nível 3 “ler além dos dados”.....	169
Quadro 6.23: Justificativas do S10 e S1 ao item “1e”, do pré-teste e pós-teste, respectivamente – respostas que consideraram a tendência do gráfico.....	170
Quadro 6.24: Justificativa do S2 ao item “1e” do pré-teste – resposta baseada na realidade do aluno.....	170
Quadro 6.25: Justificativa do S18 ao item “1e” do pós-teste – resposta utilizando a média aritmética.....	171
Quadro 6.26: Diálogo do G8 durante a atividade 6B, item “2f” – extrapolação.....	173
Quadro 6.27: Estrutura da análise qualitativa com foco no conceito de média aritmética.....	174
Quadro 6.28: Diálogo durante a atividade 3A – média = mediana.....	181
Quadro 6.29: Diálogo do G3 durante a atividade 3B – média = total dos dados da variável.....	182
Quadro 6.30: Diálogo do G3 durante a atividade 3B – média = total dos dados da variável dividido por dois.....	183
Quadro 6.31: Diálogo do G3 durante a atividade 3C – média = total dos dados da variável dividido por dois.....	184
Quadro 6.32: Diálogo do G2 durante a atividade 6B – média = total dos dados da variável dividido por dois.....	184
Quadro 6.33: Diálogo do G3 durante a atividade 3B – dificuldade em identificar os invariantes operatórios do conceito de média aritmética em um gráfico de barras verticais.....	187
Quadro 6.34: Diálogo do G8 durante a atividade 3D – dificuldade em identificar os invariantes operatórios do conceito de média aritmética em um gráfico de barras verticais.....	188

Quadro 6.35: Diálogo do G1 durante a atividade 3D – dificuldade em identificar os invariantes operatórios do conceito de média aritmética em um gráfico de barras verticais.....	188
Quadro 6.36: Diálogo do G5 durante a atividade 6B – dificuldade em identificar os invariantes operatórios do conceito de média aritmética em um gráfico de dupla entrada.....	189
Quadro 6.37: Diálogo do G1 durante a atividade 6A – percepção da propriedade A: a média é um valor compreendido entre os extremos.....	190
Quadro 6.38: Diálogo do G6 durante a atividade 3D – percepção da propriedade B: a soma das variações da média é zero.....	191
Quadro 6.39: Diálogo do G1 durante a atividade 4 – percepção da propriedade C: o valor médio pode ser influenciado pelos valores de cada um dos dados.....	192
Quadro 6.40: Resposta do S15 ao item “1d” do pré-teste – percepção da propriedade C: o valor médio pode ser influenciado pelos valores de cada um dos dados.....	193
Quadro 6.41: Resposta do S10 ao item “1d” do pós-teste – percepção da propriedade C: o valor médio pode ser influenciado pelos valores de cada um dos dados.....	194
Quadro 6.42: Diálogo da pesquisadora com a classe durante a atividade 7B – percepção da propriedade D: a média não é, necessariamente, igual a um dos valores dos dados.....	195
Quadro 6.43: Diálogo da pesquisadora com a classe durante a atividade 3D – percepção da propriedade E: a média pode ser uma fração que não tenha equivalente na realidade física.....	196
Quadro 6.44: Diálogo da pesquisadora com a classe durante a atividade 6B – percepção da propriedade E: a média pode ser uma fração que não tenha equivalente na realidade física.....	197
Quadro 6.45: Diálogo do G5 durante a atividade 5A – percepção da propriedade F: tem-se que ter em conta os valores nulos no cálculo da média.....	198
Quadro 6.46: Diálogo do G7 durante a atividade 5A – utilização da média aritmética em questão envolvendo a “inferência”.....	202
Quadro 6.47: Diálogo do G3 durante a atividade 5A – raciocínios errôneos em questão envolvendo a “inferência”.....	203
Quadro 6.48: Quadro-resumo das principais evidências da análise qualitativa dos dados.....	204

## LISTA DAS FIGURAS

Figura 3.1: Curva de freqüência simétrica.....	028
Figura 3.2: Curvas de freqüência assimétricas positiva e negativa.....	028
Figura 4.1: Gráfico de duas entradas do Tabletop.....	049
Figura 5.1: Exemplo da tábua de gráficos.....	066
Figura 5.2: Exemplo de abstração pseudo-empírica.....	092
Figura 6.1: Protocolo do G1 que evidencia a dificuldade com a proporcionalidade da escala do gráfico.....	147
Figura 6.2: Resposta do S5 – item “2e” – pós-teste.....	179
Figura 6.3: Resposta do S18 – item “1c” – pós-teste.....	180
Figura 6.4: Resposta do G8 – atividade 5A – itens “g” e “h” – tipo de erro: multiplicação do total dos dados da variável do gráfico pelo total de alunos da classe.....	200
Figura 6.5: Resposta do G6 – atividade 7A – item d - Multiplicação do número de alunos por alunos.....	201
Figura 6.6: Resposta do G3 – atividade 6 A – item f - Divisão do número de alunos por alunos.....	201

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 6.1: Desempenho geral dos dois grupos – GE e GC – no pré-teste.....	125
Gráfico 6.2: Desempenho geral dos dois grupos – GE e GC – no pós-teste.....	133
Gráfico 6.3: Desempenho dos dois grupos – GE e GC – nos itens referentes à leitura e interpretação de gráficos de barras verticais no pré e pós-teste.....	140
Gráfico 6.4: Desempenho dos dois grupos – GE e GC – nos itens referentes à leitura e interpretação de gráficos de dupla entrada no pré e pós-teste.....	141
Gráfico 6.5: Desempenho dos dois grupos – GE e GC – nos itens referentes ao cálculo de média aritmética simples no pré e pós-teste.....	142

## **LISTA DE ANEXOS**

Anexo 1 – Pré-teste

Anexo 2 – Pós-teste

Anexo 3 – Atividade 1A

Anexo 4 – Atividade 1B

Anexo 5 – Atividade 1C

Anexo 6 – Atividade 2A

Anexo 6 – Atividade 2B

Anexo 8 – Atividade 2C

Anexo 9 – Atividade 3A

Anexo 10 – Atividade 3B

Anexo 11 – Atividade 3C

Anexo 12 – Atividade 3D

Anexo 13 – Atividade 4

Anexo 14 – Atividade 5A

Anexo 15 – Atividade 5B

Anexo 16 – Atividade 6A

Anexo 17 – Atividade 6B

Anexo 18 – Atividade 7A

Anexo 19 – Atividade 7B

# **CAPÍTULO I**

## **INTRODUÇÃO**

# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

### 1.1 – Introdução

Nossa pesquisa está inserida em um projeto maior intitulado: “Integração do computador às aulas de Matemática do Ensino Fundamental: formação e desenvolvimento de um núcleo de ensino-pesquisa”, elaborado por nossa orientadora e realizado em uma escola pública de São Paulo, que foi financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e tendo incluído o desenvolvimento de quatro dissertações de mestrado. Uma delas tratou de um estudo de caso com um dos professores dessa instituição escolar e buscou investigar as contribuições do ambiente computacional do Tabletop no processo de formação de conhecimentos básicos de Estatística por parte do professor das séries iniciais, que foi concluído, em 2003, e será citado posteriormente. Duas outras dissertações voltaram-se ao estudo do desenvolvimento de conceitos elementares de Estatística por alunos da 4ª série do Ensino Fundamental, por meio de intervenção de ensino, sendo uma no ambiente computacional Tabletop e a outra com o uso de material manipulativo. A quarta dissertação foi um estudo comparativo entre os dois trabalhos que focalizaram os alunos da 4ª série.

A presente pesquisa refere-se à formação de conceitos elementares de Estatística na 4ª série do Ensino Fundamental por meio de uma intervenção de ensino com o uso de material manipulativo.

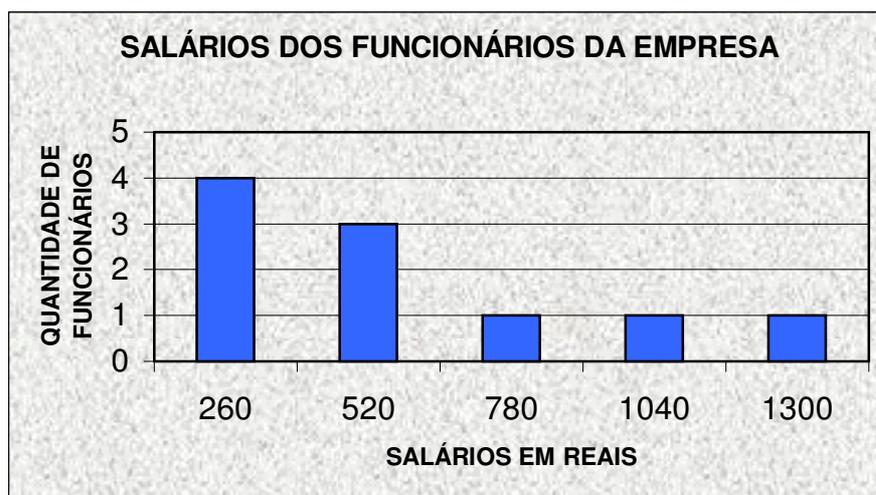
Além de possibilitar o desenvolvimento do estudo comparativo, os mestrandos responsáveis pela realização das três últimas dissertações acima citadas trabalharam em conjunto ao longo de toda elaboração e aplicação do experimento, isto é, desde a elaboração das questões, dos instrumentos diagnósticos e das atividades da intervenção de ensino, até o final da coleta de dados. Estes autores trabalharam juntos na escolha dos ambientes, na criação dos instrumentos diagnósticos (pré-teste e pós-teste) e na intervenção de ensino, mantendo constantes reuniões de planejamento. A coleta dos dados deu-se também por meio de um trabalho de equipe. A intervenção de ensino desenvolvida em uma turma foi idêntica à aplicada em outra turma, diferindo o ambiente utilizado e a pessoa do pesquisador. Em ambas as turmas, os outros dois alunos-mestrandos posicionaram-se como observadores. O mesmo se verificou na aplicação dos instrumentos diagnósticos. No período de coleta de dados, houve ainda os reparos necessários tanto no pré-teste como na intervenção de ensino, sendo os mesmos discutidos em conjunto. Com base na análise dos dados e na redação do trabalho é que caminhamos em separado.

A seguir, apresentamos o resultado dessa nossa jornada.

## 1.2 – Problemática

Nos diversos meios de comunicação, comumente, encontramos dados estatísticos apresentados por meio de gráficos e tabelas. A utilização desse tipo de representação dá-se com o propósito de facilitar a compreensão do leitor ou do interlocutor a respeito dos dados informados.

No gráfico a seguir, apresentamos dados hipotéticos dos salários pagos por uma pequena empresa, cuja leitura e interpretação do gráfico fornecem-nos algumas informações como, por exemplo, o maior ou o menor salário pago por essa empresa, quantas pessoas ganham R\$ 260,00 e a diferença entre o maior e o menor salário.



**Quadro 1.1:** Exemplo ilustrativo de gráfico utilizado na mídia

Dois profissionais de diferentes áreas de atuação utilizam-se desses dados em suas argumentações:

O primeiro deles é o gerente da empresa e deseja motivar seus funcionários. Ele, então, afirma – “O salário médio pago por nós é de R\$ 572,00, estando, portanto, acima do valor correspondente a dois salários mínimos!”

O outro é um representante sindical dessa categoria que, ao observar os dados apresentados, conclui – “Essa empresa paga muito mal seus funcionários, pois grande parte deles ganha apenas um salário mínimo!”

As distintas conclusões de nossos personagens levam-nos à pergunta: como poderemos saber qual deles fez a melhor análise dos dados?

O exemplo mostra-nos a importância da apropriação de conceitos e habilidades elementares do campo da Estatística, como a leitura e interpretação de gráficos e o conceito de média. Surgem-nos, então, inquietações tais como: Quais as habilidades matemáticas necessárias para um cidadão ser considerado apto a compreender as inúmeras informações cotidianas, que se utilizam de métodos estatísticos em suas apresentações? E mais: Quando os gráficos facilitam essa compreensão? Quando dificultam? Qual a importância da média em uma análise de dados? Qual seu significado?

Diante de tantos questionamentos, procuramos conhecer, por meio da literatura, quais as pesquisas desenvolvidas ou em desenvolvimento na área.

Buscando apoio na literatura especializada, encontramos muitos estudos que têm dado valiosas contribuições, como é o caso das pesquisas de Curcio (1987), Strauss e Bichler (1988), de Batanero (1992, 2000b), de Magina e Maranhão (1998), de Friel, Curcio e Bright (2001), de Cazorla (2002), de Guimarães (2002), e de Stella (2003), que focalizaram a formação do aluno em leitura e interpretação de gráficos e ou conceitos estatísticos, em diferentes níveis. Verificamos ainda a pesquisa de Monteiro (1999), que estudou a leitura e interpretação de gráficos por executivos. Já Lopes (2003) e Santos (2003) preocuparam-se com a formação do professor generalista nessa área, enquanto Lopes (1998) desenvolveu também um estudo de análise curricular.

Cada um com seu foco específico, os estudos vêm demonstrando que tanto a leitura e interpretação de gráficos como o conceito de média apresentam dificuldades, quer seja para estudantes inseridos no contexto escolar, quer para

professores em sua tarefa de ensinar, quer, ainda, às pessoas adultas em seus distintos contextos.

As dificuldades observadas e a demanda social do tema conduziram-nos a especificar nossa questão de pesquisa, que se encontra explicitada na próxima seção, com o objetivo do estudo.

### 1.3 – Objetivo e questão de pesquisa

No Brasil, a inclusão da Estatística nos currículos oficiais foi feita com base na elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) publicados em 1997, que introduziu o bloco de conteúdo “Tratamento da Informação”, que está relacionado à leitura e interpretação de gráficos e conceitos estatísticos, sendo recomendado o ensino desses tópicos desde as primeiras séries do Ensino Fundamental. Portanto, o ensino da Estatística, recentemente, foi incluído nos currículos escolares, especialmente, em referência às séries iniciais.

Considerando a complexidade da leitura e interpretação de gráficos, bem como de conceitos estatísticos tanto em seu ensino-aprendizagem como em sua utilização pelo cidadão, empreendemos nossa investigação tendo como foco o “Tratamento da Informação”.

No Brasil, a recente inclusão desses conteúdos nos currículos escolares desde o nível elementar e a escassez de pesquisas na área, levou-nos à escolha de nossos sujeitos – alunos da 4<sup>a</sup> série do Ensino Fundamental.

O objetivo foi investigar o desenvolvimento da leitura e interpretação de gráficos, bem como do conceito de média aritmética por crianças da 4<sup>a</sup> série do

Ensino Fundamental por meio de uma intervenção de ensino com o uso de material manipulativo.

O conceito de média aritmética não é espontâneo, ou seja, a criança não o aprende a partir de sua experiência do dia a dia, necessita de uma aprendizagem sistemática para sua apropriação; nem tampouco a habilidade em ler e interpretar gráficos é inata ao ser humano. Nossa premissa é que eles necessitam ser ensinados, o que nos leva a pensar em meios de como fazê-lo.

Acreditamos que o contato com o concreto facilita o ensino-aprendizagem, portanto, esta pesquisa terá por hipótese principal que o material manipulativo é um facilitador na aquisição de habilidades em leitura e em interpretação de gráficos, bem como do conhecimento da média aritmética.

Para esse estudo, as noções intuitivas dos alunos constituir-se-ão nosso ponto de partida. Isto é, iniciaremos a pesquisa investigando os significados que os mesmos atribuem às expressões e situações, envolvendo o conceito de média aritmética e os dados dos gráficos. Logo, nossa preocupação inicial é identificar tais significados. Posteriormente, procederemos a uma intervenção com o uso de material manipulativo. Assim sendo, a questão de pesquisa que se apresenta neste estudo é:

***Quais as contribuições de uma intervenção de ensino com o uso de material manipulativo para o ensino-aprendizagem de conceitos elementares de Estatística nas séries iniciais do Ensino Fundamental?***

Para nos auxiliar na tarefa de prover uma resposta consistente à questão de pesquisa, tomamos outras duas questões subjacentes, a saber:

- Quais as relações que existem entre leitura e interpretação de gráficos e o conceito de média aritmética?
- Quais estratégias são facilitadas pelo material manipulativo para desenvolvimento dos conceitos elementares de Estatística em alunos das séries iniciais?

O caminho selecionado para responder a essas perguntas está descrito a seguir.

#### 1.4 – Descrição da dissertação

No capítulo inicial, evidenciamos o objetivo do estudo, fizemos algumas considerações sobre a relevância do conhecimento da Estatística sob o ponto de vista social, problematizamos o desenvolvimento de conceitos relacionados à mesma e, por fim, explicitamos nossa questão de pesquisa.

No capítulo II, trataremos da leitura e interpretação de gráficos sob dois pontos de vista: do PCN e das pesquisas. Neste último, destacamos os níveis de leitura e interpretação de gráficos de Curcio (1987), que fundamentarão o presente estudo.

No capítulo III, abordaremos o conceito estatístico de média aritmética sob os pontos de vista da Estatística, do PCN e das pesquisas na área. Neste último, ressaltaremos as propriedades da média aritmética propostas por Strauss e Bichler (1988), já que pretendemos considerá-las em nossa pesquisa.

No capítulo IV, apresentaremos os temas que tomamos como subsídios teóricos psicológicos para o desenvolvimento do estudo. Nesse capítulo, discutiremos idéias de autores, como Vergnaud e Piaget.

No capítulo V, descreveremos a metodologia adotada no estudo. Aqui apresentaremos nosso universo de pesquisa, isto é, delimitaremos a população-alvo a ser pesquisada. Descreveremos ainda o desenho de nosso experimento, que consta da aplicação de instrumentos diagnósticos e de uma intervenção de ensino.

No capítulo VI, analisaremos quantitativa e qualitativamente os resultados dos instrumentos diagnósticos e da intervenção de ensino. Buscaremos relacionar a análise desses resultados às idéias teóricas discutidas nos capítulos II, III e IV.

No capítulo VII, responderemos as questões da pesquisa e apresentaremos nossas conclusões, que estão baseadas na análise feita no capítulo anterior. Ainda neste capítulo, procuraremos apresentar sugestões para futuras pesquisas.

No capítulo final, listaremos a bibliografia referida nesta pesquisa.

## **CAPÍTULO II**

# **A LEITURA E INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICOS**

## CAPÍTULO II

### A LEITURA E INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICOS

#### 2.1 – Introdução

A leitura e interpretação de gráficos permeará todo nosso trabalho de pesquisa. Em algumas atividades do experimento, a leitura e interpretação de gráficos constituir-se-á em uma habilidade a ser ensinada, ao passo que em outras, se tornará uma habilidade necessária, uma vez que desenvolvemos o conceito de média aritmética baseada em dados apresentados em um gráfico. Portanto, todas as questões exigirão a leitura e interpretação de gráficos, e, em algumas delas, ler e interpretar dados será especificamente, o objeto de estudo e naquelas em que o conceito de média será enfocado, a mesma estará subjacente.

Tendo em vista a importância da leitura e interpretação de gráficos para nosso trabalho, neste capítulo, trataremos do tema sob dois pontos de vista – o dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)<sup>1</sup> e o de alguns pesquisadores, dentre os quais destacaremos Curcio (1987).

#### 2.2 – A leitura e interpretação de gráficos sob o ponto de vista do PCN

O ensino de leitura e interpretação de gráficos está ora subjacente às indicações constantes no PCN ora, especificamente, referenciado.

---

<sup>1</sup> Ao longo deste trabalho, referir-nos-emos aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (1ª a 4ª séries) – volume 3 – Matemática, simplesmente, como PCN.

Iniciando pelos objetivos gerais do Ensino Fundamental enumerados pelo PCN, percorremos este documento pontuando as menções feitas à leitura e interpretação de gráficos pelo mesmo, com o objetivo de evidenciar a importância desse ensino, bem como para destacar as orientações desse documento adotadas na pesquisa.

A leitura e interpretação de gráficos relaciona-se a, pelo menos, três dos objetivos gerais do Ensino Fundamental constantes no PCN (BRASIL, 1997, p. 8), a saber:

- 1) “Utilizar as diferentes linguagens – verbal, matemática, gráfica, plástica e corporal – como meio para produzir, expressar e comunicar suas idéias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação;”

A linguagem gráfica inclui os diversos tipos de gráficos e tabelas e constitui um valioso recurso para expressar, interpretar e comunicar idéias e produções.

- 2) “Saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos;”

Jornais televisivos e impressos, revistas, livros, das mais diferentes áreas do conhecimento utilizam-se de gráficos e tabelas como forma de transmitir informações. Por meio da leitura e interpretação dessas informações, o aluno poderá construir novos conhecimentos;

- 3) “Questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.”

Não raro, os gráficos apresentam os dados de um determinado problema, cuja solução exige uma análise estatística que, por sua vez, requer a aplicação do pensamento estatístico inferencial e não apenas da Estatística descritiva, na qual se insere a leitura e interpretação de gráficos. Utilizando a Estatística indutiva ou inferencial, o aluno poderá tirar conclusões fundamentadas em dados e tomar decisões acertadas.

Na subseção “O Papel da Matemática no Ensino Fundamental”, o PCN relaciona a leitura e interpretação de gráficos à construção da cidadania e à interação da Matemática com alguns temas transversais.

Quanto à formação básica para a cidadania, o PCN (BRASIL, 1997, p. 30) destaca que

“A compreensão e a tomada de decisões diante de questões políticas e sociais também dependem da leitura e interpretação de informações complexas, muitas vezes contraditórias, que incluem dados estatísticos e índices divulgados pelos meios de comunicação. Ou seja, para exercer a cidadania, é necessário saber calcular, medir, raciocinar, argumentar, tratar informações estatisticamente, etc.”

Temos, portanto, aqui, uma referência explícita à necessidade do ensino de leitura e interpretação de gráficos desde o Ensino Fundamental.

Monteiro destaca que gráficos “inseridos no contexto de determinada reportagem, podem constituir-se num instrumento das intenções de quem organiza as informações, seja para encobrir ou realçar determinados aspectos da notícia.” (MONTEIRO, 1999, p. 2). Esta problemática leva a uma maior ênfase no ensino de conhecimentos estatísticos.

Quanto ao desenvolvimento da Matemática interagindo com temas transversais, o PCN salienta a leitura e interpretação de gráficos em trabalhos relacionados ao meio ambiente e saúde, temas importantes para a formação do cidadão.

Destacamos, ainda, dentre os objetivos gerais de Matemática para o Ensino Fundamental listados pelo PCN (BRASIL, 1997, p. 51):

“Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos do ponto de vista do conhecimento e estabelecer o maior número possível de relações entre eles, utilizando para isso o conhecimento matemático (aritmético, (...), estatístico, combinatório, probabilístico); selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente;”

A produção de informações pode ser feita por meio de gráficos, que, segundo Pinker, “apresentam a informação de uma forma mais amena para as pessoas perceberem e raciocinarem mais facilmente sobre ela.” (PINKER, apud CARZOLA, 2002, p. 3).

De maneira bastante específica, o PCN lista como objetivo de Matemática para o primeiro ciclo, isto é, desde as duas primeiras séries do Ensino Fundamental o uso de gráficos para a leitura e interpretação de informações e

para comunicação das mesmas, no seguinte item: “Identificar o uso de tabelas e gráficos para facilitar a leitura e interpretação de informações e construir formas pessoais de registro para comunicar informações coletadas.” (BRASIL, 1997, p. 66)

A seguir, ressaltamos os conteúdos conceituais e procedimentais enumerados pelo PCN (BRASIL, 1997, p. 74-75), no bloco “Tratamento da Informação”, relacionados à leitura e interpretação de gráficos:

- “Leitura e interpretação de informações contidas em imagens.
  - Coleta e organização de informações.
  - Criação de registros pessoais para comunicação das informações coletadas.
- (...)
- Interpretação e elaboração de listas, tabelas simples de dupla entrada e gráficos de barras para comunicar a informação obtida.
  - Produção de textos escritos a partir da interpretação de gráficos e tabelas.“

Nos conteúdos atitudinais pontuados pelo PCN (BRASIL, 1997, p. 75), encontramos dois deles que podem vir a ser desenvolvidos em atividades de leitura e interpretação de gráficos:

- 1) “Interesse por conhecer, interpretar e produzir mensagens, que utilizam formas gráficas para apresentar informações.

2) Apreciação da organização na elaboração e apresentação dos trabalhos.”

As pontuações do PCN para o segundo ciclo do Ensino Fundamental, que levantaremos agora, com relação a gráficos, muito nos interessam, uma vez que os sujeitos de nossa pesquisa estão inseridos na segunda série desse ciclo, ou seja, na 4ª série do Ensino Fundamental. Interessamos, também, para o desenvolvimento da intervenção de ensino, as orientações que destacaremos a seguir.

Dentre os objetivos específicos de Matemática para este ciclo, ressaltamos os seguintes:

- “Recolher dados e informações, elaborar formas para organizá-los e expressá-los, interpretar dados apresentados sob forma de tabelas e gráficos e valorizar essa linguagem como forma de comunicação.” (BRASIL, 1997, p. 81)

Nas primeiras atividades de nossa intervenção de ensino, partimos da coleta de dados feita pelos alunos para após representá-los em um gráfico, como também tomamos dados pré-organizados para a construção do gráfico. A leitura e interpretação de gráficos é solicitada em todas as atividades desenvolvidas.

- “Identificar características de acontecimentos previsíveis ou aleatórios a partir de situações problema, utilizando recursos estatísticos e probabilísticos.” (BRASIL, 1997, p. 81)

Situações-problema que serão propostas aos alunos requererão deles a identificação de tendência ou cálculo de previsão, necessitando, portanto, que utilizem a inferência estatística.

Os conteúdos conceituais e procedimentais especificados no PCN (BRASIL, 1997, p. 90-91), no bloco “Tratamento da Informação” e, citados a seguir, serão contemplados no transcorrer de nossas atividades de ensino, sendo dada maior ênfase aos dois últimos:

- “Coleta, organização e descrição de dados.
- Leitura e interpretação de dados apresentados de maneira organizada (por meio de listas, tabelas, diagramas e gráficos) e construção dessas representações.
- Interpretação de dados apresentados por meio de tabelas e gráficos, para identificação de características previsíveis ou aleatórias de acontecimentos.”

O PCN (BRASIL, 1997, p. 93) enumera dois conteúdos atitudinais relacionados ao trabalho com gráficos, que aparecem subjacentes às atividades de nossa intervenção de ensino:

- “Interesse na leitura de tabelas e gráficos como forma de obter informações.
- Hábito em analisar todos os elementos significativos presentes em uma representação gráfica, evitando interpretações parciais e precipitadas.”

Ao término desta tarefa de olhar a leitura e interpretação sob o ponto de vista do PCN, a relevância de seu ensino desde as séries iniciais evidenciou-se para nós, bem como suas diversas aplicações à vida do homem.

As pesquisas de Holmes (1980 apud Batanero 2000a); de Lopes (1998) e de Batanero (2000b) apontam nessa mesma direção, destacando a importância da inclusão do tema nos currículos escolares desde as primeiras séries do Ensino Fundamental. No trabalho de Lopes (2003), encontramos a Estatística sendo ensinada, com sucesso, desde a Educação Infantil.

### 2.3 – A leitura e interpretação de gráficos sob o ponto de vista das pesquisas sobre o tema em referência

Nesta seção, abordaremos os resultados de algumas pesquisas sobre a leitura e interpretação de gráficos. Iniciaremos com Cazorla (2002) que desenvolveu uma pesquisa sobre o assunto, tendo como sujeitos estudantes do Ensino Superior. O objetivo foi investigar quais fatores contribuem na extração de informação de gráficos, seu trabalho restringiu-se aos gráficos de barras e de linhas.

Conforme a autora citada, o sucesso na leitura de gráficos depende do domínio de conceitos estatísticos, do background gráfico, da habilidade visopictórica<sup>2</sup>, do conhecimento prévio de gráficos e do gênero. Quanto ao tipo de gráficos, o gráfico de barras simples apresentou a menor dificuldade de leitura; quanto ao gênero, o desempenho dos alunos do sexo masculino foi superior ao das alunas.

Temos ainda um outro trabalho de pesquisa com indivíduos adultos, o de Monteiro (1999) que investigou o processo de interpretação de gráficos entre

---

<sup>2</sup> Habilidade visopictórica é um “componente da habilidade matemática, caracterizada pela predominância dos componentes visofigurativos e fortemente marcada por conceitos espaciais” (CAZORLA, 2002, p. 149)

leitores da mídia impressa (jornais e ou revistas) que exerciam atividades profissionais no ramo da Economia. Monteiro afirma que a interpretação de gráficos não se constitui em uma simples apreensão dos dados apresentados graficamente, é necessária uma interação dos leitores com os mesmos, mobilizando conhecimentos e ou experiências prévias.

Santos (2003) desenvolveu um estudo de caso com uma professora das séries iniciais do Ensino Fundamental, utilizando o ambiente computacional com o objetivo de investigar o processo de formação e desenvolvimento de conceitos matemáticos referentes ao bloco de conteúdos “Tratamento da Informação”, por parte do professor. Os resultados apontam para a importância da coleta e organização dos dados em tabelas no estudo de um conjunto de dados, e para o papel do computador que pode contribuir de forma significativa ao entendimento dos gráficos e tabelas extraídas da manipulação desses dados, porém, o uso inadequado de um de seus recursos pode atrapalhar o estudo de uma representação dos dados e o desenvolvimento de outros conceitos.

Guimarães (2002) investigou como alunos da 3ª série do Ensino Fundamental representam dados em tabelas e gráficos de barras; seus resultados revelam uma maior dificuldade dos alunos para compreender dados apresentados em tabelas, facilidade em localizar pontos extremos em um gráfico de barras, uso da análise variacional ao extrapolar um gráfico e dificuldade com escalas que apresentavam valores não explícitos.

O estudo de Selva (2003) realizado com alunos da pré-escola e da 1ª série do Ensino Fundamental investigou o uso de gráficos de barras, como suporte representacional, associado ao emprego de material manipulativo

(blocos) na resolução de problemas aditivos. Os resultados confirmam estudos anteriores que mostraram dificuldades por parte das crianças ao lidarem com alguns conceitos matemáticos relacionados à construção e interpretação de gráficos, como também indicam que a combinação entre gráficos de barras e problemas verbais com blocos pode auxiliar no trabalho com gráficos.

A pesquisa de Magina e Maranhão (1998) utilizou as representações do software Tabletop, sendo uma delas a representação cartesiana para analisar o significado que 30 estudantes de 5<sup>a</sup> e 6<sup>a</sup> séries do Ensino Fundamental davam a um banco de dados. Os resultados indicaram que a manipulação de dados é um bom caminho para dar significado à representação de eixos cartesianos e, a fase de coleta de dados efetuada pelos próprios alunos é importante para a fase de análise de dados.

Uma análise curricular das propostas oficiais de alguns estados brasileiros (São Paulo, Minas Gerais e Santa Catarina), tomando como referência alguns currículos internacionais de Matemática (Espanha, Estados Unidos, França, Inglaterra, Itália, Japão e Portugal), nos quais se tem destacado o ensino de Estatística e Probabilidade para o Ensino Fundamental, realizada por Lopes (1998), evidencia o trabalho com leitura e interpretação de gráficos desde as primeiras séries do que corresponde, no Brasil, ao Ensino Fundamental, na maioria dos currículos internacionais analisados.

As propostas curriculares nacionais analisadas apresentam divergência quanto à indicação da série escolar a se iniciar o ensino da leitura e interpretação de gráficos, sendo o mesmo proposto desde a Educação Infantil, no currículo de

Santa Catarina; desde a 3ª série do Ensino Fundamental, no currículo paulista e; desde a 6ª série do Ensino Fundamental, na proposta curricular mineira.

Destacamos a pesquisa de Curcio (1987), desenvolvida com alunos de 4º a 7º graus das escolas americanas, estudando o efeito que, os fatores enumerados a seguir têm sobre a compreensão das relações matemáticas expressas em gráficos: a) conhecimento prévio do tema a que se refere o gráfico; b) conhecimento prévio do conteúdo matemático do gráfico; c) conhecimento prévio do tipo de gráfico empregado.

O autor citado analisou também o efeito da idade e do curso escolar sobre a compreensão de gráficos. Especificaremos na próxima seção os três níveis de interpretação e ou compreensão de gráficos enumerados por Curcio (1987), relatando ainda alguns de seus resultados.

### **2.3.1 – Níveis de interpretação e ou compreensão de gráficos**

Vários autores, como Bertin (1983), McKnight (1990), Carswell (1992), Wainer (1992) e Curcio (1987), de acordo com suas pesquisas, caracterizam os tipos de questões referentes a um gráfico em três diferentes níveis de compreensão. Entretanto, cada um deles utiliza-se de uma terminologia própria ao designar os níveis de interpretação de gráficos.

Ao classificarmos o nível de compreensão do gráfico de nossas questões, usaremos a terminologia de Curcio (1987). Apresentamos abaixo um quadro-resumo das idéias do autor, caracterizando cada um desses níveis, acompanhados de um exemplo, ou seja, uma questão que, por sua vez, se refere a um gráfico.

<b>Nível 1 “LER OS DADOS”</b>	<b>Nível 2 “LER ENTRE OS DADOS”</b>	<b>Nível 3 “LER ALÉM DOS DADOS”</b>
Consiste em levantar informação do gráfico para responder a questão explícita para a qual a resposta óbvia está no gráfico.	Inclui a interpretação e integração dos dados apresentados no gráfico e requer a habilidade para comparar quantidades e o uso de outros conceitos e habilidades matemáticas.	Requer que o aluno realize previsões e inferências a partir dos dados, porém, sobre informações que não estão diretamente descritas no gráfico. Requer, também, conhecimento a priori sobre a questão que está relacionada ao gráfico.
<u>Exemplo:</u> Quantas caixas de uva têm 30 uvas?	<u>Exemplo:</u> Quantas caixas de uva têm mais de 34 uvas?	<u>Exemplo:</u> Se os alunos abrissem mais uma caixa de uva, quantas uvas esperaríamos encontrar nela?

**Quadro 2.1:** Níveis de leitura e interpretação de gráficos, conforme Curcio (1987)

Os resultados da pesquisa de Curcio (1987) apontam que as principais dificuldades em leitura e interpretação de gráficos aparecem nos níveis 2 e 3. Encontramos, ainda, resultados semelhantes na pesquisa de Friel, Curcio e Bright (2001, p. 130-132), na qual se verifica que os alunos apresentam um grau crescente de dificuldade em questões do nível 1 para o nível 3.

“Os alunos apresentam pouca dificuldade com questões do nível ler os dados, mas eles cometem erros ao encontrarem questões que exigem ler entre os dados. (...) Questões que exigem ler além dos dados parecem ser um desafio maior”.

Nos instrumentos diagnósticos – pré-teste e pós-teste –, contemplamos, pelo menos, uma questão de cada um dos níveis acima. Em sua maioria, estas questões situam-se no nível 2 – “ler entre os dados”.

Na intervenção de ensino, em virtude de podermos apresentar mais questões em diversas situações, incluímos um maior número de questões do nível 3 – “ler além dos dados”, que exigem a aplicação de inferência estatística. Mas, permanecemos com a maior parte delas requerendo uma leitura entre os dados, isto é, nível 2, tendo em vista que as questões envolvendo o conceito de média aritmética encontram-se neste nível e este conceito constituiu-se em um dos focos da segunda fase de nossa pesquisa – a intervenção.

No próximo capítulo, apresentaremos o conceito de média sob distintos pontos de vista.

# **CAPÍTULO III**

## **MÉDIA SOB DIFERENTES PONTOS DE VISTA**

# CAPÍTULO III

## MÉDIA SOB DIFERENTES PONTOS DE VISTA

### 3.1 – Introdução

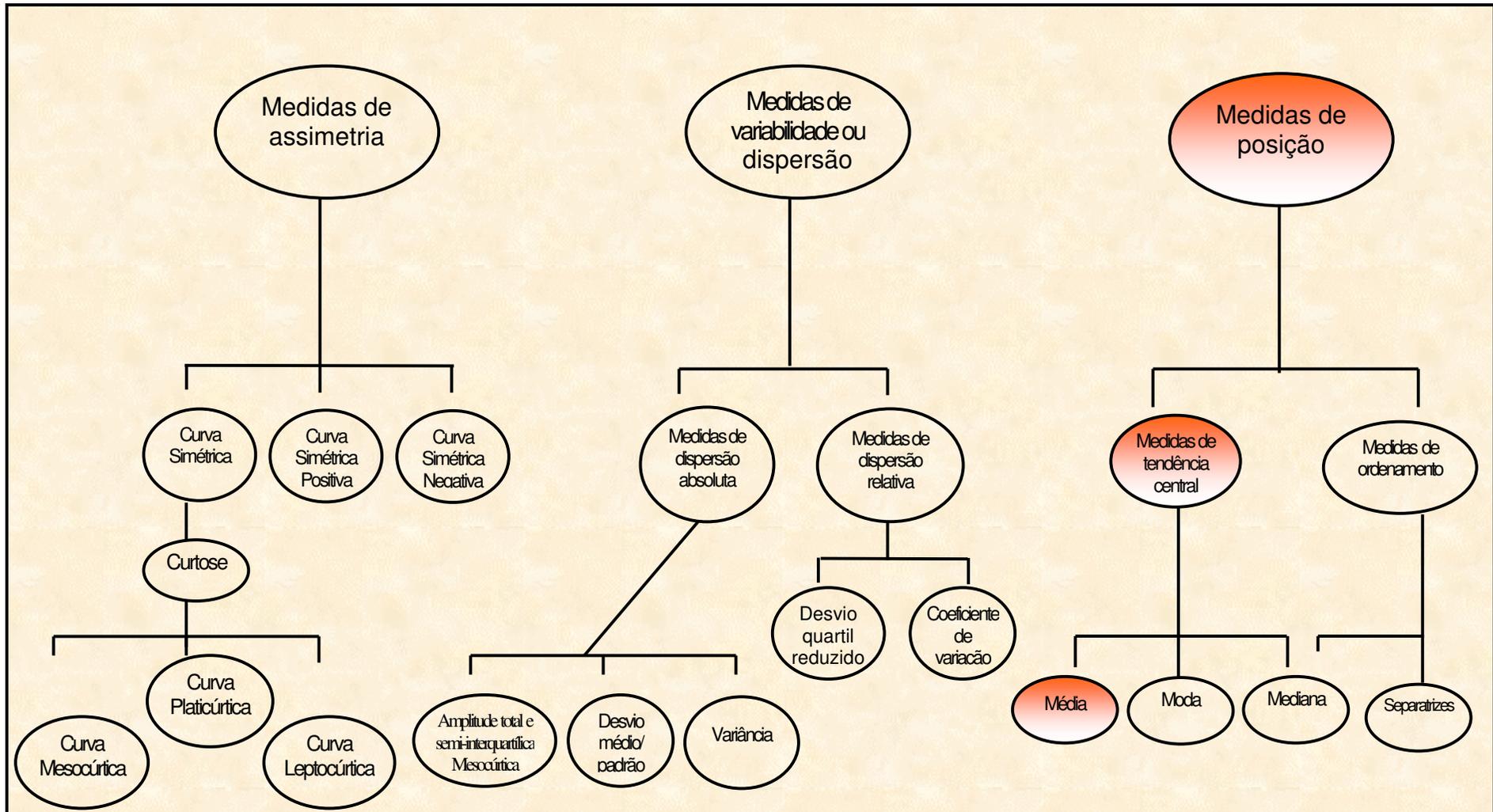
Tal qual fizemos no capítulo anterior, buscaremos apresentar aqui a média sob diferentes pontos de vista. Iniciaremos o capítulo, discutindo-a baseados no olhar estatístico. Na seqüência, olharemos a média do ponto de vista do PCN. Por fim, apresentaremos alguns estudos sobre esse conceito que influenciaram nosso trabalho.

### 3.2 – A média sob o ponto de vista da Estatística

Os dados estatísticos podem ser sumarizados por intermédio de certas quantidades denominadas medidas. Na Estatística, temos as Medidas de Assimetria, as Medidas de Variabilidade ou Dispersão e as Medidas de Posição. Dentre estas, destacamos as medidas de posição que nos orientam quanto à posição da distribuição em relação ao eixo horizontal (eixo das abscissas).

As medidas de posição, por sua vez, subdividem-se em medidas de tendência central e medidas de ordenamento. Aquelas de tendência central são assim denominadas pelo fato de os dados observados tenderem, em geral, a se agruparem em torno dos valores centrais. A média constitui-se em uma das medidas de tendência central, além da moda e da mediana.

Citamos do trabalho de Stella (2003), o quadro-resumo dos elementos típicos de uma distribuição para melhor situar o leitor quanto à posição do conceito de média na Estatística.



**Quadro 3.1:** Elementos típicos de uma distribuição<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Fonte: STELLA (2003), p. 21.

Buscando especificar e diferenciar o conceito de média dentre as três medidas de tendência central – média, moda e mediana – apresentamos abaixo as definições das mesmas dadas por Crespo (2002, p. 80).

“Média aritmética ( $\bar{x}$ ) é o quociente da divisão da soma dos valores da variável pelo número deles:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

sendo:

$\bar{x}$  a média aritmética;

$x_i$  os valores da variável;

$n$  o número de valores.”

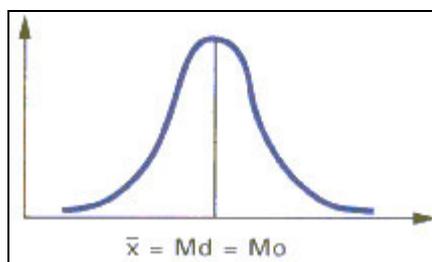
Toledo e Ovalle (1995) apresentam vários tipos de médias – média aritmética (simples e ponderada), média geométrica, média harmônica, média quadrática, média cúbica e média biquadrática. Em nosso trabalho, trataremos da média aritmética simples.

“Moda ( $M_o$ ) é o valor que ocorre com maior frequência em uma série de valores.” (CRESPO, 2002, p.89)

“A Mediana ( $M_d$ ) de um conjunto de valores, ordenados segundo uma ordem de grandeza, é o valor situado de tal forma no conjunto que o separa em dois subconjuntos de mesmo número de elementos.” (CRESPO, 2002, p. 93)

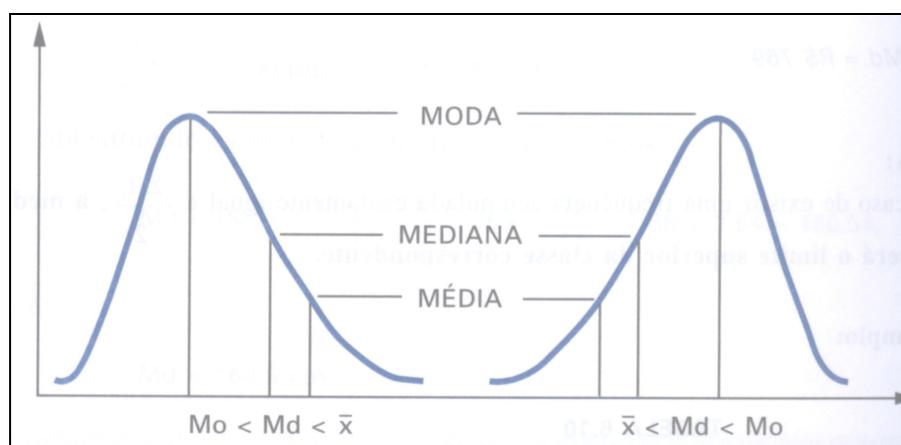
As medidas de tendência central guardam entre si diferentes relações, conforme o tipo de distribuição a que se encontram relacionadas. Em uma

distribuição simétrica, as três medidas coincidem, o que podemos visualizar pelo gráfico seguinte:



**Figura 3.1:** Curva de frequência simétrica<sup>2</sup>

No entanto, as três medidas de tendência central em distribuições assimétricas tornam-se diferentes e essa diferença é tanto maior quanto maior for a assimetria. No gráfico abaixo, temos, respectivamente, uma curva assimétrica positiva e outra assimétrica negativa.



**Figura 3.2:** Curvas de frequência assimétricas positiva e negativa.<sup>3</sup>

Desta forma, a escolha de uma das medidas de tendência central está relacionada ao tipo de distribuição a ser analisada e, também, com o objetivo pretendido na sumarização dos dados. A média aritmética é preferível às demais

<sup>2</sup> Fonte: CRESPO, 2002, p. 100.

<sup>3</sup> Fonte: CRESPO, 2002, p. 100.

medidas quando se trata de muitas classes de populações, por haver menos variabilidade entre as médias aritméticas calculadas a partir de várias amostras aleatórias, logo é a medida de posição que possui a maior estabilidade. A mediana é preferível quando se está interessado em conhecer exatamente o ponto médio da distribuição, ou ainda, quando os resultados extremos são tais que podem afetar sensivelmente o valor da média. A moda é utilizada quando pretendemos apenas uma medida rápida e aproximada da tendência central.

Segundo Batanero (2000b), uma análise epistemológica do significado de um conceito é necessária para uma reflexão sobre a dificuldade que o aluno possui na aprendizagem desse conceito. Em sua análise epistemológica do conceito de média, a autora aponta a prática de somar um conjunto de valores dados e dividir pelo número de valores, ao se resolver problemas de estimação de quantidade desconhecida, como o germen do conceito de média aritmética.

Os astrônomos da Babilônia, para determinar, baseados em um conjunto de medidas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a melhor estimação possível, calculavam a soma total das observações e dividiam pelo número de dados (PLACKETT, 1970, apud BATANERO, 2000b).

Essa prática pode ser exemplificada pelo seguinte problema:

“Um objeto pequeno é pesado por oito estudantes de uma classe, com um mesmo instrumento, obtendo-se os seguintes valores em gramas: 6'2, 6'0, 6'0, 6'3, 6'1, 6'23, 6'15, 6'2. Qual será a melhor estimativa do peso do objeto?” (BATANERO, 2000b, p. 2)

Posteriormente, após o estudo e a caracterização das propriedades da média, esse conceito passou a ser aplicado à solução de outras situações, como a apresentada no problema a seguir:

“Algumas crianças levam doces para a classe. André leva 5, Maria 8, José 6, Carmem 1 e Daniel não leva nenhum. Como repartir os doces de forma eqüitativa?” (BATANERO, 2000b, p. 3)

Nessa situação, tomamos a média aritmética para encontrar uma quantidade eqüitativa a repartir, obtendo uma distribuição uniforme. Outros exemplos desta situação são – a obtenção da renda per capita, da velocidade média durante uma viagem e da classificação final em um exame composto de várias fases.

Uma outra aplicação da média aritmética é servir de elemento representativo para um conjunto de valores obtidos, cuja distribuição seja, aproximadamente, simétrica, como ilustra o problema abaixo:

“Ao medir a altura em centímetros, que um grupo de alunos pode saltar, antes e depois de efetuado um certo treinamento desportivo, obteve-se os valores seguintes. O treinamento foi efetivo?” (BATANERO, 2000b, p. 3)

		ALTURA SALTADA EM CENTÍMETROS									
Aluno		Ana	Bea	Carol	Diana	Elena	Fanny	Gia	Hilda	Inês	Joana
Antes do	treinamento	115	112	107	119	115	138	126	105	104	115
Depois do	treinamento	128	115	106	128	122	145	132	109	102	117

Se a distribuição for muito assimétrica, o valor mais freqüente (Moda) ou o valor central no conjunto de dados ordenados (Mediana) poderá ser mais representativo. Logo, dada uma distribuição de freqüência necessário se faz questionarmos: Qual das medidas de posição central (Média, Moda e Mediana) será a que melhor representa o conjunto dos dados?

A média aritmética é empregada, ainda, nas ocasiões que necessitamos conhecer o valor que obteremos com maior probabilidade ao tomarmos, ao acaso, um elemento de uma população. Por exemplo, ao predizermos o peso médio de todas as pessoas que na população têm a altura dada.

Portanto, podemos enumerar quatro situações diferentes, nas quais a média aritmética pode ser utilizada, a saber:

- 1 – cálculo da melhor estimativa de valor desconhecido;
- 2 – cálculo da quantidade eqüitativa;
- 3 – cálculo do melhor valor representativo dos dados obtidos;
- 4 – obtenção do valor mais provável.

Em nossa intervenção de ensino, trabalharemos com duas das situações citadas anteriormente, a saber – média como quantidade eqüitativa e média como melhor valor representativo dos dados.

### 3.3 – A média sob o ponto de vista do PCN

No PCN, encontramos poucas referências ao ensino do conceito de média aritmética nesses ciclos escolares (1<sup>a</sup> a 4<sup>a</sup> séries). De fato, a ênfase em média aritmética é dada nos dois últimos ciclos do Ensino Fundamental, quando o PCN (BRASIL, 1998) especifica o ensino das medidas de tendência central (média, mediana e moda), no volume relativo a esses ciclos (5<sup>a</sup> a 8<sup>a</sup> séries). Neste documento, as medidas estatísticas são tomadas como elementos para interpretação de dados.

A primeira menção feita pelo PCN (de 1<sup>a</sup> a 4<sup>a</sup> séries) ao termo “média” acontece na seção “matemática e os temas transversais”, apontando-o como uma ferramenta para a compreensão dos fenômenos que ocorrem no meio ambiente, contudo, nessa referência não há uma especificação quanto a seu ensino, utilizando o termo no plural “médias”.

Esta menção é feita na citação a seguir:

“A compreensão dos fenômenos que ocorrem no ambiente – poluição, desmatamento, limites para uso dos recursos naturais, desperdício – terá ferramentas essenciais em conceitos (médias, áreas, volumes, proporcionalidade, etc.) e...” (BRASIL, 1997, p. 33)

Acreditamos que o conceito de média seja uma ferramenta de análise de dados estatísticos importante, não apenas no desenvolvimento do tema transversal “Meio Ambiente”, mas também em muitos outros temas.

Dentre os temas listados pelo PCN sob o título “Outros temas”, destacamos a “educação do consumidor”, na qual a média aritmética é muito utilizada na apresentação dos dados de consumo de bens e serviços, tais como: energia elétrica, água e gás.

Ao tratar do ensino e aprendizagem de Matemática no primeiro ciclo do Ensino Fundamental, o documento não faz nenhuma referência ao conceito de média, vindo a explicitá-lo nos conteúdos conceituais e procedimentais do segundo ciclo, no bloco “Tratamento da Informação”:

- “Obtenção e interpretação de média aritmética.” (BRASIL, 1997, p. 91).

Neste item, a orientação é específica quanto ao ensino de média a ser desenvolvido, visa não apenas à aprendizagem de seu cálculo, o que entendemos pela palavra “obtenção”, mas também à compreensão de seu significado no contexto dos dados, isto é, sua interpretação.

Em nossas atividades, buscamos levar os alunos a desenvolver uma compreensão ampla do conceito de média aritmética, por meio de atividades que integrassem o cálculo da média a questões, na qual a mesma fosse utilizada como uma ferramenta necessária à resolução do problema.

### 3.4 – A média sob o ponto de vista das pesquisas sobre o tema em referência

Existem pesquisas que tratam do conceito de média em diferentes níveis de escolaridade, dentre estas aquelas cujos sujeitos são alunos universitários, citamos a de Mevarech (1983) que encontrou uma porcentagem alta de alunos que atribuem, erroneamente, à média aritmética alguma das propriedades da adição e da multiplicação, tais como: fechamento

( $\frac{10 \times 3 + 20 \times 5}{30} = 4,3 \neq 4,0 = \frac{3+5}{2}$ , ou seja, a média total de dois grupos um com peso

10 e média 5, é diferente da média, em que os grupos apresentam o mesmo

peso); associativa ( $\frac{(a+b)+c}{2} \neq a + \frac{(b+c)}{2}$ ); elemento neutro (não existe  $x$  tal que

$\bar{x} \cdot x = \bar{x}$ ) e elemento inverso ( $(\bar{x} \cdot (-\bar{x})) \neq 0$ ,  $\bar{x}$  e  $(-\bar{x})$  são médias de grupos de pesos diferentes).

Cazorla (2002) também trabalhou com estudantes do ensino superior e, ao investigar a relação do domínio de conceitos estatísticos com a leitura de gráficos, restringiu-se ao conceito de média aritmética. Pautada nos dados obtidos, a autora conclui que seus sujeitos dominam o conhecimento procedimental da média aritmética, mas não, o conhecimento conceitual, uma vez que os mesmos conheciam o algoritmo (da média simples), algumas propriedades, porém não dominavam o conceito de média ponderada e propriedades, tais como – o cálculo da média inclui todos os valores da variável, inclusive, os valores zero e os negativos. As distâncias positivas dos valores da variável em relação à média anulam as distâncias negativas, conceito que origina variância e desvio-padrão, como medidas de variabilidade e não conseguiram interpretar a média de uma variável discreta.

Outro resultado apontado é que os sujeitos viam a média apenas como uma medida de tendência central, que representa um conjunto de dados, ou seja, restrita a seu papel descritivo, não a conseguiram ver como uma medida de inferência estatística, como um estimador que ajuda na estimativa de parâmetros e no teste de hipótese.

A seguir, citamos algumas pesquisas desenvolvidas com alunos do nível fundamental de ensino. Como, por exemplo, a pesquisa de Cai (1995) que analisou a compreensão do conceito de média de 250 alunos da sexta série. Os resultados mostraram que 90% dos alunos conheciam o algoritmo da média. A maioria apresentou, portanto, um conhecimento computacional desse conceito e, só 50% deles foram capazes de aplicá-lo em problemas contextualizados, concluindo que apenas esses tinham conhecimento conceitual da média.

Mokros e Russell (1995) estudaram a concepção que alunos da quarta a oitava séries têm sobre medidas de tendência central e representatividade. Encontraram cinco categorias que caracterizam as concepções desses alunos, a saber: a) medida de tendência como moda (valor mais freqüente); b) medida de tendência como algoritmo (fórmula de cálculo); c) medida de tendência como valor razoável; d) medida de tendência como ponto médio; e) medida de tendência como ponto de balanço.

Dentre as pesquisas desenvolvidas no nível médio de ensino, destacamos a de Stella (2003) que investigou as interpretações do conceito de média de alunos do Ensino Médio, que seguem o currículo brasileiro, identificando quais características desse conceito são enfatizadas em documentos oficiais (PCN), livros didáticos e sistemas de avaliação Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e Exame Nacional do Ensino Médio(ENEM).

Os resultados sugerem problemas no aprendizado do conceito de média, uma vez que os livros didáticos do Ensino Médio analisados abordam o conceito média de forma algorítmica (ou seja, utilização de situações em que são explicitados todos os dados e o número de parcelas, solicitando ao aluno apenas o cálculo da média), apresentando uma abordagem tecnicista, ou ainda, nem sequer citam esse conteúdo. Como consequência deste tipo de abordagem, os alunos têm muito forte a concepção algorítmica da média.

Assim, os resultados da pesquisa sugerem ainda que os estudantes interpretam média como moda e ou mediana e não estão acostumados a distinguir as diferentes medidas de tendência central ou estabelecer qual a melhor medida a ser utilizada.

Quanto aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental e Médio, segundo a autora, o conceito de média é apresentado de forma mais significativa, ao enfatizar as medidas de tendência central e ao deixar subentendida a necessidade do estudo de tais conteúdos para o desenvolvimento das habilidades de descrever e analisar um grande número de dados.

No que se refere aos sistemas de avaliação, o SAEB, em relação às questões que envolvem o conceito de média, segue o mesmo estilo do livro didático, são tecnicistas. No ENEM, o “Tratamento da Informação” resume-se apenas a gráficos e tabelas.

Lopes (1998) realizou uma análise curricular das propostas oficiais de alguns estados brasileiros (São Paulo, Minas Gerais e Santa Catarina), tomando como referência alguns currículos internacionais de Matemática (Espanha, Estados Unidos, França, Inglaterra, Itália, Japão e Portugal), nos quais se tem destacado o ensino de Estatística e Probabilidade para o Ensino Fundamental.

Nos currículos internacionais analisados, o ensino da média aritmética é introduzido nos primeiros anos de escolaridade da criança, com exceção do currículo japonês, no qual os cálculos de média e mediana são ensinados a partir do ensino intermediário (Chugakko).

Destacamos o trabalho com média aritmética do currículo francês, no qual as crianças reúnem castanhas apanhadas separadamente e as redistribuem em partes iguais, podendo considerar, eventualmente, números fracionários. Quanto às propostas curriculares brasileiras analisadas, o ensino da média é mencionado apenas na proposta mineira a partir da 8ª série do Ensino Fundamental.

Dentre os conceitos estatísticos abordados no estudo de caso com uma professora do 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental elaborado por Santos (2003), figura a média aritmética. Em uma das questões de média analisada, a professora interpretou a expressão “em média” como o ponto de máximo e depois como “mais ou menos”. Seus resultados indicaram que, embora o sujeito da pesquisa conhecesse os procedimentos para cálculos de média, apresentou dificuldades para dar sentido a esses procedimentos e ao utilizá-los de forma apropriada a cada situação, mesmo quando realizou o cálculo com o auxílio do computador.

Por último, destacamos a pesquisa de Strauss e Bichler (1988) que investigaram o desenvolvimento evolutivo da compreensão da média em 80 alunos de 8 a 14 anos de idade, apresentando-lhes tarefas que se constituíram de histórias hipotéticas, concretas e numéricas, com números de grandeza contínua e discreta. Os resultados não apontam diferença entre a forma de apresentação e a natureza do problema, melhorando a compreensão dos conceitos entre alunos mais velhos. Conforme esses autores, a média aritmética possui sete propriedades da média, que serão descritas na próxima seção.

### **3.4.1 – Propriedades da média aritmética**

Da pesquisa de Strauss e Bichler (1988), citada anteriormente, destacaremos as propriedades da média aritmética, que são encontradas ainda nos escritos de Batanero (2000b, 2001). Essas propriedades são apresentadas, de acordo com três aspectos, a saber: estatístico, abstrato e representativo.

Para uma melhor explicitação dessas propriedades, elaboramos um Quadro (3.2) com a descrição das sete propriedades da média aritmética e um exemplo ilustrativo.

PROPRIEDADES DA MÉDIA ARITMÉTICA						
ASPECTO ESTATÍSTICO (relativo à média como função matemática)			ASPECTO ABSTRATO (relativo a valores não-observados)			REPRESENTATIVO (de um conjunto de dados)
Propriedade A	Propriedade B	Propriedade C	Propriedade D	Propriedade E <sup>4</sup>	Propriedade F	Propriedade G
A média é um valor compreendido entre os extremos.	A soma das variações da média é zero.	O valor médio pode ser influenciado pelos valores de cada um dos dados.	A média não é, necessariamente, igual a um dos valores dos dados.	A média pode ser uma fração que não tenha equivalente na realidade física.	Tem-se que ter em conta os valores nulos no cálculo da média.	O valor médio é representativo dos valores mediados.
EXEMPLOS						
A idade média das crianças em uma sala de aula está entre a idade da criança mais velha e da mais nova.	Crianças trazem doces a uma festa. Ao repartirmos eqüitativamente os doces, a quantidade de doces dada pelas crianças que trouxeram mais será a mesma recebida pelas crianças que trouxeram menos.	Tomando por base o exemplo da propriedade D, se aumentarmos ou diminuirmos o número de horas que Paulo joga o videogame ou, se ele jogar também um outro dia da semana, o tempo médio semanal dispensado ao brinquedo será alterado.	Paulo joga videogame por 4 horas no sábado e por 2 horas no domingo. A média de tempo que Paulo fica no videogame por semana é de 3 horas.	Em 2002, a média de filhos por mulher passou para 2,4. <sup>5</sup>	Para se calcular a média semanal de horas trabalhadas por uma pessoa, deve-se considerar, também, os dias não trabalhados.	Em uma classe pesquise-se o número do calçado de cada aluno. Qual será o melhor número para representar o conjunto de dados obtido?

**Quadro 3.2:** Propriedades da média aritmética, conforme Strauss e Bichler (1988)

<sup>4</sup> Esta propriedade restringe-se a situações envolvendo valores discretos.

<sup>5</sup> Fonte: <http://www1.folha.uol.com.br/folha/cotidiano/ult95u78790.shtml>, acesso em 26 out 2003.

Conforme Vergnaud (1990a), as propriedades de um conceito são os invariantes operatórios do mesmo, que o caracterizam. Portanto, as propriedades de um conceito revelam importantes aspectos do mesmo. Conhecê-las, ainda que de maneira intuitiva proporciona uma aprendizagem mais significativa. Tendo isso em mente, escolhemos cinco das sete propriedades (“A”, “C”, “D”, “F” e “G”), que serão abordadas ao longo de nossa intervenção de ensino.

A escolha das cinco propriedades a serem trabalhadas deu-se por questões matemáticas, uma vez que as propriedades “B” e “E” requerem conhecimento de números negativos e de números decimais, conteúdos que crianças de 4ª série do Ensino Fundamental desconhecem ou não dominam.

Consideramos, ainda, o tempo disponível para a aplicação da intervenção (dispúnhamos de oito encontros) e o fato do conceito ser um conhecimento novo para os alunos pesquisados. Motivos pelos quais algumas propriedades (“C”, “F” e “G”) serão trabalhadas em mais de uma atividade, enquanto outras (“A” e “D”) serão abordadas em apenas uma delas, o que pode ser percebido na descrição das atividades constante do capítulo V.

As questões dos instrumentos diagnósticos requererão a percepção das propriedades “C”, e “F”, nos itens “1d” e “2e” do préteste, respectivamente, bem como nos itens do pós-teste correspondentes a estes.

A propriedade “E” ainda que não trabalhada intencionalmente por nós, ao longo da intervenção de ensino, foi percebida pelos alunos em diversos momentos da mesma. Abordaremos o assunto no capítulo da análise dos resultados.

No capítulo seguinte, trataremos das duas teorias psicológicas que contribuirão para a construção de nosso estudo.

## **CAPÍTULO IV**

# **CONTRIBUIÇÕES DE DUAS TEORIAS PSICOLÓGICAS PARA A CONSTRUÇÃO DO ESTUDO**

# CAPÍTULO IV

## CONTRIBUIÇÕES DE DUAS TEORIAS PSICOLÓGICAS PARA A CONSTRUÇÃO DO ESTUDO

### 4.1 - Introdução

Neste capítulo, apresentaremos os subsídios teóricos que embasaram nossa pesquisa. Trata-se da teoria dos campos conceituais de Vergnaud e a teoria da abstração reflexionante de Piaget. Cada um desses constructos será discutido, separadamente, nas seções seguintes.

### 4.2 – O “Tratamento da Informação” a partir da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud

Para Vergnaud (1990b), a compreensão de um conceito não emerge apenas de um tipo de situação, por mais completa que ela seja, como também uma situação, mesmo a mais simples, sempre envolve mais que um único conceito. Portanto, a formação de conceitos apresenta uma certa complexidade, uma interação entre diferentes elementos.

Para um melhor entendimento do processo de formação de conceito, recorreremos à Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, em que campo conceitual é definido como

“um grande conjunto de situações cuja análise e tratamento requerem vários tipos de conceitos, procedimentos e representações simbólicas que estão conectados uns aos outros.”<sup>5</sup> (trad. de: VERGNAUD, 1990b, p. 23)

Em um campo conceitual, temos relações entre as situações, os invariantes e as representações simbólicas. Inicialmente, veremos como o autor define conceito:

“uma tríade que envolve um conjunto de situações que dão sentido ao conceito; um conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito e um conjunto de significantes que podem representar os conceitos e as situações que permitem aprendê-los.” (VERGANUD, 1996, apud PAIS, 2001, p. 57).

Na definição acima, podemos identificar a tríade de elementos que formam o conceito e que se acham interligados, sendo:

S – o conjunto de situações, nas quais o conceito encontra-se inserido e que vai dar sentido para ele;

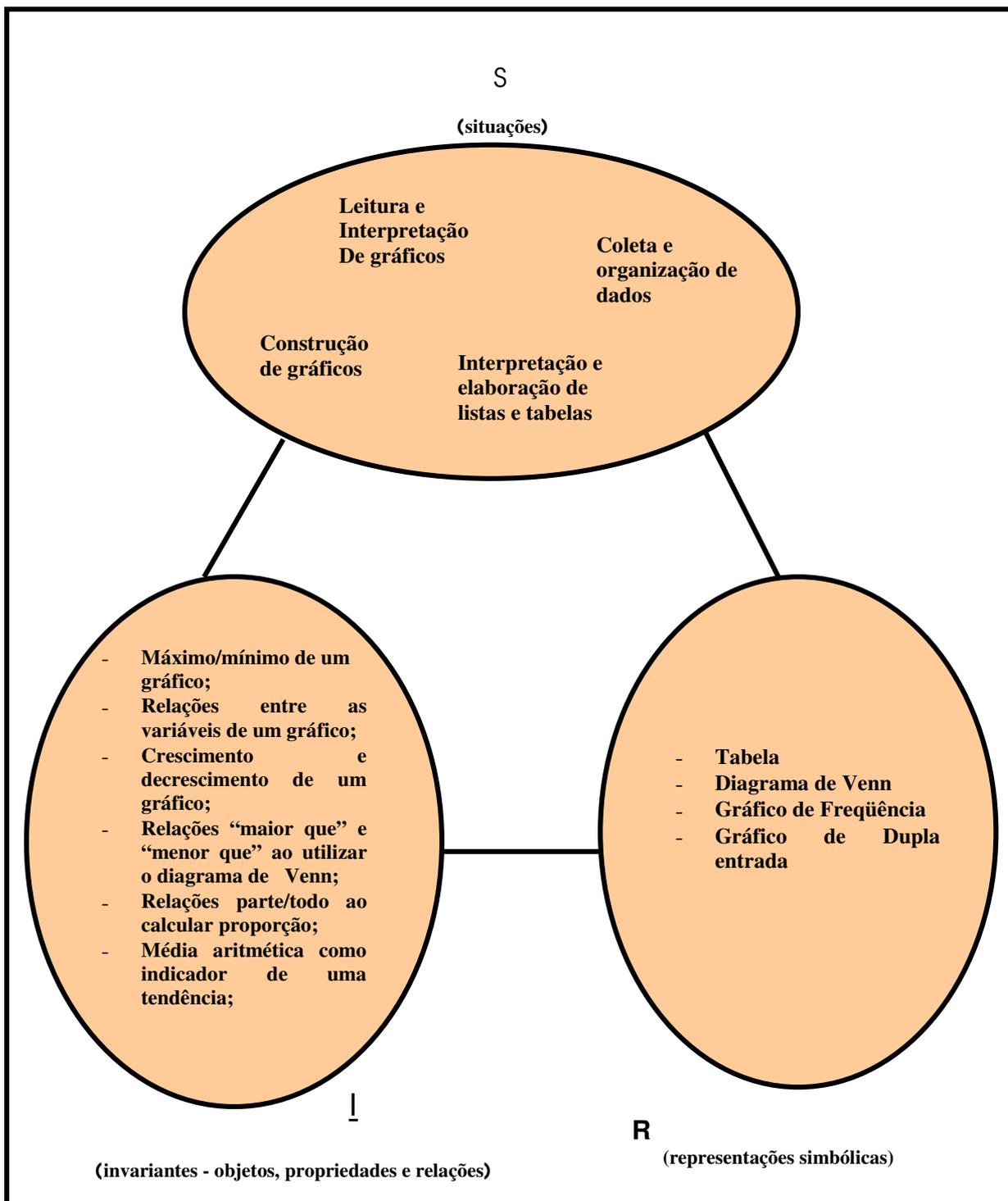
I – o conjunto de invariantes (objetos, propriedades e relações) que podem ser reconhecidos e usados pelo sujeito para analisar e dominar essas situações;

R – o conjunto de representações simbólicas, que serão usadas para pensar e falar sobre o conceito em questão. Esse conjunto possibilita ao sujeito pontuar e representar os invariantes nas várias situações, facilitando-lhe lidar com esse conceito (VERGNAUD, 1990a; FRANCHI, 1999; MAGINA et al, 2001).

---

<sup>5</sup> Tradução livre retirada do texto original: “conceptual fields, that is, large sets of situations whose analysis and treatment require several kinds of concepts, procedures, and symbolic representations that are connected with one another.”

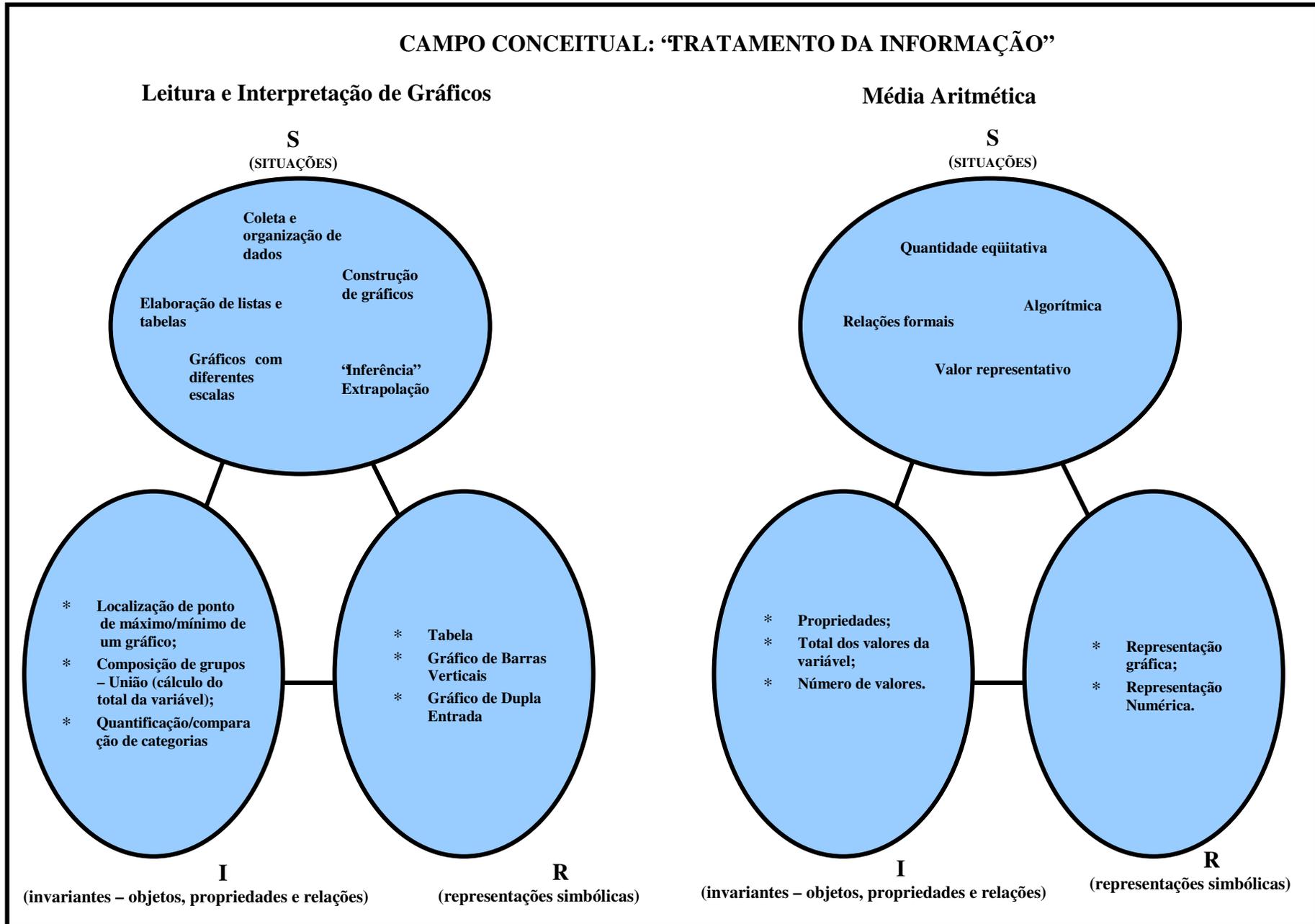
Em seu estudo, Santos (2003) apresenta um esquema representando a tríade (S, I, R), no qual toma o “Tratamento da Informação”, como um campo conceitual, conforme quadro a seguir:



**Quadro 4.1:** Campo Conceitual de Santos (SANTOS, 2003, p. 26)

À semelhança de Santos (2003), tomaremos o “Tratamento da Informação”, como um campo conceitual, distinguindo nele, separadamente, a leitura e interpretação de gráficos e a média aritmética. A seguir, apresentaremos

o quadro do campo conceitual que se constitui em uma tentativa de especificar as tríades dos dois objetos de nosso estudo:



**Quadro 4.2:** Campo conceitual – “Tratamento da Informação”

Na tríade (S, I, R) relacionada à leitura e interpretação de gráficos, destacamos cinco diferentes situações. Três dentre elas – coleta e organização de dados; elaboração de listas e tabelas e construção de gráficos que se caracterizam por uma manipulação direta dos dados por parte dos alunos, desde a coleta até a representação dos mesmos por meio do gráfico.

Ao passo que nas situações – de construção de gráficos; de gráficos com escalas diferentes e de “inferência” – os dados podem originar-se de uma coleta efetuada pelos alunos ou serem fornecidos previamente. Em nossa pesquisa trabalhamos tanto com a coleta direta como com dados fornecidos.

As situações apresentando escalas diferentes referem-se, especificamente, a gráficos nos quais a mesma se constitui em um de seus elementos, no caso de nosso estudo, relaciona-se às situações em que trabalhamos o gráfico de barras verticais. Neste tipo de gráfico, a escala é fixada no eixo vertical.

As situações de “inferência”<sup>6</sup>, extrapolação, envolvem o pensamento estatístico, sendo necessária a análise dos dados para resolução do problema proposto.

Na resolução dos problemas propostos nas diferentes situações, estão envolvidos três invariantes operatórios – localização do ponto de máximo/mínimo de um gráfico; composição de grupos (união); quantificação e ou comparação de categorias – sendo comum aos três invariantes a necessidade de quantificação

---

<sup>6</sup> Utilizamos a palavra inferência entre aspas por considerarmos que as situações apresentadas a nossos sujeitos estejam aquém de problemas que a Estatística defina como tal, quanto à sua relação com a teoria do cálculo das Probabilidades, ou seja, com a Estatística Inferencial propriamente dita.

<sup>6</sup> Entendemos ensino de Estocástica como o desenvolvimento tanto do pensamento estatístico, como do pensamento probabilístico.

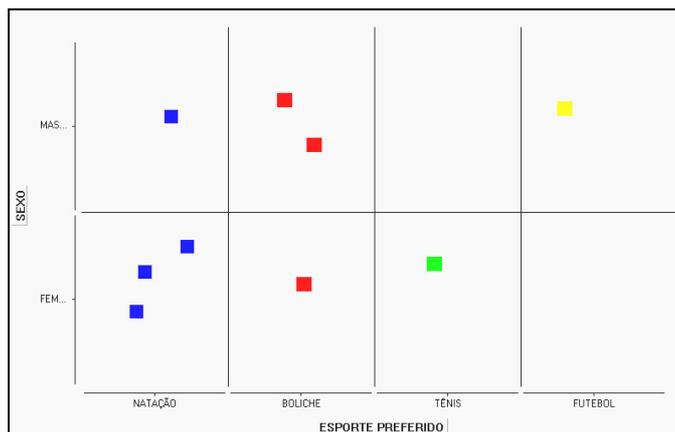
das categorias do gráfico, para, em seguida, proceder-se à composição de grupos ou às comparações, identificando o ponto de máximo e ou mínimo.

Os dados estatísticos coletados ou fornecidos podem ser dispostos de diferentes maneiras, entre elas – tabela; gráfico de barras verticais e gráfico de dupla entrada. Segundo Crespo, uma tabela “é um quadro que resume um conjunto de observações” (CRESPO, 2002, p. 25).

De acordo com Toledo e Ovalle, o gráfico de barras “tem por finalidade comparar grandezas, por meio de retângulos de igual largura e alturas proporcionais às respectivas grandezas.” (TOLEDO E OVALLE, 1995, p. 78)

O gráfico de dupla entrada constitui-se em uma representação gráfica de uma tabela de dupla entrada. Esse tipo de gráfico não é contemplado pela Estatística, tendo sido extraído do software Tabletop.

Nesse software educativo, os dados podem ser apresentados de três diferentes maneiras – diagrama de Venn; gráfico de frequência e gráfico de duas entradas, sendo esta última a representação icônica dos dados de duas variáveis uma no eixo horizontal e outra no eixo vertical. Ainda que não mencionado pela Estatística, denominaremos de gráfico de dupla entrada a representação do gráfico de duas entradas do Tabletop. Apresentaremos a seguir um exemplo desse tipo de gráfico:



**Figura 4.1:** Gráfico de duas entradas doTabletop

Os três tipos de gráficos especificados anteriormente constituem-se em três diferentes representações simbólicas dos dados de um gráfico.

Quanto à tríade (S, I, R) do conceito de média aritmética, enumeramos quatro diferentes situações – quantidade eqüitativa; algorítmica; relações formais e valor representativo.

Para Batanero (2000b), a situação de quantidade eqüitativa é aquela em que a média é obtida ao se fazer uma distribuição uniforme do total dos valores da variável pelo número de valores, na situação de valor representativo, a média representa o conjunto de dados, sendo tomada como número-resumo dos mesmos. As situações de relações formais são aquelas em se desenvolvem as propriedades do conceito, ao passo que nas situações algorítmicas trabalha-se o algoritmo para o cálculo da média.

Nas distintas situações envolvendo o conceito de média aritmética, salientamos três invariantes operatórios – propriedades; total dos valores da variável e número (quantidade) de valores da variável. Os dois últimos invariantes encontram-se presentes em todas as situações listadas no quadro da tríade do

conceito de média. Já, o invariante operatório “propriedades” relaciona-se às situações específicas nas quais se trabalha as relações formais.

Destacamos duas representações simbólicas para o conceito de média – representação gráfica e; representação numérica. A primeira delas relaciona-se à situação da quantidade eqüitativa quando se faz a identificação do valor da média com essa quantidade, após a distribuição uniforme do total dos valores da variável no gráfico. A segunda refere-se ao valor da média expresso por um numeral.

Conforme Vergnaud (1990a), para formação do conceito é necessária a interligação entre esses elementos da tríade (S, I, R).

Buscando essa interligação em nossa pesquisa, com relação à leitura e interpretação de gráficos trabalhamos diferentes situações, iniciando com a coleta de dados e a organização dos mesmos em uma tabela, seguida da construção de gráficos pictóricos, utilizando o material manipulativo descrito no capítulo a seguir.

Trabalhamos, ainda, as situações de “inferência” e extrapolação em atividades, nas quais os alunos necessitavam ler além do explícito no gráfico, ou seja, “ler além dos dados”, fazendo predições baseadas nos dados apresentados, de acordo com Curcio (1987).

Para Lopes (2003), o pensamento estatístico envolve tanto a compreensão de mensagens simples e diretas presentes no cotidiano e expressas pelos métodos da Estatística Descritiva, quanto os processos complexos de inferência, relacionados à Estatística Inferencial. A autora destaca também a importância da inclusão do ensino da Estocástica<sup>7</sup> desde a infância.

---

<sup>7</sup> Entendemos ensino de Estocástica como o desenvolvimento tanto do pensamento estatístico como do pensamento probabilístico.

Para ela:

“a realização de experimentos que envolvem aleatoriedade e estimativas, assim como a vivência de coletar, representar e analisar dados que sejam significativos e inseridos em seu contexto podem ampliar o universo de competências e acentuar o potencial criativo de nossos estudantes.” (LOPES, 2003, p. 16)

Fischbein (1975, apud BATANERO, 2001) mostra em suas investigações que é difícil desenvolver-se o raciocínio estocástico adequado sem instrução, acentuando assim a conveniência da educação estocástica.

Tendo em vista as afirmações dos pesquisadores acima citados, optamos por incluir situações que apresentam características estocásticas, associadas ao cotidiano das crianças, a fim de torná-las significativas. Essas atividades encontram-se descritas de modo mais pormenorizado no capítulo seguinte.

Nessas situações, trabalhamos os dois diferentes tipos de representação simbólica – gráfico de barras verticais e de dupla entrada, procurando envolver os três invariantes operatórios já mencionados.

Com relação ao conceito de média aritmética, abordamos em nossa pesquisa as quatro situações diferentes – quantidade eqüitativa, algorítmica, das relações formais e valor representativo.

Associamos à situação de quantidade eqüitativa, atividades em que utilizamos a estratégia da redistribuição (descrita no capítulo seguinte) e à situação de valor representativo, atividades em que tomamos o valor da média aritmética para o cálculo de uma projeção, utilizando-a como valor representativo do conjunto de dados. Nas situações de relações formais, abordamos as

propriedades da média de Strauss e Bichler (1988) e, nas algorítmicas, trabalhamos o algoritmo da média aritmética.

Procuramos, ainda, no campo conceitual da média aritmética trabalhar os invariantes operatórios citados anteriormente, em todos os tipos de situações apresentadas, utilizando-nos de duas diferentes representações simbólicas.

Outro elemento a ser considerado na teoria dos campos conceituais são os esquemas de ação, os quais Vergnaud define como um

“universal que é eficiente para toda uma classe de situações e pode gerar diferentes seqüências de ações, reunião ou controle de informação, dependendo das características específicas de cada situação particular”<sup>8</sup> (trad. de: VERGNAUD, 1998, p. 172)

Muitas de nossas atividades mentais e físicas são constituídas de esquemas como, por exemplo, sentar-se, pegar um objeto, contar um conjunto de objetos, desenhar um gráfico, entre outros. Em um esquema, o comportamento não é invariante, mas sim a organização do comportamento. Tomemos para ilustração o exemplo de Vergnaud citado por Franchi (1999, p. 165) do

“esquema de enumeração de uma pequena coleção de objetos discretos por uma criança de cinco anos: por mais que varie a forma de contar, (...), copos na mesa, cadeiras da sala, (...), não deixa de haver uma organização invariante essencial para o funcionamento do esquema: coordenação dos movimentos dos olhos e gestos dos dedos e das mãos, enunciação correta da série numérica, identificação do último elemento da série como o cardinal do conjunto enumerado...”

---

<sup>8</sup> Tradução livre do texto original: “a scheme is a universal that is efficient for a whole range of situations, and it can generate different sequences of action, information gathering or control, depending on the specific characteristics of each particular situation.”

Ressaltamos que a característica de ser invariante não se refere às ações do sujeito (os objetos poderiam ser contados a partir de elementos diferentes e obedecendo a uma seqüência diferente – da direita para a esquerda ou vice-versa), mas sim, à organização dessas ações.

Os esquemas encontram-se presentes, também, nas atividades cognitivas e, em sala de aula, os alunos não somente trazem seu repertório de esquemas, como também, desenvolvem novos esquemas ou modificam os já existentes, quando submetidos a situações de aprendizagem.

Para Vergnaud (1998), a maior parte do comportamento dos alunos em tais situações é gerado por hipóteses, analogias, metáforas, extensões ou reduções de conhecimento prévio, elementos que levaram o autor às idéias de conceitos-em-ação e teoremas-em-ação, os chamados invariantes operatórios, que, por sua vez, são constituintes dos esquemas.

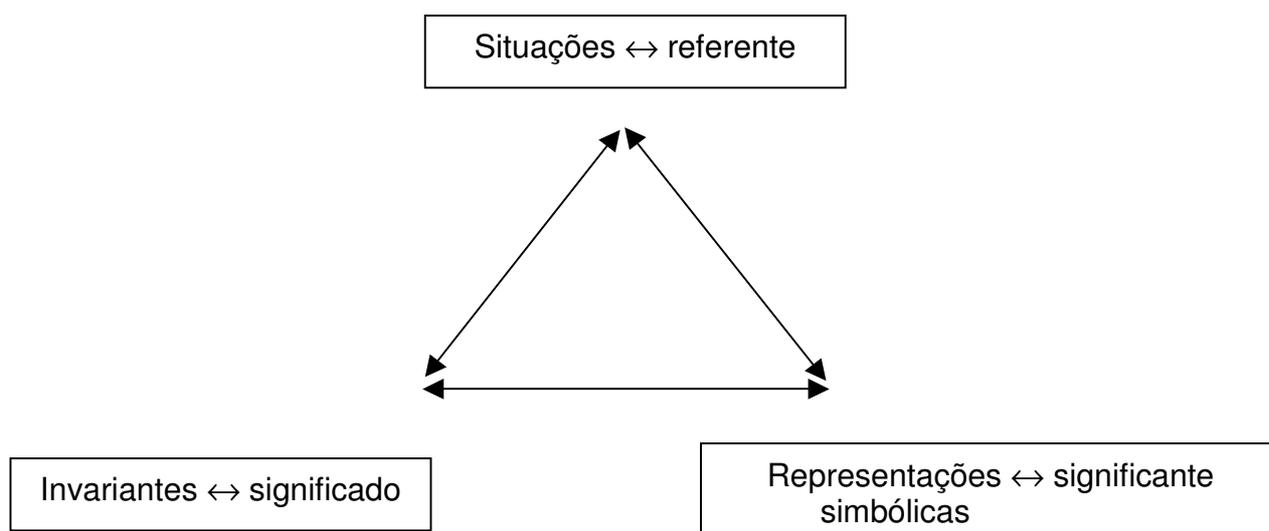
Na resolução de problemas, a parte de informações que é selecionada, julgada como relevante, pelos alunos, são os conceitos-em-ação e, os teoremas-em-ação são as relações matemáticas ou uma seqüência delas, levadas em consideração pelos mesmos. Estes invariantes operatórios estão subjacentes ao comportamento dos alunos, aparecendo de modo intuitivo em sua ação, sendo, portanto, implícitos, não expressos verbalmente.

Entrevista, o conhecimento conceitual é necessariamente explícito, o que nos leva a crer que os alunos precisam de palavras, símbolos, isto é, das representações simbólicas para transformarem os invariantes operatórios, relacionados às competências de ação, em conceitos propriamente ditos, em conhecimento explícito.

Vergnaud (1987), considera que a representação simbólica possui três elementos:

- Referente – o mundo real, sobre o qual o sujeito age;
- Significado – é o elemento individual, essencialmente, cognitivo.
- Significante – é o elemento coletivo, são os diferentes sistemas simbólicos, expressos por símbolos, signos e sinais.

Podemos relacionar o terna (S, I, R) de sustentação do conceito com esses elementos da representação simbólica.



O referente é o mundo real no qual o sujeito experiencia as mais diversas situações. O nível do significado é essencialmente cognitivo, nele os invariantes são reconhecidos e as inferências, generalizações e predições são efetuadas pelo sujeito. O nível do significante consiste de diferentes sistemas simbólicos diferentemente organizados.

Em nossa análise, consideraremos os principais pontos desta teoria comentados no presente capítulo, em conjunto com os aspectos da abstração reflexionante de Piaget descritos na seção seguinte.

### 4.3 – A Abstração Reflexionante de Piaget

A importância do processo de abstração na aquisição de conhecimentos foi salientada desde Aristóteles e no início da Psicologia como disciplina científica, tem sido utilizado pela mesma.

Piaget admite que “todo novo conhecimento supõe uma abstração, (...) porque não constitui jamais um início absoluto e tira seus elementos de alguma realidade anterior.” (PIAGET, apud MONTANGERO e MAURICE-NAVILLE, 1998, p. 89).

Nos escritos de Piaget (1984) e de Piaget e colaboradores (1995), distinguimos dois tipos de abstrações – abstração empírica e reflexionante.

Abstração empírica apóia-se nos objetos físicos ou nos aspectos materiais da própria ação do sujeito (movimentos, empurrões). Consiste, portanto, em depreender uma propriedade daquilo que é observado pelo sujeito, por exemplo, o peso, a textura, a cor, ou ainda, uma propriedade das ações destes como, por exemplo, a força ou a direção.

Estas propriedades são inerentes ao objeto, isto é, existem nos mesmos, antes de qualquer constatação por parte do sujeito. Podemos observar a abstração empírica em distintos níveis do desenvolvimento cognitivo do sujeito.

Já a abstração reflexionante, apóia-se nas atividades cognitivas do sujeito (esquemas ou coordenações de ações, operações), delas retirando certos

caracteres e usando-os para outras finalidades. Ela se dá por meio de dois processos conjugados:

- Reflexionamento – a projeção (como por um refletor) sobre um patamar superior daquilo, que é tirado do patamar inferior;
- Reflexão – ato mental de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior daquilo que foi transferido do inferior.

A abstração reflexionante como a empírica pode ser observada em todos os estágios do desenvolvimento cognitivo do sujeito, desde o estágio sensório-motor até o das operações formais.

Tomemos, como exemplo, de abstração reflexionante, a formação da noção de ordem temporal, ou seja, a noção de “antes”. Com um ano de idade, a criança demonstra a ordem temporal em suas atividades intencionais, por exemplo, apanha primeiramente um bastão para poder, em seguida, trazer para si um objeto. Mais tarde, a ordem das ações é projetada no plano das representações (reflexionamento), neste plano, ela é reconstruída como noção e capacidade de ordenar as representações (reflexão).

A noção de ordem formada é, portanto, mais rica, sendo capaz de diferenciar “antes” de “depois”, de reconstituir seqüências de atividades passadas, entre outras coisas. Desta forma, a noção de ordem temporal foi abstraída das ações do sujeito por meio da abstração reflexionante.

Podemos dizer que a abstração reflexionante é estruturante, pois conduz à construção de novas formas de conhecimento. Já a abstração empírica limita-se a fornecer dados abstraídos dos objetos, concretos ou não, que sofrem esse tipo de abstração, uma vez que uma representação pode ser o objeto de uma abstração empírica.

Piaget e colaboradores (1995) apontam também duas variedades de abstração reflexionante – abstração pseudo-empírica e abstração refletida.

Na abstração pseudo-empírica, as propriedades são abstraídas a partir de objetos materiais, como se se tratasse de abstração empírica, porém as propriedades constatadas são, na realidade, introduzidas nesses objetos por atividades do sujeito. Portanto, na abstração pseudo-empírica, a manipulação dos objetos é indispensável. Piaget exemplifica este tipo de abstração:

“uma criança de seis anos de idade que, após aprender a contar, pega dez pedrinhas, enumera-as e as alinha e constata que o total é sempre dez, quer se conte a partir da direita ou da esquerda, quer se enumere as pedrinhas alinhadas ou colocadas em círculo. Esse novo conhecimento é tirado por abstração, não das propriedades das pedrinhas, mas da organização que o sujeito aí introduziu.” (PIAGET, apud MONTANGERO e MAURICE-NAVILLE, 1998, p.92).

As abstrações pseudo-empíricas desempenham um papel fundamental nos níveis elementares. No nível das operações concretas, o sujeito necessita “ver” nos objetos os conceitos estudados, desta forma, a abstração pseudo-empírica serve de suporte às abstrações reflexionantes.

Quanto à abstração refletida, trata-se de uma abstração reflexionante, na qual o sujeito toma consciência da utilização de novos instrumentos de raciocínio e consegue reconstruir ou representar o raciocínio que fez para resolver os problemas apresentados, ou seja, formaliza-o. É uma reflexão sobre a reflexão.

A evolução dos dois grandes tipos de abstrações – abstração empírica e abstração reflexionante – comporta uma certa complexidade e uma assimetria.

A abstração reflexionante desenvolve-se sempre e cada vez mais, passando por um nível, em que se apóia sobre as abstrações pseudo-empíricas, no qual “os resultados dos reflexionamentos e das reflexões permanecem materializados nos objetos transformados e enriquecidos pelas atividades do sujeito”; ao passo que a abstração empírica não progride senão, apoiando-se na abstração reflexionante. Nos níveis iniciais, proporcionalmente, “os atos da abstração empírica são muito mais numerosos que as intervenções da abstração reflexionante” e, nos níveis posteriores, “a proporção se inverte cada vez mais.” (PIAGET e COLABORADORES, 1995, p. 287-288).

Enquanto estes três tipos de abstrações guardam entre si uma relação de dependência, a aparição e o desenvolvimento da abstração refletida são mais retardados, vindo a ocorrer no “momento em que se torna o instrumento necessário das reflexões sobre a reflexão anterior e, em que permite, finalmente, a formação de uma meta-reflexão ou pensamento reflexivo.” (PIAGET e COLABORADORES, 1995, p. 288).

No decurso do desenvolvimento cognitivo do sujeito, os tipos de abstrações coexistem, altera-se apenas o seu valor, havendo uma inversão de proporção entre um e outro, porém, sem jamais desaparecerem.

A abstração pseudo-empírica de Piaget fundamentará o uso do material manipulativo conjugado com a estratégia da redistribuição ambos descritos no capítulo seguinte.

# CAPÍTULO V

## **METODOLOGIA**

# CAPÍTULO V

## METODOLOGIA

### 5.1 - Introdução

Este capítulo tem por objetivo descrever em detalhes o desenho metodológico de nosso estudo, que será desenvolvido com o objetivo de responder à questão de pesquisa. Trata-se de um estudo quase-experimental intervencionista que se utilizará do plano clássico de experimento, contando com os grupos experimental e de controle (CAMPBELL e STANLEY, 1972; RUDIO, 1986).

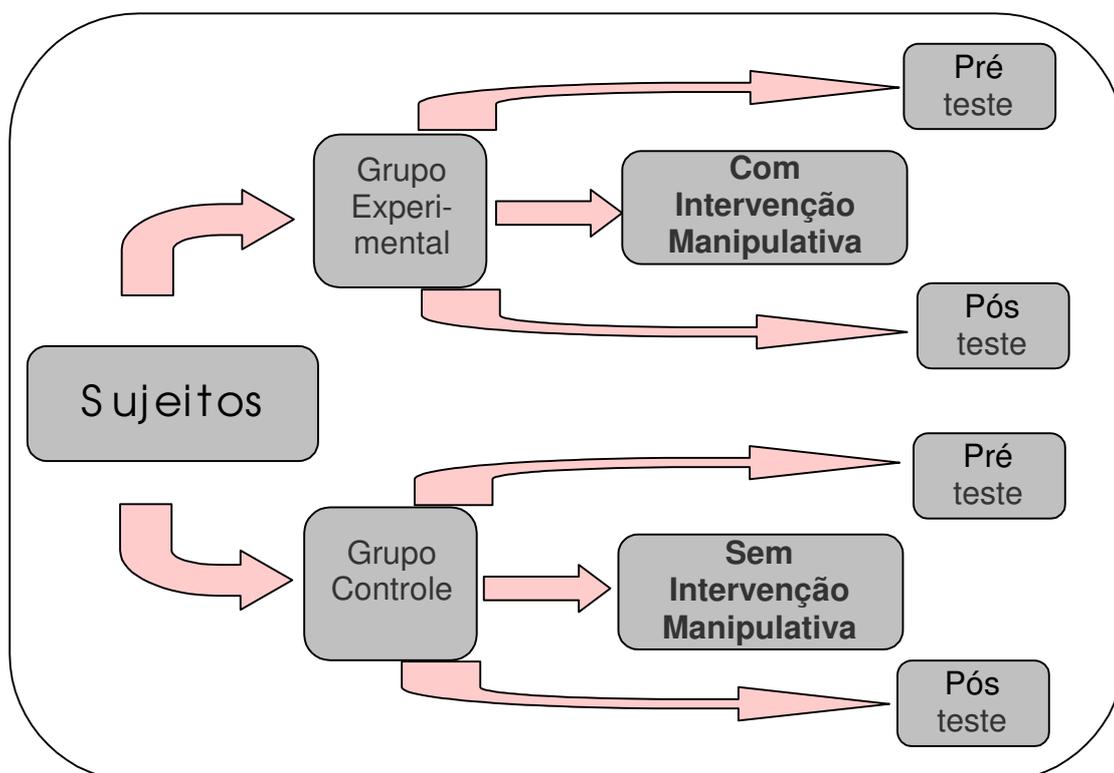
O capítulo foi estruturado visando descrever, inicialmente, o desenho do experimento; na seqüência, a apresentação do universo da pesquisa – os sujeitos – depois o material utilizado e, por fim, os procedimentos empregados na coleta dos dados.

### 5.2 – Desenho do experimento

Trata-se de uma pesquisa quase-experimental, conforme Campbell e Stanley (1972), de caráter intervencionista, uma vez que contempla, em sua metodologia, a aplicação de um pré-teste, de uma intervenção de ensino e de um pós-teste. O desenho envolve um grupo experimental e um grupo controle. Ambos os grupos submeteram-se tanto ao pré-teste como ao pós-teste. Não houve preocupação com a equivalência pré-experimental da amostragem dos grupos, o que, segundo Campbell e Stanley (1972), diferencia uma pesquisa quase-

experimental da pesquisa experimental propriamente dita. De fato, esses grupos constituíram coletivos naturalmente montados, isto é, os sujeitos da pesquisa eram alunos que compunham uma classe completa. Contudo, como se tratou de alunos de uma mesma escola, com mesma faixa etária e apresentando desempenho similar no pré-teste, podemos dizer que havia uma certa equiparação entre os grupos. A fixação dos grupos em experimental e de controle foi feita aleatoriamente.

A pesquisa envolveu duas classes de 4ª série do Ensino Fundamental, às quais denominamos de Grupo Controle (GC) e Grupo Experimental (GE)<sup>5</sup>. O esquema abaixo é um quadro elucidativo do experimento tal qual ele foi desenvolvido:



**Quadro 5.1:** Desenho do experimento

<sup>5</sup> A partir daqui, iremos nos referir a esses grupos por suas respectivas abreviaturas, quais sejam GE para o grupo experimental e GC para o grupo controle.

O GE sofreu a aplicação dos dois instrumentos diagnósticos, o primeiro, com o objetivo de diagnosticar os conhecimentos prévios dos alunos sobre conceitos elementares de Estatística, enquanto o segundo, aplicado após a intervenção de ensino, visou a estudar o desenvolvimento desses conceitos. A intervenção objetivou desenvolver os conceitos, objetos de nossa pesquisa, com o uso de material manipulativo específico descrito a seguir.

O GC constituir-se-á em um grupo de referência, nele, aplicaremos apenas o pré-teste e o pós-teste. Considerando os efeitos da maturação e do ensino e aprendizagem escolar sobre o desenvolvimento cognitivo do aluno, os quais podem interferir no desenvolvimento de ambos os grupos, tomaremos o GC como um grupo comparativo, além do que, no mesmo, houve o ensino aprendizagem dos temas objetos de estudo da pesquisa, porém com abordagem tradicional<sup>6</sup>, sem a aplicação do material manipulativo.

Assim, o ensino-aprendizagem desses temas no GC foi desenvolvido pela professora da classe ao longo de seis aulas, nas quais os alunos trabalharam individualmente. Uma vez que não havia a adoção de um livro didático, a dinâmica das aulas, bem como a forma de abordar os conteúdos eram da escolha do docente. Essas aulas constituíram-se de exposição do tema pela professora, seguida da resolução de exercícios propostos.

### 5.3 – Universo do estudo

Nossos sujeitos foram alunos de duas classes de 4<sup>a</sup> série, do período matutino, de uma Escola Estadual, localizada no centro da capital paulista. Esta

---

<sup>6</sup> Chamamos de abordagem tradicional o ensino por meio de aula expositiva, com uso da lousa e giz, sem utilização de outro tipo de material didático.

escola atende apenas os dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental, funcionando em período matutino e vespertino, e atende a, aproximadamente, 1.500 alunos, sendo 20 turmas no período da manhã, 20 no período da tarde, oito de reforço escolar, uma de deficientes auditivos e uma de deficientes mentais. Os profissionais da escola contam com razoáveis recursos pedagógicos, tais como: biblioteca, sala de vídeo e laboratório de informática.

Tendo em vista que a rede pública de ensino atende a grande maioria dos estudantes brasileiros do Ensino Fundamental (90,8%), conforme Censo Escolar 2002<sup>7</sup>, optamos por trabalhar em uma escola pública por acreditar que, dessa forma, os resultados de nossa pesquisa estarão mais próximos da realidade educacional brasileira. Pelo mesmo motivo, escolhemos desenvolvê-la com todos os alunos de cada uma das classes e não apenas com uma parte deles. Os sujeitos totalizaram 53 alunos, sendo 28 pertencentes ao GE e 25 ao GC. Todos estavam na faixa etária compreendida entre 9 e 11 anos.

#### 5.4 – Material utilizado

Podemos descrever o material utilizado na pesquisa, segundo suas duas etapas: na etapa 1, o material utilizado constou de instrumentos diagnósticos (testes) aplicados em duas fases (pré e pós-teste). Já na etapa 2, os materiais empregados foram as fichas de atividades e o material manipulativo.

---

<sup>7</sup>Fonte: <http://www.mec.gov.br/semtec/Noticias/censo.shtml>, acesso em: 20/09/2003.

### 5.4.1 - Materiais da etapa 1 - os testes

O pré e o pós-teste constituíram-se de questões análogas e equivalentes quanto ao conteúdo matemático e quanto ao nível de dificuldade, ou seja, para cada questão do pré-teste havia uma questão correspondente no pós-teste, ambas abordando, de maneira bastante similar, o mesmo conteúdo matemático e apresentando o mesmo grau de dificuldade. Cada teste compunha-se de três questões. Em ambos os testes, as questões foram dispostas uma em cada página, impressas em folha A4 (210 X 297 mm), somando, portanto, três páginas. Tendo em vista que os testes foram desenvolvidos no contexto de papel e lápis, outros materiais utilizados pelos alunos foram lápis, borracha e régua.

### 5.4.2 - Materiais da etapa 2 – a intervenção

Iniciaremos esta subseção descrevendo as fichas de atividades e, na seqüência, o material manipulativo.

- Fichas de atividades:

Foram utilizadas 17 fichas de atividades, que eram entregues aos alunos, de acordo com o planejamento de cada encontro, descrito mais adiante na seção 5.5.2. Cada ficha de atividade constituiu-se de uma folha de papel A4 (210 X 297 mm) com as questões impressas. O número de questões de cada ficha consta da tabela abaixo:

FICHAS DE ATIVIDADE	1A	1B	1C	2A	2B	2C	3A	3B	3C	3D	4	5A	5B	6A	6B	7A	7B
QUESTÕES	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
QTDE. DE ITENS POR QUESTÃO	1	1	3	1	1	1	1	5	1	1	1	4	1	1	3	1	5

**Tabela 5.1:** Distribuição por ficha de atividade da quantidade de questões e de itens em cada questão

A seção 5.5.2 apresentará, ainda, a descrição pormenorizada de cada uma das questões das fichas de atividades, bem como uma análise das mesmas.

Durante o desenvolvimento das atividades em sala de aula, além do material manipulativo descrito a seguir, os alunos utilizaram lápis, borracha, régua e lápis de cor.

- Material manipulativo:

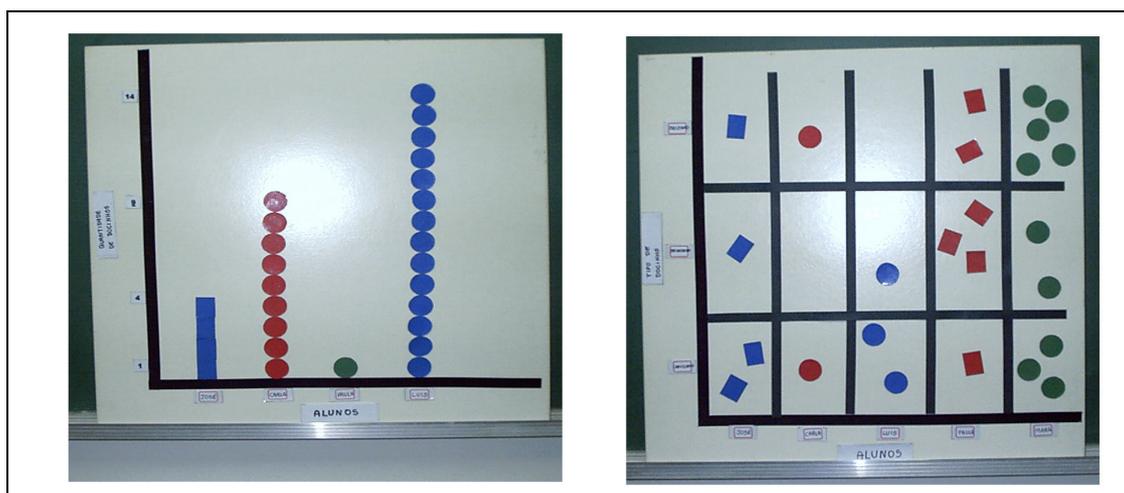
Considerando a idéia de Piaget (1990) e de Piaget e Inhelder (1995) com relação aos níveis de desenvolvimento, incluímos os sujeitos de nossa pesquisa no nível operacional concreto, embora não haja uma certeza, pelo fato de não termos procedido a um teste, mas como o nível operacional-concreto vai de aproximadamente 7-8 anos a 10-11 anos, é bem provável que essas crianças estejam nesse nível. As operações do sujeito nesse nível “...baseiam-se diretamente nos objetos e não ainda nas hipóteses enunciadas verbalmente, como será o caso das operações proposicionais...” (PIAGET e INHELDER 1995, p. 86). Nossos sujeitos encontram-se, portanto, na questão empírica, necessitando da manipulação.

Schliemann, Carraher e Carraher (2001, p. 178) afirmam que a

“utilização de materiais concretos [no Brasil] é proposta a partir da noção de que as crianças passam por um período em que raciocinam mais facilmente sobre problemas concretos do que sobre problemas abstratos.”

Tendo em vista as afirmações de Piaget (1990), de Piaget e Inhelder (1995) e de Schliemann, Carraher e Carraher (2001), acreditamos ser adequada aos alunos a utilização de material manipulativo em nossa intervenção de ensino.

O material manipulativo por nós usado foi elaborado, tendo como modelo o software Tabletop. Este material constitui-se de uma prancha branca de metal, em que estão fixadas duas retas perpendiculares (à semelhança do plano cartesiano, sem qualquer divisão de graduação). Por se tratar de um material no qual o aluno constrói gráfico, chamamo-lo, simplificada, de “**Tábua de Gráficos**”. Para a construção dos seus gráficos na Tábua de Gráficos, o aluno teve à sua disposição uma lousa quadrada (0,50m X 0,50m, aproximadamente) além de figuras imantadas (círculos verdes, vermelhos e azuis e retângulos verdes, vermelhos e azuis), números imantados e etiquetas imantadas (semelhantes aos ícones do software tabletop), (Figura 5.1).



**Figura 5.1:** Exemplo da Tábua de Gráficos

Utilizamos, ainda, para a exposição dos gráficos pela pesquisadora, material idêntico (em cores, formas e quantidades) a este, porém com dimensões maiores – prancha de 1m X 1m e figuras imantadas proporcionalmente maiores.

A tábua de gráficos da pesquisadora<sup>8</sup> era fixada no centro da lousa, de maneira a tornar-se visível a todos os alunos.

Schliemann, Carraher e Carraher (2001) chamam a atenção para que o ensino da Matemática com materiais concretos seja estruturado em relações entre os objetos, de tal forma que as mesmas reflitam um modelo matemático, ou seja, que “subjacente aos materiais concretos existam princípios lógico-matemáticos” (SCHLIEMANN, CARRAHER E CARRAHER, 2001, p. 179) que serão ensinados.

Julgamos que o material manipulativo por nós utilizado preencha o requisito considerado pela autora como fundamental para o ensino, uma vez que, quanto ao conteúdo leitura e interpretação de gráficos, se constituiu em uma representação icônica bastante próxima de um gráfico convencional. Quanto ao conceito de média aritmética, permite a representação gráfica da mesma quando associado com a estratégia da redistribuição, ou seja, quando a média aritmética é identificada com a quantidade eqüitativa, conforme descrição dessa estratégia constante do item 5.5.2 e ilustração da Figura 5.1.

Destacamos, ainda, que o material manipulativo evidencia dois invariantes operatórios da média – o total dos valores da variável e o número de valores dessa variável, correspondendo, respectivamente ao total de ímãs e ao total de categorias da variável no gráfico.

Salientamos também que esse material está presente no cotidiano das crianças, como os ímãs que adornam geladeiras, os que fixam fotografias em porta-retratos e as bonecas e “roupinhas” de papel imantado, além de apresentar uma variedade de cores, tornando-o um material atrativo e lúdico.

---

<sup>8</sup> Referimo-nos a este material também como tábua de gráficos, acrescentando-lhe a expressão: da pesquisadora.

## 5.5 – Procedimento

O estudo constou de duas etapas distintas – diagnóstico (pré e pós-teste) e intervenção de ensino, desenvolvidos, separadamente nos dois grupos de alunos, que participaram da pesquisa da seguinte forma:

- GC – etapa diagnóstica (pré-teste e pós-teste);
- GE – etapa diagnóstica (pré-teste e pós-teste) e intervenção de ensino.

Todas as etapas foram desenvolvidas em sala de aula convencional, no período normal das aulas, com a presença da pesquisadora, de dois observadores e da professora da classe. A coleta de dados foi totalmente audiogravada.

A seguir, descrevemos cada uma das etapas.

### Etapa 1 – Instrumentos diagnósticos:

Como já dito acima, esta etapa foi subdividida em duas fases, o pré e o pós-teste.

O pré-teste constituiu-se de um teste com três questões envolvendo a leitura e interpretação de gráficos e o conceito de média aritmética a partir dos dados apresentados em gráficos de barras verticais e em gráficos que chamamos de dupla entrada (extraídos do software Tabletop). Cada questão ocupou uma folha, o que significa que, em sua totalidade, o teste ocupou três folhas, que foram distribuídas aos alunos, uma após a outra, conforme todos iam entregando a anterior. Ao distribuir cada folha, a pesquisadora lia as questões, em voz alta,

para que os alunos as entendessem e permitia que lhe solicitassem ajuda ou aos observadores, quantas vezes eles necessitassem.

O grupo (pesquisadora e observadores) foi bastante cauteloso ao atender os alunos apenas em suas dúvidas quanto ao entendimento das questões, de forma a não interferir em suas respostas. Embora a professora estivesse presente nesta etapa, foi solicitado que não interviesse, mesmo quando solicitada a esclarecer alguma dúvida aos alunos.

O motivo para tal era garantir que nenhuma “dica” fosse dada aos alunos, mesmo que involuntariamente.

As questões foram trabalhadas pelos alunos, individualmente, no contexto de papel e lápis, isto é, sem o uso do material manipulativo. Este teste teve a duração de quase duas horas.

O primeiro grupo a responder o pré-teste foi o GE e, no dia seguinte, o GC.

Tal qual o pré-teste, o pós-teste foi composto por três questões e também aplicado individualmente, sem o uso do material manipulativo, em um período aproximado de duas horas.

A equivalência matemática foi mantida entre os testes, a saber, o conteúdo matemático abordado em uma das questões do pré-teste foi também contemplado no pós-teste, de maneira semelhante e em mesmo grau de dificuldade, conforme já mencionamos no item 5.4.1. Aqui também seguimos o mesmo procedimento de aplicação adotado no pré-teste. O pós-teste foi primeiro aplicado no GC e, no dia seguinte, no GE.

Antes de apresentarmos a intervenção de ensino, necessário se faz relatar a respeito do tempo total gasto no desenvolvimento do estudo, que foi de

três meses, a saber: o pré-teste foi aplicado em ambos os grupos em abril de 2003, a intervenção de ensino foi aplicada no GE ao longo do mês de maio do mesmo ano (totalizando 12 horas), e o pós-teste aplicado, nos dois grupos, 15 dias após a conclusão da intervenção, isto é, na segunda quinzena do mês de junho.

O maior intervalo de tempo entre o pré-teste e a intervenção deu-se pela necessidade de análise dos dados do pré-teste, fornecendo, assim, subsídios para a elaboração das atividades da intervenção.

#### 2ª Etapa – A intervenção de ensino:

A intervenção de ensino foi desenvolvida ao longo de quatro semanas consecutivas, com dois encontros semanais, em dias consecutivos, totalizando oito encontros, com duração de 1h30 cada um. Durante os oito encontros, foram aplicadas sete atividades envolvendo a leitura e interpretação de gráficos e o conceito de média aritmética. No desenvolvimento das atividades, utilizamos o material manipulativo especificado anteriormente.

Os alunos foram divididos em sete grupos de quatro alunos, de acordo com sua livre escolha; e permaneceram nos mesmos grupos durante o desenvolvimento de toda a intervenção, não havendo trocas entre os grupos. Contudo, ocorreram transferências de alunos e chegada de outros, o que ocasionou a respectiva saída ou entrada de alunos em alguns grupos.

Cada grupo tinha disponível uma tábua de gráficos e um conjunto de ímãs, ou seja, um conjunto do material manipulativo utilizado e uma folha da atividade proposta para anotar suas respostas. A distribuição das folhas de

atividades e o desenvolvimento das mesmas deram-se de maneira distinta a cada encontro, os quais descreveremos no item 5.5.2.

Solicitamos que discutissem entre si e anotassem na folha de atividade a resposta da maioria do grupo. Os alunos da faixa etária que trabalhamos, apresentavam grande interesse em participar das atividades e, como todos queriam escrever na folha, pedimo-lhes que as respostas fossem redigidas cada vez por um aluno do grupo, de maneira que todos pudessem colaborar, mas insistimos que haveria de ser a resposta do grupo, enfatizando a necessidade de troca de idéias entre eles. O PCN (BRASIL, 1997, p. 52) aponta como um dos

“objetivos do ensino fundamental, levar o aluno a interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.”

Portanto, julgamos importante o trabalho coletivo durante a intervenção de ensino.

No GC, não foi aplicada a intervenção de ensino, entretanto o conteúdo foi desenvolvido pela professora da sala, de modo tradicional, ou seja, aulas expositivas, caracterizadas por apresentação do conteúdo, seguidas de exercícios propostos e sem o uso de qualquer outro material didático adicional, além de lousa e giz.

### 5.5.1 – Instrumentos diagnósticos

Empregamos dois instrumentos diagnósticos – o pré-teste e o pós-teste<sup>9</sup> – o primeiro, aplicado 30 dias antes do início da intervenção de ensino e o segundo 15 dias após a mesma. Os instrumentos foram aplicados aos dois grupos – GC e GE separadamente, porém, na mesma época.

A aplicação do pré-teste teve por objetivo diagnosticar os conhecimentos prévios dos alunos quanto às habilidades e conceitos estatísticos considerados em nosso estudo, ou seja, a leitura e interpretação de gráficos e o conceito de média aritmética, para, a partir desses dados, elaborarmos nossa intervenção de ensino.

Para Vergnaud (1993), os alunos em situação de resolução de um problema lançam mão de seu repertório inicial de esquemas disponíveis, especialmente, entre os ligados às classes de situações que pareçam ter afinidade com a situação em resolução.

Franchi (1999, p. 157), referindo-se a Vergnaud, afirma que

“o funcionamento cognitivo do sujeito em situação repousa sobre os conhecimentos anteriormente formados; ao mesmo tempo o sujeito incorpora novos aspectos a esses conhecimentos desenvolvendo competências cada vez mais complexas.”

Considerando as afirmações desses autores, ressaltamos a importância de se tomar como ponto de partida, para a aprendizagem, o conhecimento prévio

---

<sup>9</sup> Estes dois instrumentos diagnósticos encontram-se, em sua íntegra, nos anexos 1 e 2.

do aluno, o que é também destacado pelo PCN como um dos aspectos do processo de ensino e aprendizagem a ser considerado pelos professores.

Por sua vez, o pós-teste objetivou medir a evolução dos alunos quanto às mesmas habilidades e conceitos estatísticos investigados no pré-teste. Para tanto constou do pós-teste, questões análogas às do pré-teste. A confrontação dos dados de ambos os instrumentos diagnósticos permitiu-nos estudar as contribuições de uma intervenção de ensino com o uso do material manipulativo por nós especificado para o desenvolvimento da leitura e interpretação de gráficos e do conceito de média aritmética, objetos de nossa pesquisa.

Pré e pós-teste apresentavam três questões análogas, porém, aplicadas em uma seqüência diferenciada. Tivemos, portanto, a seguinte correspondência de acordo com os dados da tabela abaixo:

PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
Questão 1a	Questão 2b
Questão 1b	Questão 2a
Questão 1c	Questão 2c
Questão 1d	Questão 2d
Questão 1e	Questão 2e
Questão 2	Questão 1
Questão 3	Questão 3

**Tabela 5.2:** Distribuição da correspondência entre as questões do pré e pós-teste

Cada uma das questões acima era composta de subitens, e apenas na questão 1 eles foram dispostos de maneira diferente no pré e pós-teste, conforme explicitado no quadro anterior, os itens das demais questões mantiveram a mesma ordem de apresentação em ambos os instrumentos diagnósticos.

A seguir, analisaremos, na ordem em que constam do pré-teste, cada uma das questões dos instrumentos diagnósticos, apontando seu objetivo, seu conteúdo matemático e algumas de nossas expectativas para resolução das mesmas. Esclarecemos que estas expectativas referem-se aos resultados do pré-teste, momento no qual os alunos explicitarão seus conhecimentos prévios sobre as questões, pois não sofreram, ainda, a intervenção de ensino.

#### **5.5.1.1. Questão 1**

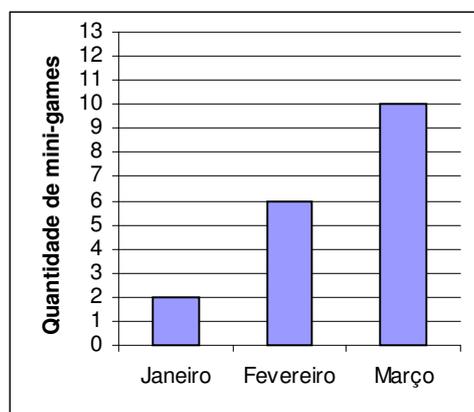
A primeira questão objetiva revelar o nível de leitura e interpretação de gráficos, em que se encontra o aluno, segundo os níveis de compreensão de gráficos de Curcio<sup>10</sup> (CURCIO, 1987; BATANERO et al., 1992), bem como seu conhecimento sobre o conceito de média aritmética e as estratégias utilizadas para se fazer uma previsão estatística, ou seja, verificar se o aluno possui noções tanto de Estatística Descritiva como de Estatística Inferencial.

Esta questão constitui-se de dados estatísticos apresentados em um gráfico de barras verticais e de cinco itens, que serão analisados a seguir. Para cada item, foi solicitada, de diferentes formas, uma justificativa para a resposta dada, com o objetivo de clarificar o raciocínio do aluno.

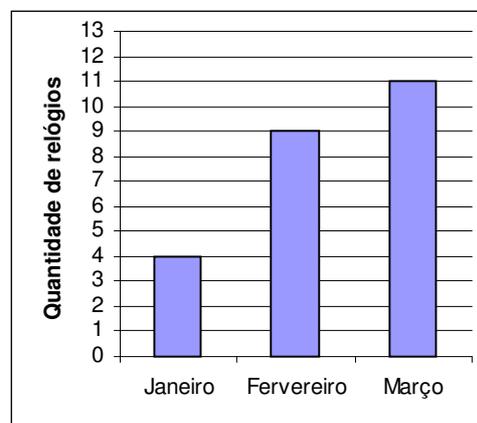
---

<sup>10</sup> A partir daqui, as referências aos níveis de compreensão de gráficos tratar-se-ão da terminologia utilizada por Curcio, constante no capítulo II.

Chico vende mini-games na praça da República. No gráfico abaixo está representada a quantidade de mini-games que ele vendeu nos meses de janeiro, fevereiro e março.



Maria vende relógios na praça da Sé. No gráfico abaixo está representada a quantidade de relógios que ela vendeu nos meses de janeiro, fevereiro e março.



**Quadro 5.2:** Questão 1 do pré e pós-teste

Itens “a” e “b”:

PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
A) EM QUAL MÊS “SEU CHICO” VENDEU MAIS MINI-GAMES?	A) EM QUAL MÊS MARIA VENDEU MENOS RELÓGIOS?
B) EM QUAL MÊS “SEU CHICO” VENDEU MENOS MINI-GAMES?	B) EM QUAL MÊS MARIA VENDEU MAIS RELÓGIOS?

**Quadro 5.3:** Itens “a” e “b” da questão 1 do pré e pós-teste

Os itens “a” e “b” têm por objetivo revelar se o aluno dominava o nível intermediário de leitura e interpretação de gráficos, uma vez que estes itens exigiam que o aluno lesse entre os dados, ou seja, a questão encontrava-se no nível 2 de Curcio (1987).

Quanto ao conteúdo matemático, a questão solicitava a localização de pontos extremos – de máximo e mínimo – nos itens “a” e “b” do pré-teste, respectivamente. No pós-teste, esta ordem inverteu-se, pois o item “a” abordava o ponto de mínimo e o item “b” o ponto de máximo.

Acreditamos que esses itens sejam de fácil resolução ao aluno, porque pesquisas apontam a facilidade dos alunos localizar pontos extremos neste tipo de gráfico (BELL e JANVIER, 1981 apud GUIMARÃES, 2002; GUIMARÃES, FERREIRA, ROAZZI, 2001; SANTOS e GITIRANA, 1999 apud GUIMARÃES, 2002). Esperamos um alto percentual de acertos nesses itens.

Quanto à leitura e interpretação de gráficos, outras pesquisas apontam respostas baseadas na realidade, isto é, uma leitura feita sem considerar os dados do gráfico (CARRAHER, SCHLIEMANN e NEMIROVSKY, 1995; GUIMARÃES, 2002; HOYLES, LEALY e POZZI, 1994 apud GUIMARÃES, 2002; JANVIER, apud FRIEL, CURCIO e BRIGHT, 2001; MAGINA, MARANHÃO, 1998; MC KNIGHT, KALLMAN, FISHER apud FRIEL, CURCIO e BRIGHT, 2001; SANTOS, MAGINA, 2001). Julgamos que esta questão apresente respostas com essa característica, especialmente, na parte de sua justificativa.

### Item “c”

PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
<p>“SEU CHICO” PEDIU PARA SEU NETINHO LUIS DETERMINAR QUAL FOI SUA VENDA MÉDIA MENSAL DE MINI-GAMES NESSES MESES. LUIS PEDIU AJUDA PARA SEUS COLEGAS QUE RESPONDERAM:</p> <p><b>RESPOSTA DE LUIS:</b> SUA VENDA MÉDIA MENSAL É 2 MINI-GAMES.  <b>RESPOSTA DE ALBERTO:</b> SUA VENDA MÉDIA MENSAL É 12 MINI-GAMES.  <b>RESPOSTA DE PAULO:</b> SUA VENDA MÉDIA MENSAL É 4 MINI-GAMES.  <b>RESPOSTA DE RUI:</b> SUA VENDA MÉDIA MENSAL É 6 MINI-GAMES.  <b>RESPOSTA DE CARLOS:</b> SUA VENDA MÉDIA MENSAL É 18 MINI-GAMES.</p> <p>E PARA VOCÊ, QUAL É A RESPOSTA CORRETA?</p>	<p>MARIA PEDIU PARA SUA SOBRINHA RENATA DETERMINAR QUAL FOI SUA VENDA MÉDIA MENSAL DE RELÓGIOS NESSES MESES. RENATA PEDIU AJUDA PARA SUAS COLEGAS QUE RESPONDERAM:</p> <p><b>RESPOSTA DE JOANA:</b> SUA VENDA MÉDIA MENSAL É 4 RELÓGIOS.  <b>RESPOSTA DE SONIA:</b> SUA VENDA MÉDIA MENSAL É 8 RELÓGIOS.  <b>RESPOSTA DE CARMEM:</b> SUA VENDA MÉDIA MENSAL É 11 RELÓGIOS.  <b>RESPOSTA DE SILVIA:</b> SUA VENDA MÉDIA MENSAL É 9 RELÓGIOS.  <b>RESPOSTA DE CARINA:</b> SUA VENDA MÉDIA MENSAL É 24 RELÓGIOS.</p> <p>E PARA VOCÊ, QUAL É A RESPOSTA CORRETA?</p>

**Quadro 5.4:** Item “c” da questão 1 do pré e pós-teste

No item “c”, objetivamos diagnosticar qual o conhecimento que o aluno tem sobre média aritmética. Usamos dois meios para facilitar a explicitação do raciocínio do aluno sobre esse conceito. O primeiro foi por meio dos valores fornecidos, no próprio item, como opções de resposta ao aluno e o outro ao solicitarmos uma justificativa.

Com os valores que escolhemos, como opções de resposta para o aluno, pretendemos observar se o mesmo associa média aritmética a outros valores característicos do gráfico apresentados na tabela a seguir:

<b>TESTE</b> <b>VALOR ASSOCIADO AO</b>	<b>PRÉ-TESTE</b>	<b>PÓS-TESTE</b>
PONTO DE MÁXIMO		Resposta de Carmem: 11
PONTO DE MÍNIMO	Resposta de Luis: 2	Resposta de Joana: 4
TOTAL	Resposta de Carlos: 18	Resposta de Carina: 24
“VALOR DO MEIO”	Resposta de Rui: 6	Resposta de Silvia: 9
VALOR ACIMA DO PONTO DE MÁXIMO	Resposta de Alberto: 12	

**Tabela 5.3:** Distribuição dos valores característicos associados à média aritmética

Interessa-nos observar se o aluno, intuitivamente, percebe uma das propriedades da média, segundo Strauss e Bichler (1988), a saber – a média é um valor compreendido entre os extremos. Acreditamos que as respostas cujos valores associam-se a ponto de máximo ou a ponto de mínimo, ao total, ou ainda, a valor acima do ponto de máximo, são indícios da não percepção e ou conhecimento dessa propriedade por parte do aluno.

Quanto ao valor associado ao “valor do meio”, acreditamos que ao optar por esta resposta, o aluno apenas associou o termo média ao valor da barra

posicionada no meio das barras verticais não percebendo, também, a propriedade da média citada anteriormente. Entretanto, no pré-teste, só pudemos analisar se o raciocínio do aluno foi fazer esta associação com o “valor do meio”, ou não, pela análise de sua justificativa, uma vez que a resposta correta coincide com aquele.

Em nossa análise, a justificativa fornecida pelo aluno foi sempre considerada em ambas as considerações anteriores, referentes à associação da média a valores característicos do gráfico.

Este item encontra-se no segundo nível de leitura de gráfico de Curcio (1987), a saber – ler entre os dados, que requer a integração dos dados apresentados no gráfico e o uso de outros conceitos e habilidades matemáticas, por isso, consiste em uma questão de maior grau de dificuldade ao aluno. Nossa expectativa era que poucos alunos acertem a mesma.

#### Item “d”

PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
<p>SE “SEU CHICO” TIVESSE VENDIDO 7 MINI-GAMES NO MÊS DE MARÇO, SUA VENDA MÉDIA MENSAL NESSE PERÍODO SERIA A MESMA? _____</p> <p>⇒ SE VOCÊ ACHA QUE <b>SIM</b>, EXPLIQUE PORQUÊ NAS LINHAS ABAIXO.</p> <p>⇒ MAS SE VOCÊ ACHA QUE <b>NÃO</b> ESCREVA NAS LINHAS ABAIXO QUAL SERIA A NOVA MÉDIA.</p>	<p>SE MARIA TIVESSE VENDIDO 6 RELÓGIOS NO MÊS DE FEVEREIRO, SUA VENDA MÉDIA MENSAL NESSE PERÍODO SERIA A MESMA? _____</p> <p>⇒ SE VOCÊ ACHA QUE <b>SIM</b>, EXPLIQUE PORQUÊ NAS LINHAS ABAIXO.</p> <p>⇒ MAS SE VOCÊ ACHA QUE <b>NÃO</b> ESCREVA NAS LINHAS ABAIXO QUAL SERIA A NOVA MÉDIA.</p>

**Quadro 5.5:** Item “d” da questão 1 do pré e pós-teste

O objetivo deste item é estudar a percepção do aluno quanto a outra propriedade da média: o valor médio pode ser influenciado pelos valores de cada

um dos dados. A questão permite ao aluno explicitar esta percepção ao optar pela resposta “não”, ainda que não saiba calcular a nova média.

Apontamos, ainda, a necessidade de o aluno apresentar outras habilidades matemáticas, além do cálculo da média para a resolução da questão, uma vez que é preciso desconsiderar uma das barras do gráfico e trocá-la por outra de “tamanho” diferente, o que por sua vez requer o cálculo de um novo total.

Portanto, a questão é bastante difícil para alunos do nível elementar, ainda que classificada no nível 2 de leitura de gráfico.

#### Item “e”

<b>PRÉ-TESTE</b>	<b>PÓS-TESTE</b>
OBSERVE COM ATENÇÃO O GRÁFICO ACIMA NOVAMENTE E DIGA QUANTOS MINI-GAMES VOCÊ ACHA QUE “SEU CHICO” DEVERÁ VENDER EM ABRIL?	OBSERVE COM ATENÇÃO O GRÁFICO ACIMA NOVAMENTE E DIGA QUANTOS RELÓGIOS VOCÊ ACHA QUE MARIA PODERÁ VENDER EM ABRIL?

**Quadro 5.6:** Item “e” da questão 1 do pré e pós-teste

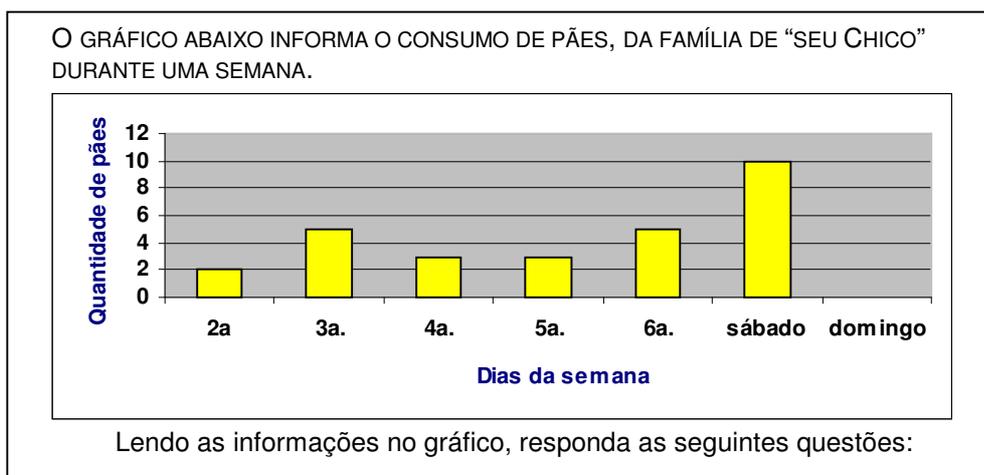
Neste item, temos por objetivo analisar se o aluno atinge o nível 3 de leitura de gráfico, o qual requer que realize previsões e inferências a partir dos dados, porém a informação solicitada não está diretamente descrita no gráfico; desta forma, o aluno precisará fazer uma extrapolação dos dados dos gráficos.

Nossa expectativa é que o aluno indique o valor 14 para a questão do pré-teste, por considerar que a venda está crescendo de quatro em quatro unidades a cada mês e indique os valores 12 ou 13 para o pós-teste, pois a quantidade de vendas é também crescente em cada mês, porém não apresenta um valor constante de crescimento.

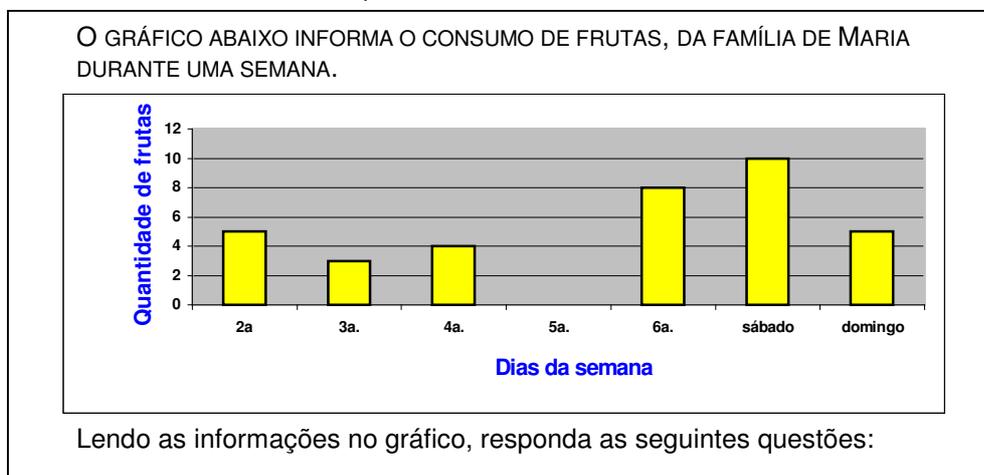
### 5.5.1.2. Questão 2

A questão 2, semelhante à anterior, tem por objetivo estudar o nível do aluno no que se refere à leitura e interpretação de gráficos e o conhecimento que ele possui sobre o conceito de média aritmética, apresenta, portanto, itens da Estatística Descritiva.

Da mesma forma que na questão 1, os dados são apresentados em um gráfico de barras verticais, porém, com algumas peculiaridades, ou seja, o gráfico mostra mais dados que o da questão anterior, utiliza uma escala não unitária e traz um dos elementos da amostra com quantidade nula, representada pela ausência da barra. Julgamos que estas características dificultarão a resolução dos itens pela análise feita abaixo:



**Quadro 5.7:** Questão 2 do pré-teste



**Quadro 5.8:** Questão 2 do pós-teste

Item “a”

PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
QUAL O TOTAL DE PÃES CONSUMIDOS POR ESSA FAMÍLIA NESSA SEMANA?	QUAL O TOTAL DE FRUTAS CONSUMIDAS POR ESSA FAMÍLIA NESSA SEMANA?

**Quadro 5.9:** Item “a” da questão 2 do pré e pós-teste

Para a resolução deste item, o aluno necessita ler entre os dados, integrando os dados do gráfico ao efetuar a soma dos mesmos. Para esta integração, necessário se faz que o aluno consiga ler o valor de cada dado da amostra, acreditamos que, nesta leitura, se encontrará a maior dificuldade para o aluno, uma vez que a escala está graduada de duas a duas unidades, o que, por conseguinte, faz com que algumas barras não possuam a indicação exata de seu valor no eixo vertical. Portanto, esperamos que poucos alunos resolvam a questão.

Itens “b” e “c”

PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
B) EM QUE DIA O CONSUMO DE PÃES FOI <b>MAIOR</b> ?	B) EM QUE DIA O CONSUMO DE FRUTAS FOI <b>MAIOR</b> ?
C) EM QUE DIA O CONSUMO DE PÃES FOI <b>MENOR</b> ?	C) EM QUE DIA O CONSUMO DE FRUTAS FOI <b>MENOR</b> ?

**Quadro 5.10:** Itens “b” e “c” da questão 2 do pré e pós-teste

Os itens têm como objetivo explicitar o nível de leitura e interpretação de gráficos dos alunos, ao solicitar a localização dos pontos de máximo e mínimo, respectivamente.

Julgamos que a localização do ponto de máximo não apresente dificuldades aos alunos, porém, quanto ao ponto de mínimo, há a intenção de

analisar se o mesmo apontará como ponto de mínimo o elemento com a menor barra ou os elementos sem barra, isto é, a que apresenta quantidade nula.

#### Item “d”

<b>PRÉ-TESTE</b>	<b>PÓS-TESTE</b>
TEVE ALGUM DIA NESSA SEMANA EM QUE NÃO HOUVE CONSUMO DE PÃO PELA FAMÍLIA DO SEU CHICO? <b>SE SIM, QUAL FOI ESSE DIA?</b>	TEVE ALGUM DIA NESSA SEMANA EM QUE NÃO HOUVE CONSUMO DE FRUTAS PELA FAMÍLIA DE MARIA? <b>SE SIM, QUAL FOI ESSE DIA?</b>

**Quadro 5.11:** Item “d” da questão 2 do pré e pós-teste

Este item apresenta uma questão simples, pois requer uma leitura no nível elementar, isto é, uma leitura dos dados, mas nossa intenção é que o aluno faça uma possível comparação entre este item e o anterior (item “c”), com o objetivo de validar sua resposta. Nossa expectativa é que a maioria dos alunos indique a resposta correta.

#### Item “e” e “f”

<b>PRÉ-TESTE</b>	<b>PÓS-TESTE</b>
QUAL O CONSUMO MÉDIO DIÁRIO DE PÃES DESSA FAMÍLIA?  QUE CONTA VOCÊ FEZ PARA ACHAR ESSE VALOR?	QUAL O CONSUMO MÉDIO DIÁRIO DE FRUTAS DESSA FAMÍLIA?  QUE CONTA VOCÊ FEZ PARA ACHAR ESSE VALOR?

**Quadro 5.12:** Itens “e” e “f” da questão 2 do pré e pós-teste

Neste item, o cálculo da média aritmética solicitado objetiva estudar a percepção do aluno quanto à seguinte propriedade da média aritmética - tem-se que ter em conta os valores nulos no cálculo da média. A questão é considerada de difícil resolução, pois, além de exigir a observação da propriedade citada, a

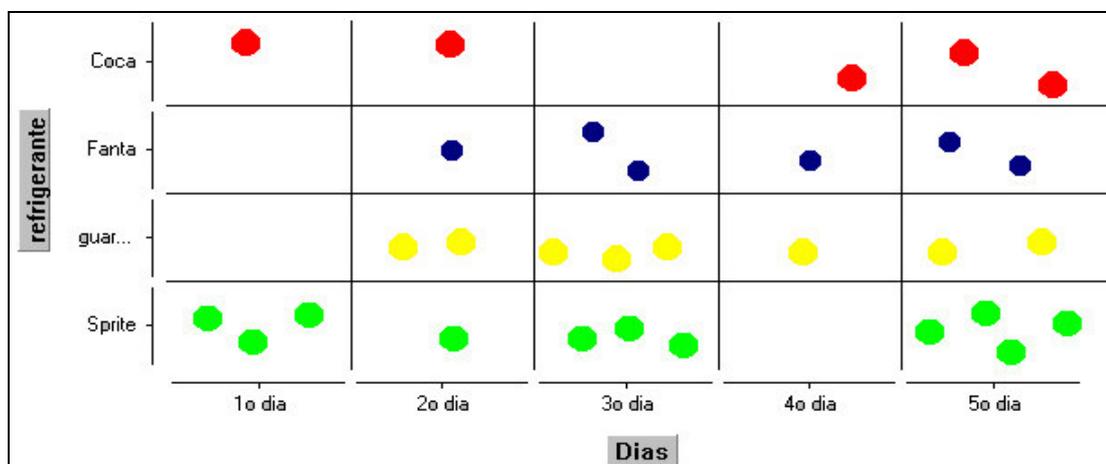
escala não unitária do gráfico traz dificuldades para a leitura da quantidade dos dados. O cálculo da média requer uma integração dos dados e a própria habilidade matemática de encontrar o valor médio, sendo, portanto, uma questão de nível 2 de leitura e interpretação de gráficos. Acreditamos que poucos alunos atinjam o sucesso em sua resolução.

A segunda pergunta desse item tem por objetivo elucidar o pensamento do aluno e as estratégias utilizadas pelo mesmo na resolução da questão. Para isto, foi disponibilizado um espaço retangular bastante suficiente na folha de atividade, no qual o aluno pôde registrar seus cálculos.

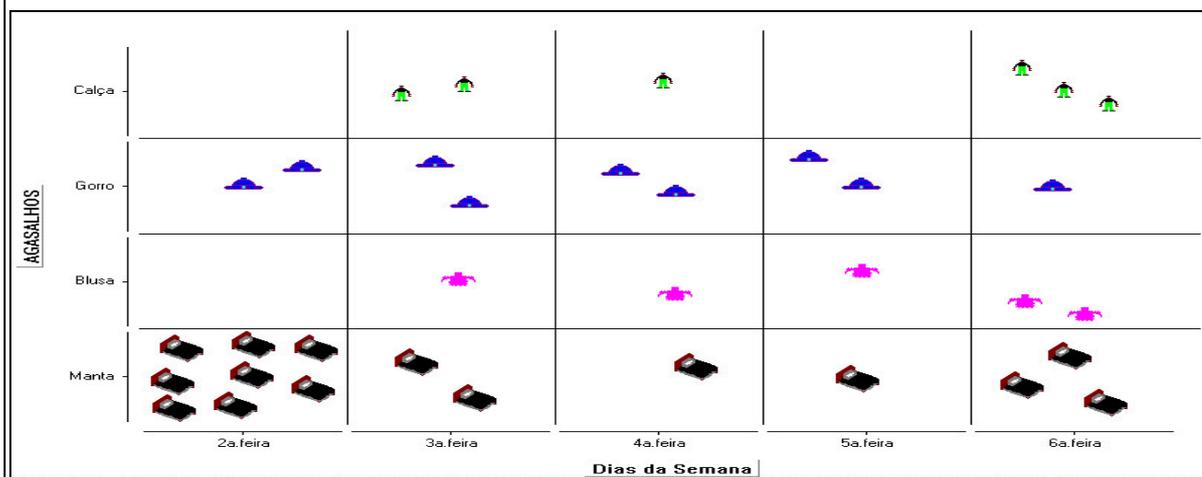
#### **5.5.1.3. Questão 3**

Na questão 3, apresentamos os dados em um gráfico pictórico de dupla entrada, extraído do software Tabletop. No gráfico, temos os dados de duas variáveis diferentes (refrigerantes e ou dia e tipos de refrigerantes/dia). A questão objetiva analisar o desempenho dos alunos em leitura e interpretação de gráficos dos alunos, em um gráfico desse tipo, bem como o conhecimento prévio do conceito de média aritmética, que é baseado nos dados apresentados em um gráfico de dupla entrada.

As crianças da 5<sup>a</sup>. série da escola Caetano de Campos fizeram uma campanha de reciclagem de latinhas de refrigerante. O grupo de Cristina marcou no gráfico abaixo, as latinhas que conseguiram trazer em cada um dos cinco dias da semana.



Os alunos da 5<sup>a</sup>. série da escola Caetano de Campos organizaram a Campanha do Agasalho para ajudar às crianças da comunidade. O grupo de Patrícia marcou no gráfico abaixo, os agasalhos que conseguiram trazer em cada um dos cinco dias da semana.



**Quadro 5.13:** Questão 3 do pós-teste

Na leitura deste gráfico, apontamos algumas dificuldades, pois o mesmo deve ser lido nos sentidos horizontal ou vertical, dependendo do que é solicitado em cada item da questão. Há, também, necessidade de uma inversão nessa leitura, pois ao ler os dados da primeira variável (refrigerantes e ou agasalhos) em relação ao eixo horizontal, a quantificação é feita na vertical e, a

leitura da segunda variável (marcas de refrigerantes/tipos de agasalhos) em relação ao eixo vertical, a quantificação é feita na horizontal. Em cada item, perguntas de diferentes formas objetivam elucidar a justificativa da resposta do aluno. A seguir apresentamos uma análise de cada item.

### Item “a”

PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
QUAL A MARCA DE REFRIGERANTE FOI MENOS RECOLHIDA PELO GRUPO DURANTE A SEMANA?	QUAL O TIPO DE AGASALHO QUE FOI MENOS RECOLHIDO PELO GRUPO DURANTE A SEMANA?

**Quadro 5.14:** Item “a” da questão 3 do pré e pós-teste

Trata-se de uma questão que objetiva estudar o desempenho em leitura e interpretação de gráficos do aluno. Este item solicita a indicação do elemento da amostra da segunda variável (leitura em relação ao eixo vertical) que apresenta a menor quantidade, requerendo que o aluno leia e compare os dados. A leitura da variável solicitada deve ser feita no sentido vertical, ao passo que a quantificação, necessária à comparação entre os elementos, deve ser realizada no sentido horizontal.

Neste item, acreditamos que o uso de distintos ícones, em ambos os instrumentos diagnósticos, facilite a leitura do gráfico, uma vez que esta diferenciação evidencia a divisão dos elementos do eixo vertical e facilita a quantificação dos mesmos.

No gráfico, neste item, há uma diferença na disposição da resposta correta, entre o pré-teste e o pós-teste. No pré-teste, a resposta correta situa-se na última linha horizontal do gráfico, julgamos, portanto que esteve mais facilitada do que no pós-teste, onde a mesma se localiza no “centro” do gráfico, isto é, na

segunda linha horizontal deste. Nossa expectativa é de um bom desempenho dos alunos.

Item “b”

PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
CARLOS ACHA QUE NO 2º DIA FORAM TRAZIDAS MENOS LATAS DE REFRIGERANTES. VOCÊ CONCORDA COM ELE?	JOÃO ACHA QUE NA 3ª.FEIRA FORAM RECOLHIDOS MENOS AGASALHOS. VOCÊ CONCORDA COM ELE?

**Quadro 5.15:** Item “b” da questão 3 do pré e pós-teste

Este item é semelhante ao anterior, tem, também, por objetivo estudar o desempenho em leitura e interpretação de gráficos apresentado pelo aluno e requer do mesmo um nível de leitura entre os dados. É solicitado ao aluno que concorde ou não com uma afirmação dada, a qual se refere à localização do elemento da primeira variável (leitura em relação ao eixo horizontal), com a menor quantidade, o que requer leitura e comparação dos dados do gráfico.

Tanto no pré-teste como no pós-teste, as afirmações são falsas e, na justificativa solicitada, espera-se que o aluno faça uma comparação entre a quantidade do elemento da afirmação e a quantidade de um outro elemento do gráfico que apresente uma quantidade menor.

Destacamos que, para a averiguação da questão, não é necessária a localização do elemento com a menor quantidade, pois há dois outros elementos com quantidades menores do que a da afirmação, ou seja, a afirmação refere-se ao elemento com a terceira menor quantidade.

Destacamos, ainda, que a questão constitui-se de uma pergunta indireta, podendo vir a ser de difícil compreensão para o aluno de 4ª série do Ensino Fundamental, dificultando assim sua resolução.

O item exige uma leitura da variável solicitada no sentido horizontal e uma quantificação no sentido vertical, porém não há diferenciação por ícones distintos, dos elementos do eixo horizontal. Estas características fazem-nos crer que o aluno apresente maiores dificuldades na resolução deste item.

### Item “c”

PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
QUAL O TOTAL DE LATAS DE REFRIGERANTES TRAZIDAS NA SEMANA?	QUAL O TOTAL DE AGASALHOS TRAZIDOS NA SEMANA?

**Quadro 5.16:** Item “c” da questão 3 do pré e pós-teste

Por meio desse item, objetivamos diagnosticar o desempenho em leitura e interpretação de gráficos do aluno. O cálculo da quantidade total da primeira variável (refrigerantes/agasalhos) exige a leitura e integração dos dados. Como esta quantidade é a mesma, tanto para uma leitura no sentido horizontal como no vertical, o aluno tem, pelo menos, três estratégias diferentes para resolver o problema:

- Contar os ícones um a um;
- Efetuar a soma parcial no sentido horizontal e, após, adicionar as somas parciais;
- Efetuar a soma parcial no sentido vertical e, após, adicionar as somas parciais.

Acreditamos que esse item não apresente grandes dificuldades ao aluno, uma vez que a contagem um a um constitui-se em uma estratégia bastante simples para esta faixa etária.

#### Item “d”

<b>PRÉ-TESTE</b>	<b>PÓS-TESTE</b>
QUAL A MÉDIA DIÁRIA DE LATAS TRAZIDAS NESTA SEMANA?	QUAL A MÉDIA DIÁRIA DE AGASALHOS TRAZIDOS NESTA SEMANA?

**Quadro 5.17:** Item “d” da questão 3 do pré e pós-teste

O item apresenta duplo objetivo, a saber – analisar o desempenho em leitura e interpretação de gráficos e a noção do conceito de média aritmética. A questão solicita o cálculo da média aritmética da primeira variável (refrigerantes e ou agasalhos).

Por ser um gráfico de dupla entrada, o item apresenta a seguinte dificuldade – identificar qual o número de dados (quantidade de dias) da variável mediada, necessitando, assim, uma atenção quanto ao eixo a ser considerado (horizontal) para a obtenção da informação. Tendo em vista as características mencionadas acima, julgamos que, nesse item, poucos alunos alcancem um bom desempenho.

### **5.5.2 – Intervenção de ensino**

Na intervenção, são abordadas a leitura e interpretação de gráficos pictóricos de barras verticais e de dupla entrada (semelhantes aos gráficos obtidos no software educativo Tabletop) e o conceito estatístico de média aritmética. Ressaltamos que a intervenção não teve como objetivo que o aluno

conhecesse definição de termos estatísticos ou trabalhasse com fórmulas. Mas sim, a finalidade foi “... fazer com que o aluno venha a construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar e interpretar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações...”, segundo o PCN (BRASIL, 1997, p. 56).

Na abordagem dos conteúdos, objeto de nosso estudo, apresentamos aos alunos diferentes situações-problema. Iniciamos com situações de leitura e interpretação de gráficos de barras verticais construídos com base nos dados coletados por eles mesmos; depois, com dados apresentados em uma tabela. Introduzimos situações nas quais a média aritmética foi apresentada como cota razoável, ao usarmos a estratégia da redistribuição.

A partir de então, as situações foram compostas dos dois conteúdos abordados – leitura e interpretação de gráficos e média. Trabalhamos as situações envolvendo as relações formais da média por meio da abordagem de algumas de suas propriedades e desenvolvemos uma situação algorítmica, na qual o total dos dados do gráfico e a quantidade total dos elementos foram relacionados com os elementos do algoritmo para o cálculo da média aritmética.

O uso do gráfico de dupla entrada caracterizou outras situações, como as de inferência estatística que foram apresentadas tanto relativamente à media, nas quais esta foi tomada como valor representativo dos dados, como à leitura e interpretação de gráficos, por meio de extrapolações.

A intervenção constituiu-se de oito encontros, nos quais foram desenvolvidas 17 atividades<sup>11</sup> (uma em cada ficha), de acordo com os dados da tabela a seguir:

---

<sup>11</sup> Essas atividades encontram-se, em sua íntegra, nos anexos 3 a 19.

ENCONTRO	ATIVIDADE	TIPO DE GRÁFICO	CONTEÚDO	OBJETIVO
1	1A	Barras verticais	- Coleta de dados; - Construção de gráfico.	- Familiarização com o material manipulativo (tábua de gráficos); - Desenvolvimento da leitura e interpretação de gráficos.
	1B		- Leitura e interpretação de gráficos.	
	1C		- Construção de gráfico	
2	2A	Barras verticais	- Construção de gráfico.	- Desenvolvimento da leitura e interpretação de gráficos; - Introdução do conceito de medida aritmética.
	2B		- Leitura e interpretação de gráficos	
	2C		- Conceito de média aritmética	
3	3A	Barras verticais	- Conceito de média aritmética.	- Cálculo da média aritmética por meio da redistribuição; - Percepção de propriedades da média.
	3B		- Propriedade da média: o valor médio pode ser influenciado pelos valores de cada um dos dados (C).	
	3C			
4	3D	Barras verticais	- Propriedade da média: o valor médio pode ser influenciado pelos valores de cada um dos dados (C); - Propriedade da média: tem-se que ter em conta os valores nulos no cálculo da média (F).	- Cálculo da média aritmética por meio da redistribuição; - Percepção de propriedade da média.
	4		- Conceito de média aritmética; - Propriedade da média: tem-se que ter em conta os valores nulos no cálculo da média (F).	
5	5A	Barras verticais	- Conceito de média aritmética; - Propriedade da média: a média na é, necessariamente, igual a um dos valores dos dados (D); - Inferência estatística.	- Cálculo da média aritmética; - Percepção de propriedade da média; - Utilização de inferência estatística por meio da média aritmética.
	5B	Dupla entrada	- Construção de gráfico; - Leitura e interpretação de gráficos; - Conceito de média aritmética	- Desenvolvimento da leitura e interpretação de gráficos; - Cálculo da média aritmética.
6	6A	Barras verticais	- Conceito de média aritmética; - Propriedade da média: a média é um valor compreendido entre os extremos da distribuição (A); - Inferência estatística.	- Cálculo da média aritmética; - Percepção de propriedade da média; - Utilização de inferência estatística por meio da média aritmética.
7	6B	Dupla entrada	- Construção de gráfico; - Leitura e interpretação de gráficos; - Conceito de média aritmética; - Inferência estatística.	- Desenvolvimento da leitura e interpretação de gráficos; - Cálculo da média aritmética; - Identificação de tendência.
8	7A	Barras verticais	- Leitura e interpretação de gráficos - Conceito de média aritmética; - Inferência estatística.	- Desenvolvimento da leitura e interpretação de gráficos - Cálculo da média aritmética; - Utilização de inferência estatística por meio da média aritmética.
	7B		- Conceito de média aritmética; - Propriedade da média: o valor médio pode ser influenciado pelos valores de cada um dos dados (C).	- Cálculo da média aritmética; - Percepção de propriedade da média.

**Tabela 5.4:** Distribuição das atividades desenvolvidas na intervenção de ensino

Na elaboração das atividades foram considerados os resultados do pré-teste, que apontaram para uma falta de conhecimento do conceito de média,

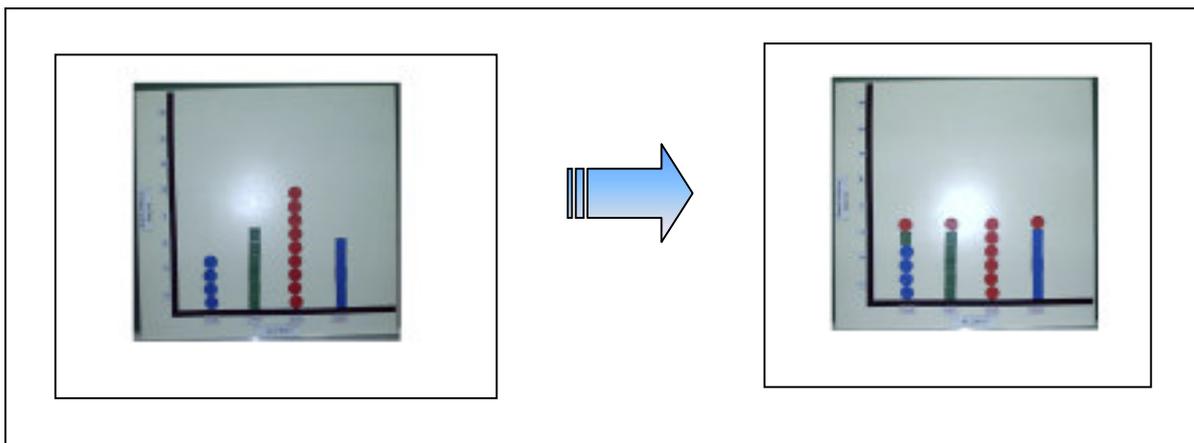
sendo esse mais identificado com a soma total dos dados do gráfico, conforme veremos no capítulo VI na análise dos resultados.

Tendo em vista este último resultado, desenvolvemos nossas atividades utilizando uma estratégia que denominamos estratégia da redistribuição, a saber: a quantidade total dos dados sendo redistribuída igualmente entre as categorias de maneira que o valor médio fosse identificado como sendo essa quantidade igualitária.

Lopes (1998) destaca que tal estratégia é mencionada no currículo francês no qual as crianças reúnem castanhas apanhadas separadamente e as redistribuem em partes iguais.

Associamos a estratégia de redistribuição ao material manipulativo no qual a quantidade de ímãs do gráfico (representando o total dos dados) é redistribuída entre todos os elementos da amostra até que possuam a mesma quantidade de ímãs, identificando essa quantidade igualitária como sendo a média aritmética dos dados do gráfico.

Ressaltamos que, ao manipular os objetos (ímãs) e, posteriormente, identificar a média aritmética com o valor das barras de mesma altura, o sujeito abstrai o conceito de média aritmética por meio de uma abstração pseudo-empírica, uma vez que é sua ação sobre o objeto material que lhe dá uma característica não inerente ao mesmo – barras de mesma altura, da qual ele abstrai um conceito. A Figura 5.2 ilustra a atividade do sujeito sobre o objeto e a transformação deste.



**Figura 5.2:** Exemplo de abstração pseudo-empírica

Em outras atividades da intervenção de ensino propostas aos alunos, o cálculo da média aritmética foi solicitado a partir da soma total dos dados do gráfico e da quantidade de elementos da amostra, sem a manipulação dos ímãs, havendo, portanto, a necessidade de abstração reflexionante, tendo como suporte a abstração pseudo-empírica anterior.

Os conhecimentos sendo transferidos para o nível das representações (reflexionamento) e reorganizados (reflexão) para solucionar um novo problema, isto é, a questão do cálculo da média abordada de uma outra maneira.

Buscando o nível das abstrações refletidas, apresentamos aos alunos uma questão, na qual o valor médio é utilizado como valor representativo dos dados, a saber, efetuar cálculo para uma população, tendo por base a média aritmética de uma amostra da mesma.

Procuramos desenvolver o conceito de média aritmética não só por meio da estratégia da redistribuição, mas também, pela percepção de suas propriedades.

Nas diversas situações apresentadas aos alunos, os dados para o cálculo da média eram extraídos de um gráfico, o que tornava sua leitura e

interpretação uma necessidade subjacente, sendo, portanto, desenvolvidas em todas as atividades.

No pré-teste, o bom desempenho dos alunos em relação à leitura e interpretação do gráfico de dupla entrada, apontado no capítulo VI, levou-nos a priorizar o gráfico de barras verticais na elaboração de ensino, motivo pelo qual há um maior número de atividades envolvendo esse tipo de gráfico.

Algumas atividades incluíram a inferência estatística, por meio do uso do conceito de média aritmética e pela identificação de tendência no gráfico.

No início, todas as atividades apresentam um contexto, no qual se desenvolvem os itens das questões e suas problemáticas. Os contextos foram escolhidos, considerando-se temas do cotidiano das crianças da faixa etária com a qual trabalhamos.

Friel, Curcio e Bright (2001) apontam a necessidade dos pesquisadores utilizarem gráficos dentro de contextos que apresentem dados do mundo real (não-fictícios), o que denominam de “*within-context graphs*”. Acrescentam que um usuário de gráfico deve classificar a situação do gráfico dentro do contexto referenciado pelo mesmo e focar a interpretação sobre o que está representado pelos dados no gráfico, apesar de suas noções preconcebidas sobre a situação.

Ainda que os contextos e os dados por nós usados sejam fictícios, acreditamos que se encontram bem próximos do mundo infantil e podem exigir dos alunos a desvinculação mencionada anteriormente, ou seja, entre suas noções preconcebidas e os dados apresentados no gráfico.

Mooney (apud FRIEL, CURCIO e BRIGHT, 2001) aponta como partes da intuição estatística<sup>12</sup> o senso de razoabilidade, que está interligada ao contexto dos dados do gráfico, pois é necessário o uso da lógica (razoabilidade) ao conectar-se pensamento estatístico e contexto.

Acreditamos que as questões envolvendo a inferência estatística utilizadas por nós requeriam a intuição estatística de Mooney, podendo ser dificultadas por contextos mais familiares. Janvier (apud FRIEL, CURCIO e BRIGHT, 2001) acrescenta que, o contexto aumenta o número de elementos, para os quais o leitor de gráfico deva atentar.

As fichas de atividades foram distribuídas uma a uma, sempre após o término e o recolhimento de sua anterior, em todos os encontros.

Inicialmente, as atividades eram lidas em voz alta pela pesquisadora e suas questões explicadas. Ao final das mesmas, a pesquisadora procedia ao que chamamos de fechamento, isto é, momento no qual todas as questões eram respondidas e discutidas de maneira conjunta, com a participação de toda a classe.

Durante o desenvolvimento de toda a intervenção de ensino, permaneceram na sala de aula, a pesquisadora, três observadores, a saber – dois mestrandos e a professora da classe. Permitimos aos alunos responderem toda e qualquer pergunta feita a eles pelos observadores, porém, ao solicitarem explicações, estas deveriam ser dirigidas somente à pesquisadora.

A seguir, descrevemos o procedimento adotado em cada encontro, como também na aplicação de cada atividade, apresentando, ainda, uma análise de cada questão constante nas atividades.

---

<sup>12</sup> Intuição estatística, segundo Mooney, é a habilidade para aplicar tipos estatísticos dentro de vários contextos ou situações adequados ao que é necessário (MOONEY apud FRIEL, CURCIO, BRIGHT, 2001).

### 5.5.2.1. Encontro 1

Neste encontro, tivemos o desenvolvimento de três atividades – 1A, 1B e 1C, descritas a seguir. Ressaltamos que, nestas atividades, utilizamos a escala dos números pares, fixada no eixo vertical<sup>13</sup>, para a construção dos gráficos de barras verticais<sup>14</sup> na tábua de gráficos.

#### Atividade 1A

1) Vocês irão desenvolver várias atividades neste grupo durante alguns encontros. O que vocês acham de se conhecerem melhor?

Anotem na tabela abaixo os dados das pessoas que formam as famílias de todos os alunos de seu grupo. Anotem, também a quantidade de adultos, de crianças, de homens e de mulheres. Não se esqueçam que vocês também fazem parte de suas próprias famílias!

ALUNO	QUANTIDADE DE PESSOAS	QUANTIDADE DE ADULTOS	QUANTIDADE DE CRIANÇAS	QUANTIDADE DE HOMENS	QUANTIDADE DE MULHERES

2) Com os dados desta tabela e utilizando a tábua de gráficos, façam um gráfico que represente a quantidade de pessoas que pertencem à família de cada aluno do seu grupo.

**Quadro 5.18:** Atividade 1A da intervenção de ensino

Esta atividade teve por objetivo a familiarização com o material manipulativo, evidenciando o uso dos respectivos ímãs para os elementos do gráfico de barras – eixos (vertical e horizontal), escala, categorias e variável. Por conseguinte, esta identificação levou os alunos à familiarização com este tipo de gráfico.

Após a distribuição da atividade, a pesquisadora procedia à leitura da mesma e dava orientações quanto à coleta dos dados solicitada na questão 1. Ao

<sup>13</sup> A escala foi fixada no eixo vertical em todas as atividades.

<sup>14</sup> A partir de então, sempre que mencionarmos a palavra “gráfico” estaremos nos referindo a uma gráfico de barras verticais, salvo outra especificação.

término dessa, a pesquisadora construía, em sua tábua de gráficos, um gráfico de barras (pictórico) que representasse a quantidade de pessoas pertencentes a sua família, as famílias dos observadores e da professora da classe, dando um exemplo para a resolução da questão 2.

A seguir, os alunos construía seus gráficos em suas tábuas de gráficos, com os dados que coletaram entre os componentes de seus grupos respectivos.

Pesquisas mostram que crianças do Ensino Fundamental devem ser envolvidas em coleta de dados reais para construir seus gráficos e salientam que a fase de coleta de dados é importante para a fase de análise (CURCIO, 1987. MAGINA E MARANHÃO, 1998).

O PCN também aponta a organização e descrição de dados, a partir da coleta dos dados, como facilitadores da compreensão de tabelas e gráficos (BRASIL, 1997).

A pesquisadora chamava a atenção dos alunos, quanto à colocação dos números da escala, solicitando a verificação da posição destes em relação à altura das barras. Recolhemos as folhas desta atividade, permanecendo os alunos com seus respectivos gráficos construídos em suas tábuas.

### Atividade 1B

1) Observando o gráfico que vocês fizeram, respondam às questões abaixo:

a) A família de qual aluno do seu grupo tem mais pessoas? \_\_\_\_\_  
 Quantas pessoas tem nessa família? \_\_\_\_\_

b) A família de qual aluno do seu grupo tem menos pessoas? \_\_\_\_\_  
 Quantas pessoas tem nessa família? \_\_\_\_\_

c) Há colegas do seu grupo que têm a mesma quantidade de pessoas na família? \_\_\_\_\_  
 Se houver, quais são os alunos com a mesma quantidade de pessoas na família? \_\_\_\_\_

2) Desenhem no retângulo abaixo o gráfico que seu grupo fez na tábua de gráficos.

Gráfico 1

Agora vocês já conhecem um pouco mais sobre seus coleguinhas!

**Quadro 5.19:** Atividade 1B da intervenção de ensino

A atividade 1B teve por objetivo desenvolver as habilidades elementares de leitura e interpretação de gráficos – localização de pontos extremos (máximo e mínimo, na questão 1, itens “a” e “b”, respectivamente). No item “c”, solicitamos uma comparação entre os dados. Nos itens “a”, “b” e “c”, os alunos necessitavam observar a altura das barras e compará-las. Para esta leitura de gráfico, os alunos utilizaram o gráfico construído na tábua de gráfico, na atividade anterior.

Na questão 2, solicitamos que o grupo de alunos reproduzisse o gráfico, construído na tábua, desenhando-o no retângulo dado, como meio de coleta da construção do mesmo, uma vez que as atividades foram somente audiogravadas, não utilizamos vídeo ou câmeras fotográficas.

### Atividade 1C

Como vocês puderam observar, acabou de chegar um aluno um pouco atrasado! Seu nome é “Imaginário”!

- 1) “Imaginário” gostaria de entrar no seu grupo. Como ficaria o gráfico com esse novo aluno, sabendo que ele mora sozinho?
- 2) Desenhem no retângulo abaixo o gráfico incluindo o “Imaginário”.

Gráfico 2

**Quadro 5.20:** Atividade 1C da intervenção de ensino

Na questão 1 da atividade 1C, buscamos, de maneira lúdica, reforçar a construção de gráfico, enfatizando a correta manipulação do material, bem como a identificação de elementos do gráfico – eixos e seus elementos.

Ao solicitar a inclusão, no gráfico, de um novo elemento da amostra dada, ou seja, o aluno necessitou saber em que eixo colocar o “Imaginário”, incluindo-o no eixo dos alunos. O desenho do gráfico construído na questão 2 objetivou o registro do mesmo para análise posterior.

Buscamos com a inserção do personagem “Imaginário” preparar o aluno para as questões de Estocástica apresentadas em atividades subseqüentes.

### 5.5.2.2. Encontro 2

As atividades 2A, 2B e 2C foram desenvolvidas neste encontro e estão descritas abaixo.

#### Atividade 2A

Na festa dos aniversariantes do mês de abril da classe da Professora Carla tinha um “bexigão” cheio de balas. Ao estourar o “bexigão”, cada aluno pegou algumas balas. A tabela abaixo mostra a quantidade de balas pegas por quatro alunos dessa classe.

NOME DO ALUNO	QUANTIDADE DE BALAS
CAMILA	4
PAMELA	6
ARTUR	8
JOÃO	2

1) Na tábua de gráficos, façam um gráfico que mostre a quantidade de balas que cada um destes alunos pegou.

**Quadro 5.21:** Atividade 2A da intervenção de ensino

Com a aplicação dessa atividade, objetivamos a construção de um gráfico de barras verticais (pictórico), na tábua de gráfico, com base nos dados apresentados em uma tabela, para que, por meio do mesmo, desenvolvêssemos a leitura e interpretação de gráficos propostas na atividade seguinte.

Antes de passar à atividade 2B, quando os alunos já haviam terminado a construção do gráfico em suas tábuas, a pesquisadora construiu o gráfico em sua tábua, com a escala composta pelos números ímpares, uma vez que tivemos por objetivo apresentar os gráficos com uma maior diversidade possível quanto às escalas usadas.

Atividade 2B

1) Respondam as questões de acordo com o gráfico que vocês fizeram:

a) Qual aluno pegou mais balas? \_\_\_\_\_  
Quantas balas ele pegou? \_\_\_\_\_

b) Qual aluno pegou menos balas? \_\_\_\_\_  
Quantas balas ele pegou? \_\_\_\_\_

c) Houve alunos que pegaram a mesma quantidade de balas? \_\_\_\_\_  
Se sim, quais foram esses alunos? \_\_\_\_\_

d) Quantas balas foram pegas, no total, por estes quatro alunos? \_\_\_\_\_

e) Quantas balas pegou João? \_\_\_\_\_

2) Desenhem o gráfico da tábua de gráficos no retângulo abaixo:

Gráfico 1

**Quadro 5.22:** Atividade 2B da intervenção de ensino

Esta atividade teve por objetivo desenvolver habilidades de leitura e interpretação de gráficos, conforme os dados da tabela a seguir:

ITEM	HABILIDADE
A	Localização de ponto de máximo e do valor da quantidade desse
B	Localização de ponto de mínimo e do valor da quantidade desse
C	Comparação de dados da amostra
D	Composição de grupos – união
E	Localização do valor de um elemento da amostra

**Tabela 5.5:** Distribuição das habilidades de leitura e interpretação de gráficos desenvolvidas na atividade 2B

Na questão 1, são solicitadas habilidades de leitura e interpretação de gráficos que exigem não apenas a comparação entre a altura das barras, como na atividade 1B, mas também efetuar a leitura da escala, para determinar o valor da frequência da categoria nos itens “a”, “b”, e “e”.

No item “d”, além da determinação da quantidade de todos os elementos da amostra, necessário se fez a soma das mesmas para encontrar o total de balas pegas pelos quatro alunos representados no gráfico. Nesta

atividade, também, a questão 2 tem a função de registro da construção do gráfico pelos alunos.

### Atividade 2C

Camila ficou triste porque João conseguiu apenas duas balas. Ela propôs aos alunos de seu grupo que seria mais justo que todos ficassem com a mesma quantidade de balas.



- 1) Como ficaria o gráfico se cada aluno ficasse com a mesma quantidade de balas?  
Desenhem este gráfico no retângulo abaixo:

Gráfico 2

- 2) De acordo com a proposta de Camila, com quantas balas cada aluno ficaria? \_\_\_\_\_  
Essa quantidade de balas com que cada aluno ficaria é chamada média dessas quatro quantidades.

No dia-a-dia, vocês já devem ter ouvido expressões do tipo:

- Em média. Eles ganham...
- A média de gols...
- A média de filhos por família é...

Sendo assim, podemos dizer que a média dessas quatro quantidade é 5 balas.

**Quadro 5.23:** Atividade 2C da intervenção de ensino

Nesta atividade, objetivamos introduzir o conceito de média aritmética por meio da estratégia da redistribuição, que é induzida pela questão 1, ou seja, solicitando que os alunos encontrem a quantidade igualitária a todos os elementos do gráfico, sendo esta a resposta da questão 2.

No término da atividade, a pesquisadora procede à leitura do texto que consta no final da página, enfatizando a relação entre a quantidade igualitária e a média aritmética.

Após a redistribuição, o desenho do gráfico é solicitado aqui não para registro, mas sim, para comparação entre o gráfico com os dados iniciais e esse,

com a quantidade igualitária. A pesquisadora chama a atenção dos alunos para a altura das barras dos dois gráficos, a fim de que percebam que, no segundo, as barras passam a ter a mesma altura.

### **5.5.2.3. Encontro 3**

Nesse encontro, aplicamos as atividades 3A, 3B e 3C. Os gráficos utilizados foram previamente construídos nas tábuas dos alunos e da pesquisadora, todos com a escala: 3, 6, 9, 12.

Em cada atividade, solicitamos que os alunos desenhassem o novo gráfico que construíram, uma vez que os dados iam sendo alterados ao longo do desenvolvimento das mesmas. O objetivo dos desenhos, inclusive na atividade 3D, foi a comparação entre as diferentes médias aritméticas obtidas<sup>15</sup>.

Abaixo apresentamos a descrição de cada uma das atividades, incluindo a atividade 3D, ainda que esta tenha sido aplicada no encontro 4, uma vez que não nos foi possível desenvolver as quatro atividades (3A, 3B, 3C e 3D) no prazo disponível neste encontro.

---

<sup>15</sup> O retângulo para o desenho consta, aqui, apenas da atividade 3A, porém foi fornecido também nas atividades 3B, 3C e 3D.

### Atividade 3A

Na festa dos aniversariantes do mês de abril da professora Carla havia outros alunos. Na tábua de gráficos está representada a quantidade de balas que os alunos do grupo de Paula pegaram ao estourar o “bexigão”.

1) Observando o gráfico respondam:

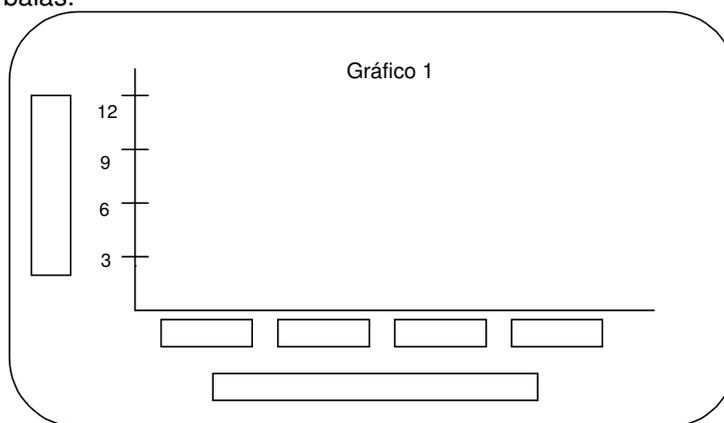
a) Qual o total de balas que este grupo de alunos pegou? \_\_\_\_\_

b) Qual o total de alunos deste grupo? \_\_\_\_\_

c) Se cada aluno ficasse com a mesma quantidade de balas, com quantas balas cada um ficaria? \_\_\_\_\_

d) Como é chamada essa quantidade que vocês encontraram na pergunta c)? \_\_\_\_\_

2) Desenhem, no retângulo como ficou o gráfico quando os alunos ficaram com a mesma quantidade de balas.



**Quadro 5.24:** Atividade 3A da intervenção de ensino

A atividade objetivou desenvolver o conceito de média, solicitando ao aluno a identificação, nos itens “a” e “b”, dos dois componentes numéricos para o cálculo da média – o total de balas pegas pelo grupo de alunos representado no gráfico e o total de alunos deste grupo - e; requerendo, por meio dos itens “c” e “d”, a identificação da quantidade igualitária com o termo conceitual – média.

A seguir, tendo em vista a similitude entre as suas questões, analisaremos conjuntamente as atividades 3B, 3C e 3D.

Atividade 3B

Paula tinha se esquecido de contar as 4 balas que havia guardado em seu bolso. Portanto, ela pegou 12 balas.

1) Na tábua de gráficos refaçam o gráfico acrescentando as balas que Paula encontrou em seu bolso.

2) Observando este novo gráfico respondam:

a) O total de balas mudou? \_\_\_\_\_

Se sim, qual é o novo total de balas? \_\_\_\_\_

b) O total de alunos mudou? \_\_\_\_\_

Se sim, qual é o novo total de alunos? \_\_\_\_\_

c) Antes de Paula encontrar as balas em seu bolso, cada aluno ficaria com 4 balas. Acrescentando as balas que Paula achou, a média de balas por aluno vai mudar?

Se sim, qual será a nova média? \_\_\_\_\_

Essa nova média é maior ou menor que a média anterior? \_\_\_\_\_

**Quadro 5.25:** Atividade 3B da intervenção de ensino

Atividade 3C

Paula pensou em guardar para seus irmãos 8 das balas que tinha pego. Os colegas do grupo concordaram.

1) Refaçam o gráfico, na tábua de gráficos, retirando as 8 balas que Paula guardou.

2) Respondam, observando este último gráfico feito:

a) Qual o total de balas do grupo? \_\_\_\_\_

b) Qual o total de alunos do grupo? \_\_\_\_\_

c) Qual a média de balas por aluno? \_\_\_\_\_

d) O que aconteceu com a média? \_\_\_\_\_

e) Se vocês fossem do grupo de Paula, vocês concordariam com que ela guardasse as 8 balas? \_\_\_\_\_

Por que? \_\_\_\_\_

**Quadro 5.26:** Atividade 3C da intervenção de ensino

Atividade 3D

1) Supondo que Paula tivesse guardado todas as suas balas, como ficaria o gráfico? Faça-o na tábua de gráficos.

2) Observando este último gráfico, respondam:

a) Qual o total de balas do grupo? \_\_\_\_\_

b) Qual o total de alunos do grupo? \_\_\_\_\_

c) Qual a média de balas por aluno? \_\_\_\_\_

d) O que aconteceu com a média? \_\_\_\_\_

e) Seria melhor para Paula guardar todas as suas balas ou não? \_\_\_\_\_

Por que? \_\_\_\_\_

**Quadro 5.27:** Atividade 3D da intervenção de ensino

As três atividades acima citadas tiveram por objetivo a percepção de propriedades da média – o valor médio pode ser influenciado pelos valores de cada um dos dados, foi uma propriedade abordada nestas três atividades. Ao passo que a atividade 3D, além da propriedade anterior, abordou ainda – tem-se que ter em conta os valores nulos no cálculo da média.

As atividades foram estruturadas de maneira a conduzir o aluno à percepção de que, ao alterar-se um dos valores dos dados, conseqüentemente, teríamos o valor total mudado o que, por sua vez, alteraria o valor da média, verificando-se, assim, a primeira propriedade da média citada anteriormente. Optamos por alterar apenas o valor dos elementos, mantendo a quantidade dos elementos da amostra constante, tendo em vista a faixa etária dos sujeitos de nossa pesquisa.

Para tanto, nessas três atividades, apresentamos quatro itens<sup>16</sup> (com pequenas diferenças em sua redação), nesta ordem: “Qual o total de balas?”; “Qual o total de alunos do grupo?”; “Qual a média de balas por aluno” e “O que aconteceu com a média?”.

As atividades 3C e 3D apresentaram, cada uma delas, um item final (e), por meio do qual objetivamos que os alunos expressassem relações entre o valor da média e a alteração efetuada, pelo contexto da atividade, no valor de um dos dados, a saber, a quantidade do elemento Paula.

A atividade 3D, ao apresentar um elemento com quantidade nula (Paula ficou sem balas) abordou uma outra propriedade - tem-se que ter em conta os valores nulos no cálculo da média. O aluno teria de considerar Paula para o cálculo da média, pois a mesma não havia saído do grupo, ou seja, ela

---

<sup>16</sup> Na atividade 3B, o quarto item está inserido no item c, isto é, no terceiro item.

permanecia como um dos elementos do gráfico, mas, com quantidade nula. Esta é a primeira vez, durante a intervenção de ensino, que abordamos esta propriedade.

#### **5.5.2.4. Encontro 4**

As atividades 3D e 4 constituíram este encontro, que teve por objetivo desenvolver o conceito de média aritmética e a percepção da propriedade desta – tem-se que ter em conta os valores nulos no cálculo da média.

Uma vez que não foi possível aplicar a atividade 3D no encontro anterior, a pesquisadora apresentou, apenas em sua tábua de gráficos, o gráfico da atividade 3A e retomou as atividades 3A, 3B e 3C, refazendo com a classe o cálculo da média em cada uma das situações, comparando os valores médios encontrados com as diferenças de cada situação dada, em cada uma das atividades citadas (aumentos e diminuições no total de balas). Após, distribuímos a atividade 3D, para que os alunos desenvolvessem-na observando o gráfico da tábua da pesquisadora.

Na aplicação da atividade 4, também, foi apresentado aos alunos somente o gráfico construído na tábua da pesquisadora, não sendo permitido que se aproximassem desta para a leitura do gráfico, tendo em vista a importância de utilização da escala (e não da contagem um a um dos ímãs) para a quantificação das frequências. A escala utilizada foi a mesma da atividade anterior – 3, 6, 9, 12. Após responderem todas as questões da atividade 4 e recolhermos as fichas de atividade, permitimos aos alunos que construíssem o gráfico em suas tábuas e efetuassem possíveis validações.

Uma vez que a atividade 3D foi descrita e analisada as atividades do encontro 3, passaremos à atividade 4.

#### Atividade 4

Na tábua de gráficos da professora está representada a quantidade de balas que cada aluno do grupo de Bruna pegou, na festa da classe da professora Carla.

1) Observando o gráfico da tábua de gráficos da professora, respondam:

a) Havia alguém que não conseguiu pegar nenhuma bala? \_\_\_\_\_

Quem? \_\_\_\_\_

b) Se cada aluno ficasse com a mesma quantidade de balas, com quantas balas cada um ficaria? \_\_\_\_\_

c) Como é chamada essa quantidade que vocês encontraram na pergunta b)? \_\_\_\_\_

d) Qual o total de balas pegas pelo grupo? \_\_\_\_\_

e) Qual o total de alunos deste grupo? \_\_\_\_\_

f) Vocês saberiam calcular a média utilizando o total de balas pegas pelo grupo e o total de alunos deste grupo? \_\_\_\_\_

Se sim, que conta vocês fariam?

Espaço para fazer a conta

g) Bruna não ficou contente ao perceber que Tiago ficaria com a mesma quantidade de balas que todos do grupo, afinal ele não tinha pego nenhuma bala. Vocês concordam com Bruna? \_\_\_\_\_

Por que? \_\_\_\_\_

h) Para encontrar a média de balas por aluno precisamos incluir Tiago ou não? \_\_\_\_\_

Por que? \_\_\_\_\_

**Quadro 5.28:** Atividade 4 da intervenção de ensino

Os itens “b” e “c” da atividade acima requerem que o aluno calcule a média por meio da estratégia da redistribuição e relacione aquela com a quantidade igualitária obtida ao se efetuar a redistribuição.

Os itens “d”, “e” e “f” conduzem os alunos a relacionarem os dois componentes numéricos do cálculo da média, extraídos dos dados do gráfico – o total dos dados da amostra e a quantidade total de elementos da mesma -, ao algoritmo da média. Por meio dos itens “a”, “g” e “h”, buscamos chamar a atenção

do aluno para a necessidade de considerar a quantidade nula (Tiago) no cálculo da média, vindo desta forma, a perceber a propriedade da média – tem-se que ter em conta os valores nulos no cálculo da média.

#### **5.5.2.5. Encontro 5**

Neste encontro, duas atividades 5A e 5B foram desenvolvidas, tendo por objetivo além da percepção da seguinte propriedade da média: a média não é, necessariamente, igual a um dos valores dos dados, o emprego da mesma para efetuar uma inferência estatística, na atividade 5A e na 5B, o objetivo da leitura e interpretação de um gráfico de dupla entrada e o cálculo da média aritmética baseado em dados apresentados neste tipo de gráfico.

O gráfico, com os dados para resolução das questões da atividade 5A, foi, previamente, construído e apresentado “pronto” na tábua de gráficos de todos os grupos e no material da pesquisadora. Já, o gráfico da atividade 5B foi construído pelos alunos, de modo concomitante com a pesquisadora, visto que se trata da primeira atividade, em que um gráfico de dupla entrada é utilizado, necessitando orientações, por parte da pesquisadora, quanto ao eixo vertical, no qual não mais será fixada a escala, mas sim, será efetuada uma subdivisão, semelhante ao eixo horizontal.

A colocação dos ímãs também será diferenciada, não mais em forma de “barra vertical” com relação estrita com a escala, mas requerendo atenção quanto à subdivisão correspondente a cada elemento referente aos dois eixos.

Passaremos à descrição e análise de cada uma das atividades desse encontro.

### Atividade 5A

Tia Nena está preparando uma festa para os alunos da 4ª série. Para isso ela precisa saber qual a média de salgadinhos consumidos por essas crianças.

O gráfico da tábua de gráficos fornece a quantidade de salgadinhos consumida por seis crianças da 4ª série onde será a festa.

1) Observando este gráfico, respondam:

a) Qual a quantidade média de salgadinhos consumidos pelos alunos deste grupo? \_\_\_\_\_

b) Quem consome mais salgadinhos? \_\_\_\_\_  
Quantos? \_\_\_\_\_

c) Quem consome menos salgadinhos? \_\_\_\_\_  
Quantos? \_\_\_\_\_

d) Tem algum aluno do grupo, que consome mais salgadinhos que a quantidade média de salgadinhos consumida pelos alunos do grupo? \_\_\_\_\_  
Quem? \_\_\_\_\_

e) Tem algum aluno do grupo, que consome menos salgadinhos que a quantidade média de salgadinhos consumida pelos alunos do grupo? \_\_\_\_\_  
Quem? \_\_\_\_\_

f) Tem algum aluno no grupo, que consome a mesma quantidade da média de salgadinhos consumida pelos alunos do grupo? \_\_\_\_\_  
Quem? \_\_\_\_\_

g) Vocês acham que com esses dados, a Tia Nena pode fazer uma previsão de quantos salgadinhos ela deverá preparar para a classe toda? \_\_\_\_\_  
Por que? \_\_\_\_\_

h) Se for possível fazer a previsão, quantos salgadinhos ela precisará fazer para uma classe com 30 alunos? \_\_\_\_\_  
Como vocês chegaram a este resultado? \_\_\_\_\_

Espaço para fazer as contas

**Quadro 5.29:** Atividade 5A da intervenção de ensino

Nos itens “a”, “b” e “c”, são solicitados o cálculo da média, a localização de ponto de máximo e mínimo, respectivamente. Em seguida, solicitamos, nos itens “d”, “e” e “f”, três comparações entre os dados do gráfico e o valor da média calculado no item “a”, a fim de que os alunos possam perceber a propriedade - a média não é, necessariamente, igual a um dos valores dos dados.

Em cada item, a especificação dos elementos comparados tem por objetivo reforçar a percepção da propriedade. Os itens “g” e “h” requerem o cálculo de uma previsão, utilizando a média aritmética, exigindo, portanto, lançar

mão da inferência estatística, ou seja, a questão encontra-se no nível 3 de leitura e interpretação de gráficos, sendo bastante difícil aos alunos da faixa etária trabalhada por nós. As justificativas requeridas nestes dois itens são importantes para elucidar o raciocínio do aluno.

### Atividade 5B

Tia Nena quer saber se é verdade que, nesta classe, as meninas consomem mais salgadinhos que os meninos.

1) Utilizando os dados do gráfico de frequência da atividade anterior, construam, na tábua de gráficos, um gráfico de dupla entrada que possa auxiliar Tia Nena.

2) Observando este gráfico, respondam:

a) Qual o total de salgadinhos consumidos pelas meninas? \_\_\_\_\_

b) Qual o total de salgadinhos consumidos pelos meninos? \_\_\_\_\_

c) Vocês concordam que as meninas deste grupo consomem mais salgadinhos que os meninos? \_\_\_\_\_

Por que? \_\_\_\_\_

d) Qual a quantidade média de salgadinhos consumida por estes alunos? \_\_\_\_\_

e) Podemos afirmar que todos os alunos deste grupo consumiram exatamente \_\_\_\_\_ salgadinhos? \_\_\_\_\_

Por que? \_\_\_\_\_

**Quadro 5.30:** Atividade 5B da intervenção de ensino

Uma peculiaridade do gráfico de dupla entrada é evidenciar uma informação que possa interessa ao leitor. Com o objetivo de chamar a atenção dos alunos para a função deste tipo de gráfico, utilizamos um questionamento inicial, fazendo parte do contexto da atividade e solicitamos a quantificação dos dois elementos do eixo vertical nos itens “a” e “b”, bem como um posicionamento do grupo em relação à questão colocada, acrescida de sua justificativa, o que consta do item “c”. Em seguida, o cálculo da média é requerido no item “d”, constituindo-se em uma tarefa um pouco distinta da efetuada em um gráfico de barras verticais, pois se necessita considerar apenas um eixo do gráfico (variável mediada) para se fazer a redistribuição e as subdivisões podem levar os alunos a

considerarem os dois eixos, ao pensarem que necessário se faz igualar, quantitativamente, cada subdivisão.

Nesta atividade, em particular, o valor da média (7), impedia o aluno de incorrer neste raciocínio, uma vez que o mesmo não pode ser decomposto em duas parcelas iguais, referentes às duas subdivisões do eixo vertical (menino e menina).

O item “e” foi resolvido em um momento à parte com a pesquisadora que, inicialmente, completa o espaço vazio com o valor da média anterior calculado pelos alunos e promove a discussão da questão e de sua justificativa, cujo objetivo é levar os alunos a diferenciarem o valor da média e os dados do gráfico.

#### **5.5.2.6. Encontro 6**

Neste encontro, apenas a atividade 6A foi desenvolvida, no qual abordamos a propriedade –, a média é um valor compreendido entre os extremos da distribuição e a inferência estatística.

O gráfico relativo à atividade é apresentado na tábua de gráficos da pesquisadora, porém, sem uma escala, os valores dos dados do gráfico eram identificados pela quantidade de ímãs. O objetivo consistia em verificar, quais escalas seriam utilizadas pelos diferentes grupos e de que maneira.

A seguir, descrevemos e analisamos os itens que compõem a atividade deste encontro.

### Atividade 6A

Tia Nena pretende também fazer docinhos para a festa que está preparando. Os alunos da 4<sup>a</sup>. série fizeram uma pesquisa com 5 coleguinhas para ajudar tia Nena. No gráfico da tábua de gráficos temos os dados obtidos nesta pesquisa.

1) Utilizando este gráfico respondam as seguintes questões:

a) Quem comeu mais docinhos? \_\_\_\_\_  
 Quantos docinhos esta criança comeu? \_\_\_\_\_

b) Quem comeu menos docinhos? \_\_\_\_\_  
 Quantos docinhos esta criança comeu? \_\_\_\_\_

c) Qual a média de docinhos consumidos por aluno? \_\_\_\_\_

d) A quantidade média de docinhos consumidos pode ser maior que a quantidade de quem comeu mais docinhos? \_\_\_\_\_

e) A quantidade média de docinhos consumidos pode ser menor que a quantidade de quem comeu menos docinhos? \_\_\_\_\_

f) Quantos docinhos tia Nena precisará fazer, sabendo que a 4<sup>a</sup>. série tem 30 alunos? \_\_\_\_\_

Espaço para fazer a conta

**Quadro 5.31:** Atividade 6A da intervenção de ensino

Os cinco primeiros itens relacionam-se à percepção da propriedade da média aritmética -, a média é um valor compreendido entre os extremos. Nos itens “a” e “b”, os extremos são identificados e quantificados; no item “c”, o valor da média é calculado e nos itens “d” e “e” buscamos a relação entre este último e os primeiros, isto é, entre média e extremos. O item “f” solicita uma previsão feita baseada na média calculada, com espaço reservado para registro dos cálculos, sendo, portanto, uma questão no nível 3 de leitura e interpretação de gráficos, requerendo o uso da estatística inferencial.

#### **5.5.2.7. Encontro 7**

No sétimo encontro, aplicamos a atividade 6B, abordando a leitura e interpretação de um gráfico de dupla entrada, a média aritmética e a inferência estatística. Nesta atividade, o gráfico usado constava de três elementos diferentes

no eixo vertical, um a mais que na atividade 5B, trazendo dificuldades à leitura do mesmo.

O gráfico de dupla entrada foi construído pela pesquisadora em seu material manipulativo, baseando-se nos dados expostos na lousa, com o acompanhamento de toda a classe, argumentando e fazendo sugestões quanto à construção do mesmo.

Questionamentos referentes aos eixos, suas divisões e colocação dos ímãs foram feitos aos alunos, de maneira que o gráfico construído expressasse o consenso de todos e com a finalidade de suscitar a troca de idéias entre eles. Após o término do trabalho em conjunto, os alunos construíram seus gráficos em suas tábuas.

Na seqüência, analisamos e descrevemos as questões que compunham esta atividade.

### Atividade 6B

- Construam um gráfico, na tábua de gráficos que mostre a quantidade de cada tipo de docinho que cada aluno consome.
- 2) Observando este gráfico, respondam:
- a) Qual o docinho preferido de Fernando? \_\_\_\_\_
- b) Qual o total de cajuzinhos consumidos por este grupo de alunos? \_\_\_\_\_
- c) Qual o docinho preferido por estes alunos? \_\_\_\_\_
- d) Quantos docinhos Fabio consumiu? \_\_\_\_\_
- e) Quantos brigadeiros Laura consumiu? \_\_\_\_\_
- f) Se o "Imaginário" chegasse na classe, qual seria o docinho escolhido por ele? \_\_\_\_\_  
 Por que? \_\_\_\_\_
- g) Qual a média de docinhos por aluno? \_\_\_\_\_

**Quadro 5.32:** Atividade 6B da intervenção de ensino

Os itens desta atividade buscam explorar os diferentes tipos de questões que o gráfico de dupla entrada permite elaborar, uma vez que o mesmo nos apresenta informações de duas variáveis.

No item “a”, requeremos uma comparação entre os elementos da segunda variável (tipos de docinhos apresentados no eixo vertical) referente apenas a um dos elementos da amostra (Fernando - mostrado no eixo horizontal). Já no item “c”, a mesma comparação deve ser feita em relação à totalidade dos elementos da amostra (estes alunos - eixo horizontal).

A composição de grupos – união – de um dos elementos da amostra (cajuzinho - eixo vertical) da segunda variável é exigida no item “b”.

Nos itens “d” e “e” apresentamos uma questão de quantificação, a primeira de um elemento da amostra (Fábio – eixo horizontal) em relação à primeira variável (docinhos), exigindo uma leitura no sentido vertical e, a segunda, de um elemento (Laura – eixo horizontal) em relação à segunda variável (tipos de docinho), requerendo uma leitura no sentido horizontal. Nesses itens, anteriormente, analisados, as questões exigem comparação e integração entre os dados do gráfico.

O item “f” trata de uma questão estocástica, uma vez que exige a extrapolação dos dados pela identificação da tendência apresentada nos dados do gráfico. A justificativa solicitada tem o objetivo de clarificar o raciocínio do aluno.

A média aritmética é requerida no item “g”, apresentando as mesmas características do item “d” da atividade 5B, quanto ao uso da estratégia da redistribuição para a resolução da questão, não sendo possível decompor o valor da média (8) em três parcelas iguais, exigindo que o aluno leve em consideração qual a variável mediada, igualando as quantidades em relação apenas a um dos eixos.

### 5.5.2.8. Encontro 8

Foi o último encontro da intervenção de ensino, no qual desenvolvemos as atividades 7A e 7B; destas constavam a leitura e interpretação de gráficos, o conceito de média, a inferência estatística e a propriedade –, o valor médio pode ser influenciado pelos valores de cada um dos dados.

A pesquisadora apresentou aos alunos o gráfico construído apenas em seu material manipulativo, sendo permitido-lhes construírem seus gráficos, somente após o término da resolução da atividade 7A.

Descrevemos e analisamos ambas as atividades, a seguir.

#### Atividade 7A

<p>Na tábua de gráficos, temos um gráfico que mostra as prendas arrecadadas por um grupo de alunos da 4<sup>a</sup>. série C para a Festa Junina da escola. As prendas desta classe foram brinquedos.</p> <p>1) Respondam as questões abaixo, observando este gráfico.</p> <p>a) Qual criança deste grupo trouxe mais prendas? _____ Quantas? _____</p> <p>b) Qual criança deste grupo trouxe menos prendas? _____ Quantas? _____</p> <p>c) Podemos dizer que a média de prendas trazidas pelos alunos do grupo foi 30? _____ Por que? _____</p> <p>d) Sabendo que a 4<sup>a</sup> C tem 35 alunos, quantas prendas esta classe poderá arrecadar? _____</p> <div style="text-align: center; border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 10px; width: fit-content; margin: 20px auto;"> <p>Deixem suas contas aqui!!!</p> </div>
--

**Quadro 5.33:** Atividade 7A da intervenção de ensino

Os itens “a” e “b” requerem a localização dos pontos extremos máximo e mínimo, respectivamente. O item “c” tem o objetivo de levar o aluno a diferenciar o valor da média do valor total da distribuição (30).

No pré-teste, encontramos um número significativo de alunos que identificaram a média com este valor. A última questão desta atividade encontra-se no nível da estatística inferencial, nível 3 de leitura e interpretação de gráficos, sendo requerida uma previsão calculada utilizando-se a média aritmética.

Atividade 7B

Bom dia! Desculpem-me pelo atraso. Meu relógio não despertou de novo, mas eu trouxe minhas prendas!

Imaginário chegou atrasado, mas trouxe doze prendas. Incluam o Imaginário no gráfico da atividade anterior. Observando este novo gráfico, respondam:

a) Qual a nova média de prendas por aluno? \_\_\_\_\_

Deixem suas contas aqui!!!

**Quadro 5.34:** Atividade 7B da intervenção de ensino

A única questão desta atividade envolve, num contexto lúdico, o cálculo da média e uma de suas propriedades - o valor médio pode ser influenciado pelos valores de cada um dos dados.

# **CAPÍTULO VI**

## **ANÁLISE DOS RESULTADOS**

# CAPÍTULO VI

## ANÁLISE DOS RESULTADOS

### 6.1 – Introdução

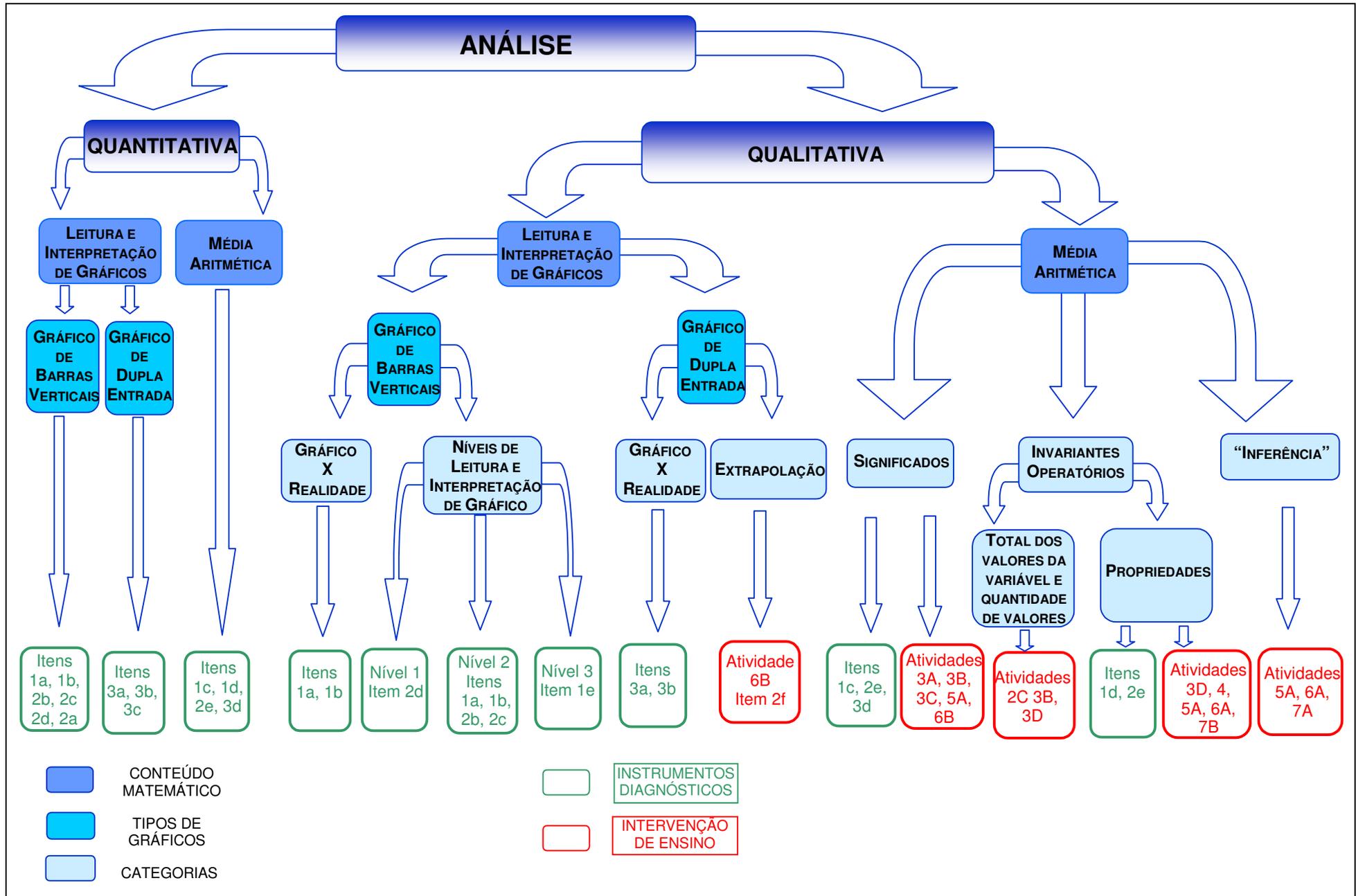
Neste capítulo, apresentaremos a análise de nossos resultados, que se encontra subdividida em análise quantitativa e qualitativa. Iniciaremos examinando os dados obtidos na aplicação dos dois instrumentos diagnósticos – pré e pós-teste – nos dois grupos de sujeitos – GE e GC que serão considerados quantitativa e qualitativamente.

Na análise quantitativa desses instrumentos diagnósticos, faremos, inicialmente, uma comparação entre os acertos desses grupos no pré-teste, seguida de uma comparação entre os resultados dos dois grupos no pós-teste e ainda uma comparação sintética intra e intergrupos, ou seja, análise da evolução ou involução dos resultados do pré-teste para o pós-teste de cada grupo (GE e GC) e uma confrontação entre os percentuais de acertos do GE e do GC no pós-teste.

Finalizamos as considerações quantitativas com uma análise do desempenho dos alunos do GE nos itens do pré e pós-teste. A análise qualitativa dos resultados do pré e pós-teste será feita em paralelo com a análise também qualitativa dos dados obtidos na intervenção de ensino.

Na análise qualitativa, utilizaremos categorias extraídas com base em estratégias de resolução dos próprios alunos, o que nos permitirá uma maior clareza dos dados.

A seguir, apresentamos a estrutura geral de nossa análise em esquema:



Quadro 6.1: Estrutura da análise

Como já mencionamos, a análise de nossos dados subdivide-se em quantitativa e qualitativa. Em ambas, os dados serão examinados sob dois focos, conforme o conteúdo matemático abordado, a saber:

**a) leitura e interpretação de gráficos** – podemos dividir este conteúdo, de acordo com o tipo de gráfico:

a.1. gráficos de barras verticais;

a.2. gráficos de dupla entrada.

**b) conceito de média aritmética.**

No quadro da estrutura geral da análise apresentada acima, esses dois focos encontram-se identificados pela cor azul-escuro, e os tipos de gráficos identificam-se pelo azul-médio.

Na análise qualitativa, consideraremos duas categorias relacionadas ao conteúdo leitura e interpretação de gráficos de barras verticais:

1. “gráfico X realidade”, refere-se às respostas com justificativas baseadas na leitura do gráfico em confrontação com as respostas justificadas apoiadas na realidade do aluno e;
2. “níveis de leitura e interpretação de gráficos”, na qual adotamos a classificação de Curcio (1987).

Ainda, duas categorias relacionadas ao conteúdo leitura e interpretação de gráficos de dupla entrada:

1. “gráfico X realidade” e;
2. “extrapolação”, a qual se refere a uma previsão baseada na leitura dos dados.

Consideraremos, também, três categorias referentes ao conceito de média aritmética, a saber:

1. “significados”, referindo aos significados atribuídos pelos alunos ao conceito em estudo;
2. “invariantes operatórios”, que, por sua vez, subdividem-se em:
  - 2.a. percepção do total dos valores da variável e da quantidade de valores;
  - 2.b. propriedades da média aritmética, segundo Strauss e Bichler (1988) e;
3. “inferência”, categoria relativa às questões que envolviam uma previsão utilizando a média aritmética.

Tanto as categorias relacionadas à leitura e interpretação de gráficos como as referentes ao conceito de média aritmética foram identificadas, no esquema apresentado, pela cor azul-claro. Salientamos, ainda, os itens e atividades analisados, diferenciando os itens constantes dos instrumentos diagnósticos pela cor-verde e as atividades de intervenção de ensino pela cor-vermelha. Passemos à análise quantitativa.

## 6.2 – Análise quantitativa

Tendo em vista a análise quantitativa dos resultados dos instrumentos diagnósticos por nós utilizados, procedemos a uma avaliação de suas questões, atribuindo-lhes um valor – certo ou errado.

Consideramos certas, as questões com respostas estritamente corretas, ou seja, desconsideramos respostas aproximadas e respostas com raciocínio correto, porém, com erros de cálculo ou de contagem.

Quando os itens solicitavam uma justificativa, esta foi considerada com a resposta da questão, isto é, necessário se fez que ambas (resposta do item e sua justificativa) estivessem corretas para que a resposta fosse avaliada como certa.

Especificamente, com relação ao item “1c”, as justificativas muito nos auxiliaram no esclarecimento do raciocínio do aluno, uma vez que o item apresentava diversos valores, como opções de resposta para o aluno escolher entre os mesmos, ou seja, a questão era de múltipla escolha. Portanto, foram avaliadas como certas, respostas corretas com respectivas justificativas, também, corretas.

Constituíram-se exceções, os itens “1a” e “1b”, pois consideramos como certas as respostas corretas que apresentavam justificativas baseadas, por exemplo, na realidade do aluno, sem relação com o gráfico, tendo em vista que o tipo de pergunta usada na solicitação da justificativa pode ter induzido a respostas pragmáticas. Portanto, em tais itens as respostas foram corrigidas, sem vínculo com suas respectivas justificativas. Posteriormente, faremos uma análise destas justificativas.

Um valor certo ou errado apenas no item “1e” não foi atribuído por considerarmos que se trata de solicitação de uma previsão apoiada em dados fornecidos e para qual encontramos uma variedade de respostas. A nosso ver, a

análise fica mais rica do ponto de vista qualitativo, não cabendo, portanto, a avaliação de certo ou errado.

### 6.2.1 – Análise geral: Comparação entre o número de acertos dos grupos GE e GC nos pré e pós-teste

Nos dados da Tabela 6.1, apresentamos os resultados do pré-teste e do pós-teste dos dois grupos – experimental e controle.

		QUESTÃO														total
		1a	1b	1c	1d	1e	2a	2b	2c	2d	2e	3a	3b	3c	3d	
TESTE/GRUPO																
PRÉ-TESTE	GE (28 ALUNOS)	28	27	01	01	-	02	27	0	26	01	26	12	23	01	175
	GC (25 ALUNOS)	25	25	00	00	-	02	24	02	24	00	25	14	19	01	161
PÓS-TESTE	GE (28 ALUNOS)	28	28	13	09	-	14	28	05	27	10	20	20	22	12	236
	GC (25 ALUNOS)	25	25	03	03	-	04	25	03	25	02	20	17	23	05	180

**Tabela 6.1:** Distribuição do desempenho geral dos dois grupos – GE e GC – no pré e pós-teste

Do ponto de vista do número de acertos, notamos que a Tabela 6.1 pode ser dividida em duas partes – uma na qual os itens (“1a”, “1b”, “2b”, “2d”, “3a” e “3c”) apresentaram bom desempenho já no pré-teste que se manteve no pós-teste; a outra parte foi aquela em que houve crescimento no número de acertos do pré para o pós-teste nos itens (“1c”, “1d”, “2a”, “2c”, “2e”, “3b” e “3d”).

Com relação à primeira parte, observamos um bom desempenho dos alunos dos dois grupos – GE e GC -, tanto no pré-teste como no pós-teste, ou seja, o elevado número de acertos no teste inicial manteve-se no teste final, com exceção do item “3a”, que mostrou uma pequena diminuição de acertos.

Quanto à segunda parte, encontramos, no pré-teste, um desempenho praticamente nulo (exceto no item “3b”) em ambos os grupos – GE e GC. No pós-teste, observamos um maior crescimento no número de acertos por parte do GE em relação ao GC.

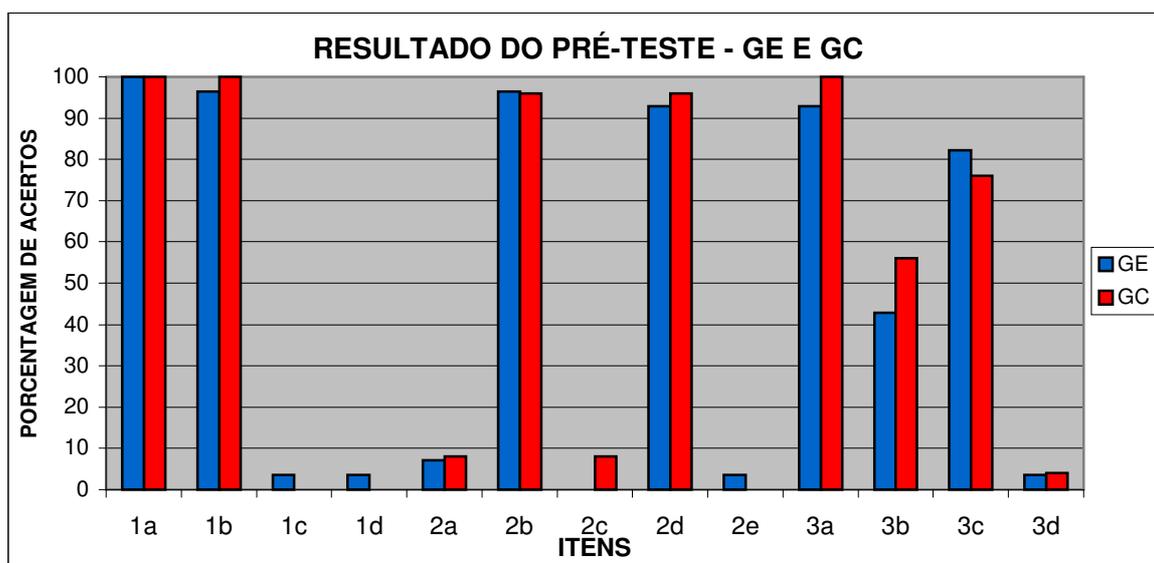
Quanto ao conteúdo matemático dos itens de cada parte, percebemos que na primeira parte obtivemos um bom resultado, todos os itens abordam a leitura e interpretação de gráficos, ao passo que na segunda parte os itens referem-se ao conceito de média aritmética e questões de leitura e interpretação de gráficos com algumas particularidades específicas; nesses itens, o desempenho dos alunos foi menor, apresentando um melhora no pós-teste.

Os dados indicam que a leitura e interpretação de gráficos constitui-se em uma tarefa que nossos alunos já dominam, porém a obtenção da média aritmética e a leitura de alguns gráficos (com escala não-unitária e frequência nula) precisam ser desenvolvidas nos mesmos.

A seguir, procederemos a uma análise individualizada dos dados obtidos em cada um dos instrumentos diagnósticos, pré-teste e pós-teste, com base nos dados acima, a fim de melhor elucidarmos no que consistem as facilidades e ou dificuldades de nossos sujeitos e suas relações com o conteúdo matemático abordado, bem como as características do gráfico utilizado.

## 6.2.2 – Comparação entre o número de acertos dos grupos GE e GC no pré-teste

No pré-teste, os dois grupos – GE e GC – apresentaram um desempenho semelhante, o que pode ser melhor visualizado pelo gráfico<sup>1</sup> abaixo:



**Gráfico 6.1:** Desempenho geral dos dois grupos – GE e GC – no pré-teste

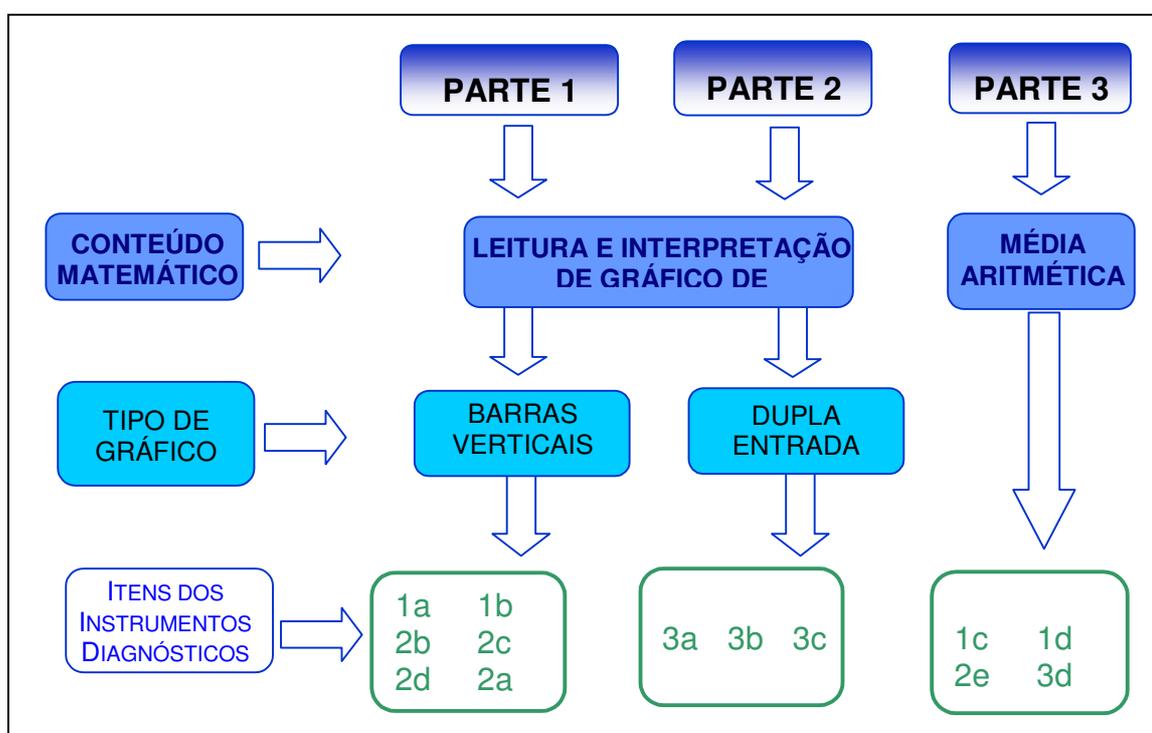
Os dados mostram-nos uma equiparação no desempenho dos alunos dos dois grupos em todas as questões do pré-teste, ou seja, nos itens em que um grupo obteve um percentual elevado de acertos, o outro grupo atingiu também um resultado bastante similar; naqueles em que houve poucos acertos, o resultado dos dois grupos é ainda bem próximo.

Considerando os temas abordados no teste, foi possível subdividi-lo, para fins de análise, em três partes. A primeira diz respeito aos itens voltados para a leitura e interpretação de gráficos de barras verticais, no qual agrupamos os itens “1a”, “1b”, “2b”, “2c”, “2d” e “2d”.

<sup>1</sup> Ainda que a utilização da percentagem não seja ideal ao se trabalhar com um número pequeno de sujeitos, a mesma será usada nos gráficos de comparação entre os dois grupos – GE e GC – a fim de que possamos efetuar essa comparação, uma vez que GE e GC possuem, respectivamente, 28 e 25 sujeitos.

A segunda parte é composta pelos itens “3a”, “3b” e “3c”, que tratam da leitura e interpretação de gráficos de dupla entrada. Por fim, a terceira parte constitui-se das questões “1c”, “1d”, “2e” e “3d” que abordam o cálculo da média aritmética baseada nos dados apresentados em um gráfico de barras verticais ou de dupla entrada.

As três partes das questões mencionadas anteriormente estão esquematizadas no quadro a seguir:

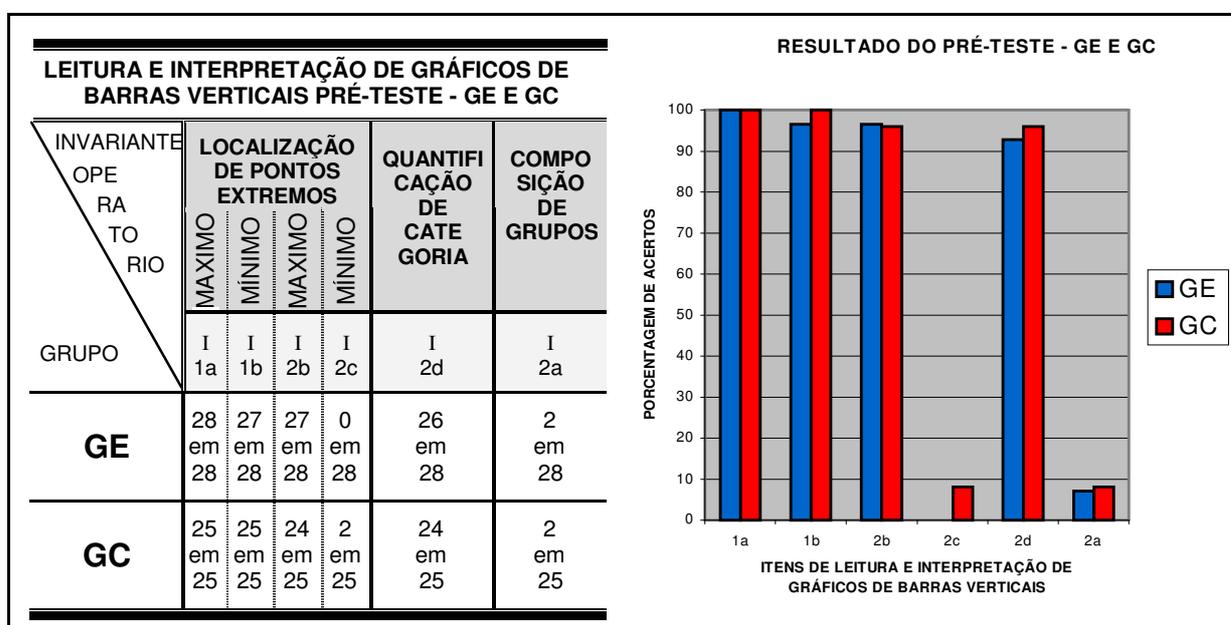


Para uma visualização mais detalhada dos resultados, faremos a análise do pré-teste de acordo com o agrupamento dos itens apresentados acima, iniciando pelos itens que se referem à leitura e interpretação de gráficos de barras verticais.

### 6.2.2.1 – Itens de leitura e interpretação de gráficos de barras verticais do pré-teste – GE e GC

Esta seção trata dos itens da parte 1, que abordaram a leitura e interpretação de gráficos de barras verticais com a apresentação de escalas diferentes – nos itens da primeira questão (“1a” e “1b”), a escala foi graduada de uma a uma unidade; nos itens da segunda (“2a”, “2b”, “2c” e “2d”), a graduação foi de duas a duas unidades.

Quanto à leitura e interpretação de gráficos, os itens encontraram-se no nível intermediário de Curcio (1987), com exceção do item “2d”, o qual requereu a leitura dos dados, portanto, referia-se ao nível 1. Para a resolução desses itens, necessário se faz o domínio dos seguintes invariantes: localização de ponto de máximo e ou mínimo de um gráfico de barras, composição de grupos (união para cálculo do total da variável) e quantificação e ou comparação de categoria.



**Quadro 6.3:** Desempenho dos dois grupos – GE e GC – nos itens referentes à leitura e interpretação de gráficos de barras verticais no pré-teste

Em relação aos seis itens que solicitaram a leitura e interpretação de um gráfico de barras verticais, os dois grupos apresentaram um bom desempenho, exceto nos itens “2c” e “2a”, como mostra o gráfico acima.

Na resolução dos itens “1a”, “1b”, “2b” e “2d”, observamos que os alunos apresentaram facilidade. Dentre estes itens, os três primeiros referiam-se à localização de pontos extremos.

Neste item, o elevado número de acertos nesse tipo de item constitui-se em dados semelhantes aos encontrados por diversos autores, entre eles, Guimarães, Ferreira e Roazzi (2001) que apontam para a facilidade apresentada pelos alunos ao localizar pontos extremos nesse tipo de gráfico, como já citamos no capítulo V, seção 5.5.1.1.

Os resultados mostraram-nos que nossos sujeitos no pré-teste, já possuíam, mesmo que, intuitivamente, as habilidades de leitura e interpretação de gráficos ou, pelo menos, os invariantes operatórios envolvidos nesses itens –, localização de pontos extremos e quantificação de categorias. Esta evidência reafirma-se nos resultados do pós-teste, uma vez que o sucesso no desempenho dos alunos em tais itens permanece, conforme pode ser observado nos dados da Tabela 6.1. Portanto, os itens referenciados não serão contemplados na seqüência de nossa análise.

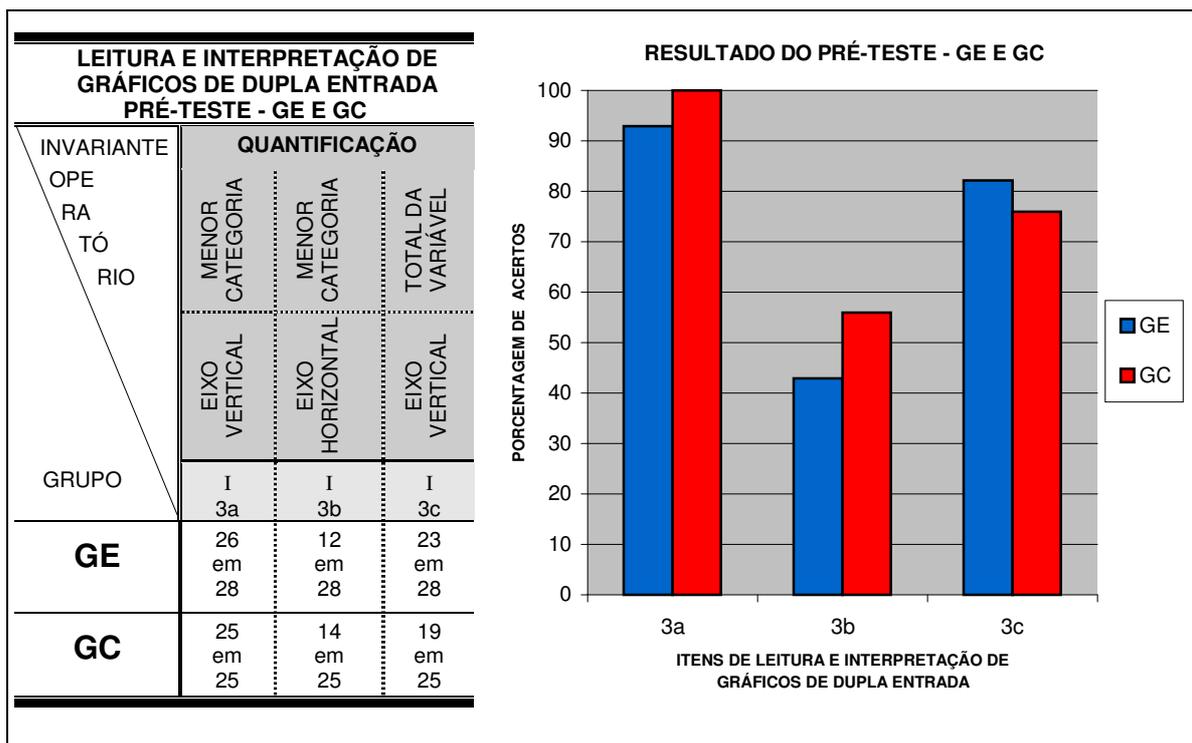
A dificuldade de resolução do item “2a” evidenciada pelos resultados obtidos pelos dois grupos – GE e GC – no pré-teste confirma nossas expectativas, uma vez que o mesmo requeria a composição de grupos, ou seja, a quantificação de cada categoria, seguida da soma das mesmas, com dados

apresentados em um gráfico com escala graduada de duas a duas unidades, o que pode ter influenciado no desempenho dos alunos.

Quanto aos baixos resultados obtidos no item “2c”, apontamos como possível fator de influência a frequência nula (correspondente ao ponto de mínimo solicitado) presente nos dados do gráfico utilizado neste item, uma vez que o item “1b”, também, solicitava o ponto de mínimo, porém, em um gráfico sem frequência nula, apresentou 100% de acerto.

#### **6.2.2.2 – Itens de leitura e interpretação de gráficos de dupla entrada do pré-teste – GE e GC**

Os três itens da parte 2 trataram da leitura e interpretação de gráficos de dupla entrada (um tipo de gráfico pictórico extraído do software Tabletop). Quanto aos invariantes operatórios, exigiram o conhecimento de quantificação e comparação de categorias, bem como a composição de grupos (união para cálculo do total da variável).



**Quadro 6.4:** Desempenho dos dois grupos – GE e GC – nos itens referentes à leitura e interpretação de gráficos de dupla entrada no pré-teste

Os resultados desses itens, também, apresentaram um bom número de acertos pelos dois grupos, conforme observado no Quadro 6.4, com exceção do item “3b”, no qual o número de acertos dos alunos dos dois grupos foi de quase 50% do total deles. Os resultados encontrados confirmaram nossas expectativas, citadas no capítulo V; quanto à maior dificuldade de resolução desse item, em razão de suas características, ou seja, a não identificação da divisão de suas categorias por ícones distintos e por tratar-se de uma pergunta na forma indireta.

### **6.2.2.3 – Itens de cálculo da média aritmética baseada nos dados apresentados em um gráfico de barras verticais ou de dupla entrada do pré-teste – GE e GC**

Primeiramente, os itens da parte 3 requereram a leitura e interpretação dos dados do gráfico para, posteriormente, proceder-se ao cálculo da média aritmética. Quanto ao nível da leitura e interpretação do gráfico, esses itens encontraram-se no nível 2 de Curcio (1987).

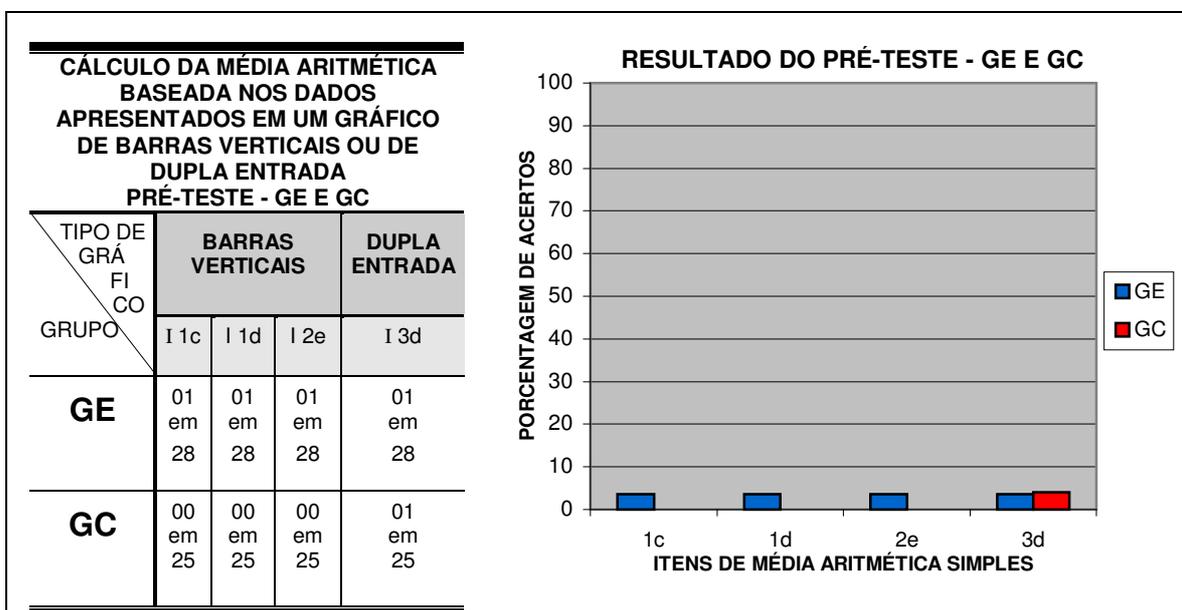
Os quatro itens mostraram diferentes graus de dificuldade quanto ao cálculo da média aritmética, sendo considerados os itens “1d” e “2e” de maior dificuldade, uma vez que o primeiro deles requereu uma alteração em um dos dados do gráfico e o segundo, a leitura de um gráfico com escala não-unitária.

No item “1c”, solicitava-se o cálculo da média com os dados apresentados no gráfico, cuja escala estava graduada de uma a uma unidade, sendo, portanto o item que trazia menor dificuldade de resolução.

No item “3d”, o cálculo da média deve ser efetuado com os dados extraídos de um gráfico de dupla entrada necessitando da identificação do eixo (horizontal ou vertical) a ser considerado, de acordo com a variável a ser mediada.

Quanto aos invariantes operatórios, em todos os quatro itens, o aluno necessitaria identificar o total dos valores da variável, bem como o número (quantidade) desses valores. Os itens “1c”, “1d” e “2e” requereram a percepção de outro invariante, a saber: uma das propriedades da média aritmética, segundo Strauss e Bichler (1988) – a média é um valor compreendido entre os extremos; o

valor médio pode ser influenciado pelos valores de cada um dos dados e tem-se que ter em conta os valores nulos no cálculo da média.



**Quadro 6.5:** Desempenho dos dois grupos – GE e GC – nos itens referentes ao cálculo da média aritmética simples no pré-teste

Nos itens que abordavam o conceito de média aritmética simples, os alunos apresentaram desempenho nulo, salvo um aluno do GE que acertou todos esses itens e um aluno do GC que teve sucesso no item “3d”. Por esse motivo, o GE apresentou um desempenho um pouco melhor em relação ao GC.

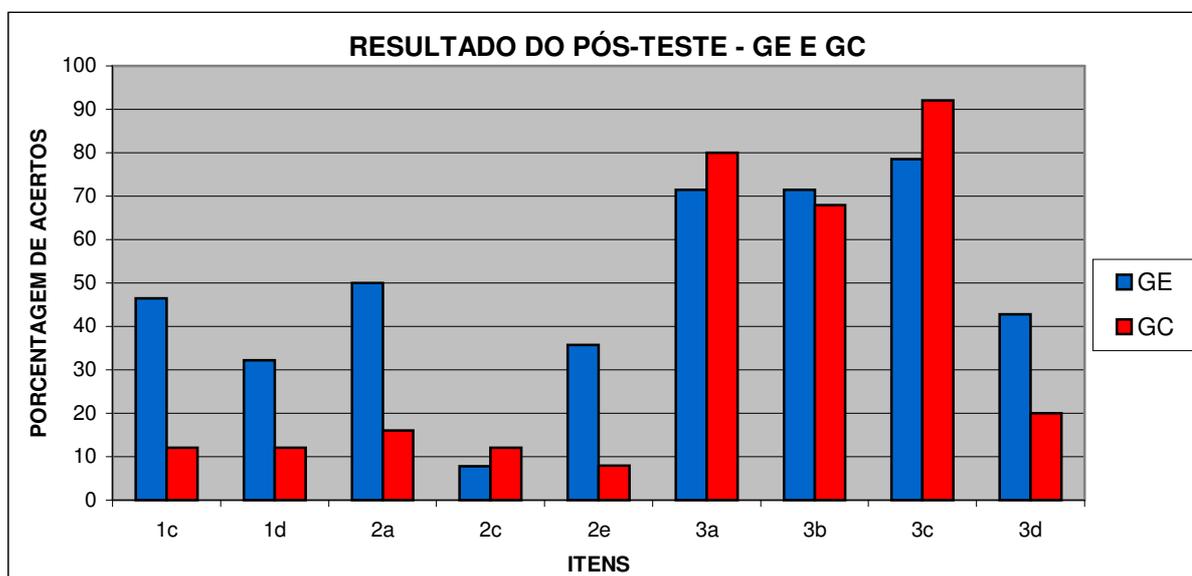
Assim, temos evidências de que a leitura e interpretação de gráficos de barras verticais e de dupla entrada eram habilidades de maior domínio por parte dos alunos pesquisados e que o conceito de média aritmética simples mostrou-se um conceito ainda não apropriado por esses alunos.

É possível inferir, portanto, que o conceito de média aritmética simples era desconhecido de praticamente todos os alunos, tanto do GE como do GC, visto que apenas um elemento do GE obteve êxito em todos os itens referentes ao mesmo.

A análise deste resultado nos levou a direcionar nossa intervenção de ensino para o trabalho com média aritmética, incluindo tanto atividades que evidenciassem os invariantes operatórios – total dos valores da variável e quantidade de valores da mesma – como situações que abordassem as propriedades da média, com dados extraídos de um gráfico de barras ou de dupla entrada. Portanto, o conceito de média aritmética constituiu-se no foco principal de nossa intervenção de ensino.

### 6.2.3 – Comparação entre o número de acertos dos grupos GE e GC no pós-teste

No pós-teste, os resultados dos dois grupos – GE e GC - apresentam diferenças significativas em alguns itens, como mostra o Gráfico 6.2 a seguir:



**Gráfico 6.2:** Desempenho geral dos dois grupos – GE e GC – no pós-teste

Dos nove itens apresentados no gráfico acima, em cinco deles (“1c”, “1d”, “2a”, “2e” e “3d”), o GE foi nitidamente melhor em três deles (“2c”, “3a” e

“3b”), podemos falar em desempenho similar, já que a diferença entre os grupos ficou abaixo de 10 pontos percentuais e, em um item (“3c”), o GE apresentou melhor desempenho.

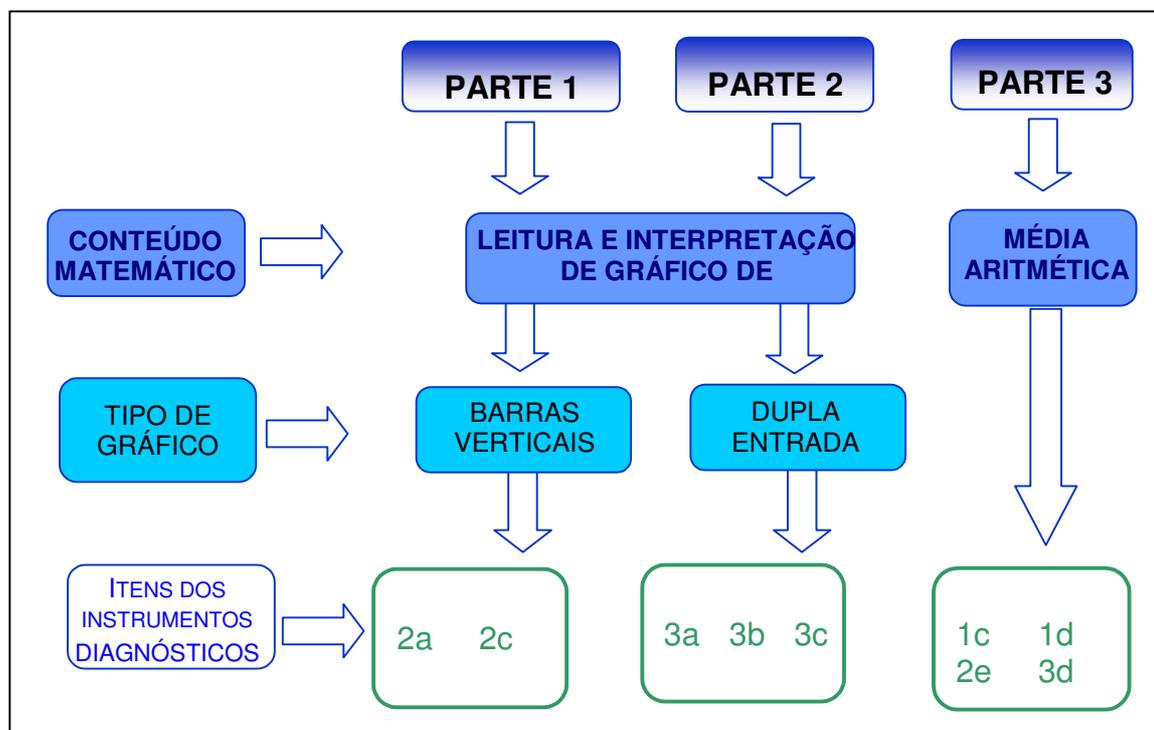
Percebemos que dos cinco itens, em que o GE alcançou um desempenho melhor, quatro deles (“1c”, “1d”, “2e” e “3d”) referem-se ao conceito de média aritmética. Observamos que nossa intervenção de ensino teve como foco principal esse conceito e foi aplicada somente ao GE, assim, podemos inferir que esses dados indiquem seu sucesso. Salientamos que o GC foi submetido ao ensino aprendizagem de média aritmética, porém, de maneira diferenciada do GE, conforme descrevemos na seção 5.2.

Com relação aos itens em que houve desempenho similar entre os dois grupos, notamos que o conteúdo do item “2c” e o tipo do gráfico (de dupla entrada) utilizado nos itens “3a” e “3b” foram pouco trabalhados em nossa intervenção de ensino. Nesses três itens, tanto o GE como o GC apresentam resultados no pré e no pós-teste próximos um do outro. O que nos leva a pensar que os conteúdos abordados nos itens em referência necessitem ser trabalhados mais especificadamente.

De acordo com nossa análise, este fato refere-se, especialmente, ao item “2c”, uma vez que o mesmo apresentou baixo número de acertos pelos dois grupos – GE e GC – em ambos os instrumentos diagnósticos – pré e pós-teste.

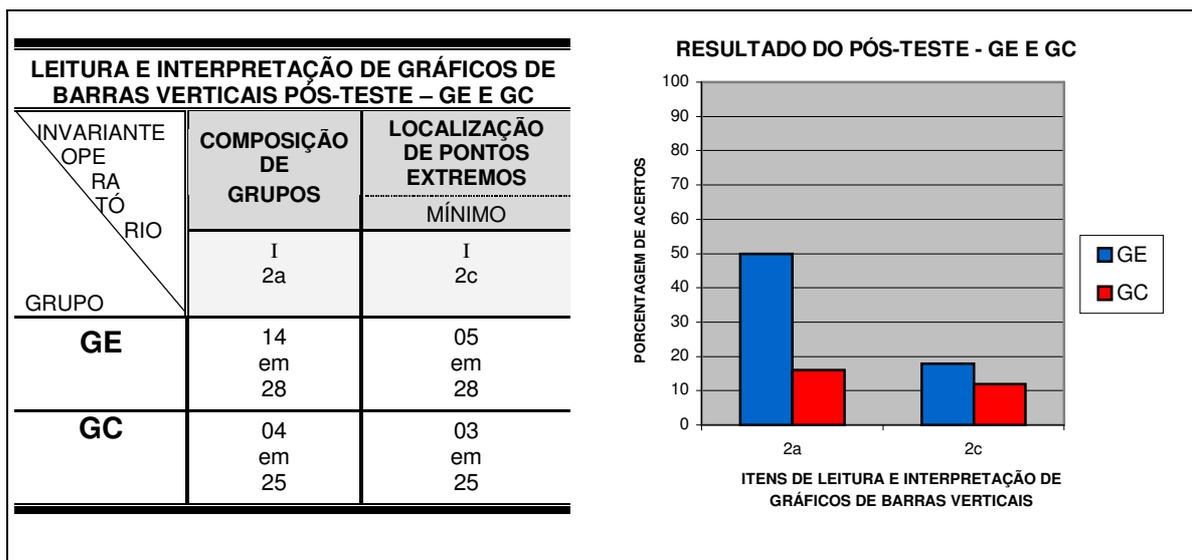
Para uma análise mais acurada do desempenho dos grupos no pós-teste, discutiremos o resultado da mesma maneira que o fizemos para o pré-teste, isto é, subdividindo os itens em três partes, de acordo com o conteúdo abordado e com o tipo de gráfico. Tendo em vista que os itens “1a”, “1b”, “2b” e “2d” foram

desconsiderados na análise dos resultados do pré-teste, apresentamos a seguir um novo quadro, mostrando os itens de cada parte:



### 6.2.3.1 – Itens de leitura e interpretação de gráficos de barras verticais do pós-teste – GE e GC

Os dois itens da parte 1 (“2a” e “2c”) requereram uma leitura e interpretação de gráfico entre os dados, ou seja, o nível 2 de Curcio (1987). O gráfico apresentado nesses itens utilizou uma escala não unitária. Os invariantes envolvidos na resolução desses itens foram localização de pontos extremos e composição de grupos. O item “2c” trouxe uma peculiaridade, uma vez que solicitava o dia da semana, em que o consumo de pães e ou frutas foi menor em um gráfico que mostrava uma frequência nula.



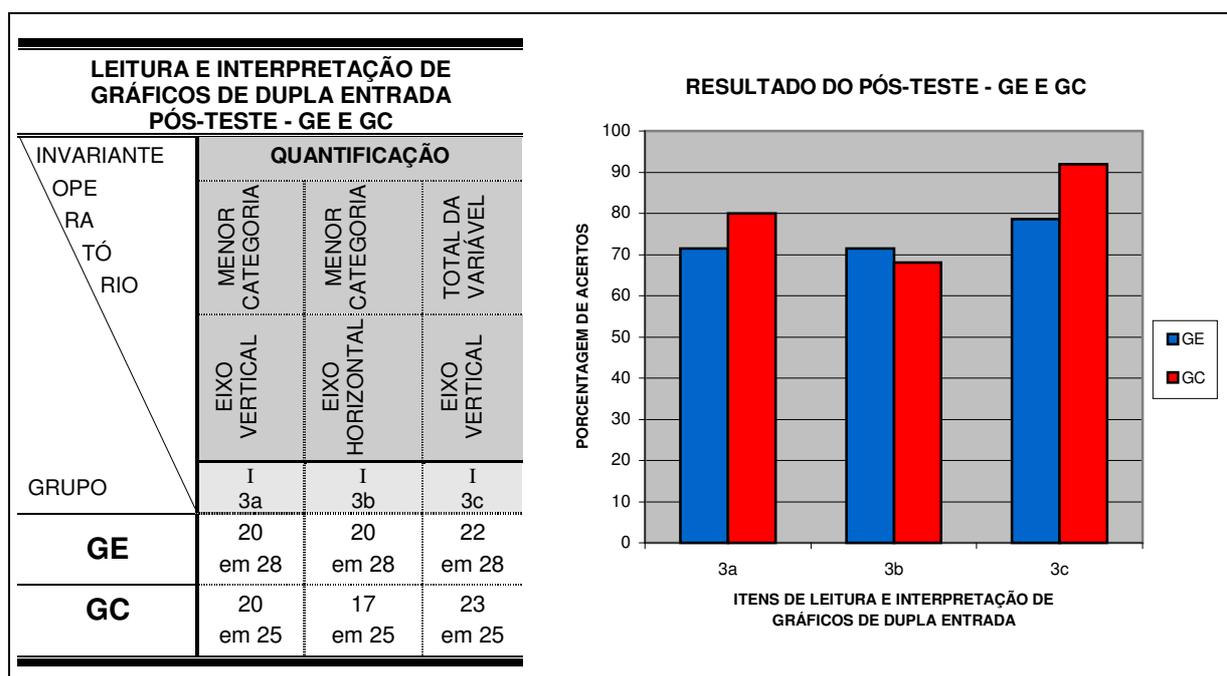
**Quadro 6.7:** Desempenho dos dois grupos – GE e GC – nos itens referentes à leitura e interpretação de gráficos de barras verticais no pós-teste

Os dois grupos – GE e GC – obtiveram baixo desempenho no item “2c”, porém no item “2a” houve uma diferença significativa de acertos entre os grupos em favor do GE. Tal resultado mostra que os alunos não consideraram a frequência nula como ponto de mínimo, mas sim, a menor frequência diferente de zero, o que nos leva a concluir que a localização do ponto de mínimo torna-se mais difícil quando o gráfico apresenta uma frequência igual a zero.

A pequena vantagem de acertos do GE para o GC nesse item pode ter sido em função da inclusão, ainda que uma única vez, de atividade semelhante em nossa intervenção de ensino. Os dados do item “2a” apontam para um sucesso maior do GE em relação ao GC, o que nos leva a considerar os possíveis efeitos positivos de nossa intervenção de ensino, uma vez que trabalhamos por diversas vezes gráficos com escalas não unitárias.

### 6.2.3.2 – Itens de leitura e interpretação de gráficos de dupla entrada do pós-teste – GC e GE

A parte 2 compõe-se de três itens “3a”, “3b” e “3c”, que abordaram a leitura e interpretação de um gráfico de dupla entrada. Os invariantes operatórios envolvidos foram quantificação e comparação de categorias e composição de grupos.



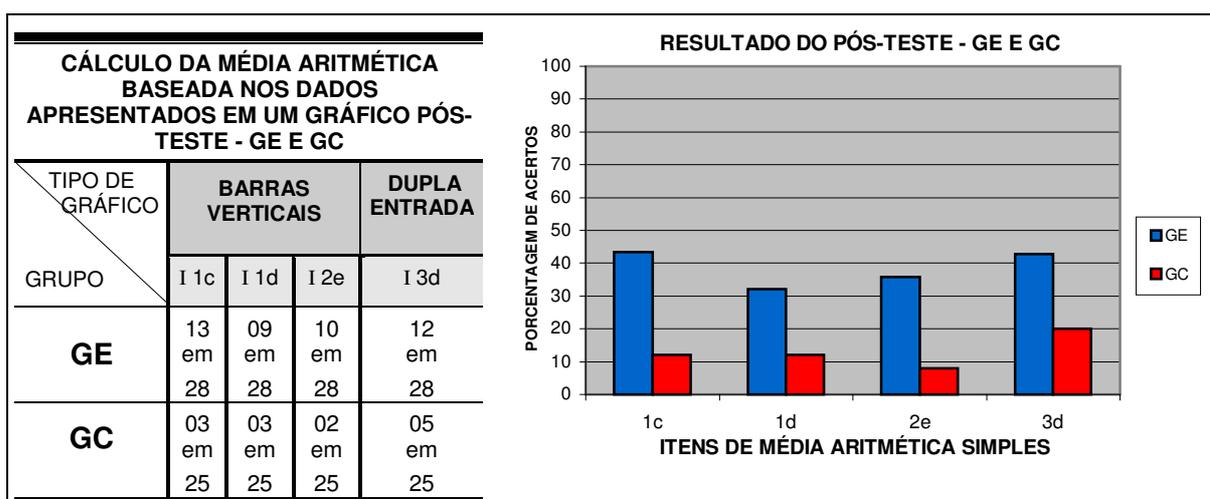
**Quadro 6.8:** Desempenho dos dois grupos – GE e GC – nos itens referentes à leitura e interpretação de gráficos de dupla entrada no pós-teste

Apesar da pequena vantagem apresentada pelo GC em relação ao GE nos itens “3a” e “3c”, consideramos os resultados dos dois grupos nesses três itens similares, uma vez que a diferença de desempenho de um grupo para o outro não ultrapassa o percentual de 15%. O trabalho com gráficos de dupla entrada foi pouco desenvolvido em nossas atividades de ensino, o que pode ter influenciado os resultados acima. Retomaremos a análise desses dados no item 6.2.4, no qual consideraremos as diferenças intra e intergrupos.

### 6.2.3.3 – Itens de cálculo da média aritmética baseada nos dados apresentados em um gráfico de barras verticais ou de dupla entrada do pós-teste – GC e GE

O Quadro 6.9 abaixo apresenta o resultado dos itens que envolveram o conceito de média aritmética simples, quais sejam “1c”, “1d”, “2e” e “3d”. Esses itens requeriam o cálculo da média aritmética de dados extraídos de um gráfico de barras verticais (itens “1c”, “1d” e “2e”) e de um gráfico de dupla entrada (item “3d”), portanto, a leitura e interpretação de gráfico constituíram uma necessidade preliminar.

O domínio dos invariantes - identificação do total dos valores da variável e do número (quantidade) desses valores e conhecimento de três propriedades da média (a média é um valor compreendido entre os extremos; o valor médio pode ser influenciado pelos valores de cada um dos dados; e tem-se que ter em conta os valores nulos no cálculo da média) – foi requerido por esses itens.

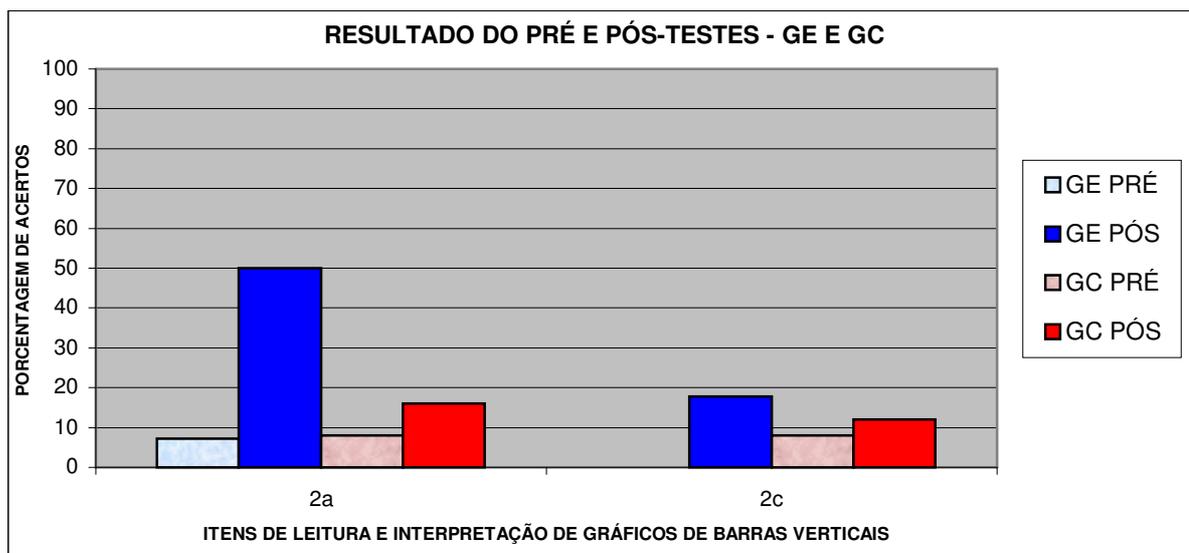


**Quadro 6.9:** Desempenho dos dois grupos – GE e GC – nos itens referentes ao cálculo da média aritmética simples no pós-teste

Os dados mostram-nos que nenhum dos dois grupos – GE e GC – otimizaram seus desempenhos, porém encontramos uma diferença bastante significativa em prol do GE, assim, em 12 das 17 atividades que constituíram nossa intervenção de ensino, abordamos o conceito e as propriedades da média aritmética. Os dados do Quadro 6.9 levam-nos a pensar que alunos nas mesmas condições de nossos sujeitos podem apropriar-se desse conceito, mediante aprendizagem sistematizada e que uma continuidade desse ensino nas séries seguintes pode levá-los a um maior domínio do conceito de média, uma vez que não encontramos mais de 50% dos sujeitos com sucesso nessas tarefas.

#### **6.2.4 – Comparação intra e intergrupos – uma síntese**

Nesta secção, será feito um comparativo sintético do desempenho intragrupos, a saber – a análise da evolução ou involução dos resultados do pré-teste para o pós-teste dentro de cada grupo (GE e GC) –, bem como uma comparação intergrupos, ou seja, a confrontação entre os percentuais de acertos do GE e do GC no pós-teste. Na análise, adotaremos a mesma subdivisão dos itens das seções anteriores – itens de leitura e interpretação de gráficos de barras verticais; itens de leitura e interpretação de gráfico de dupla entrada; e itens de média aritmética simples. Iniciaremos pelos itens de leitura e interpretação de gráficos de barras verticais.



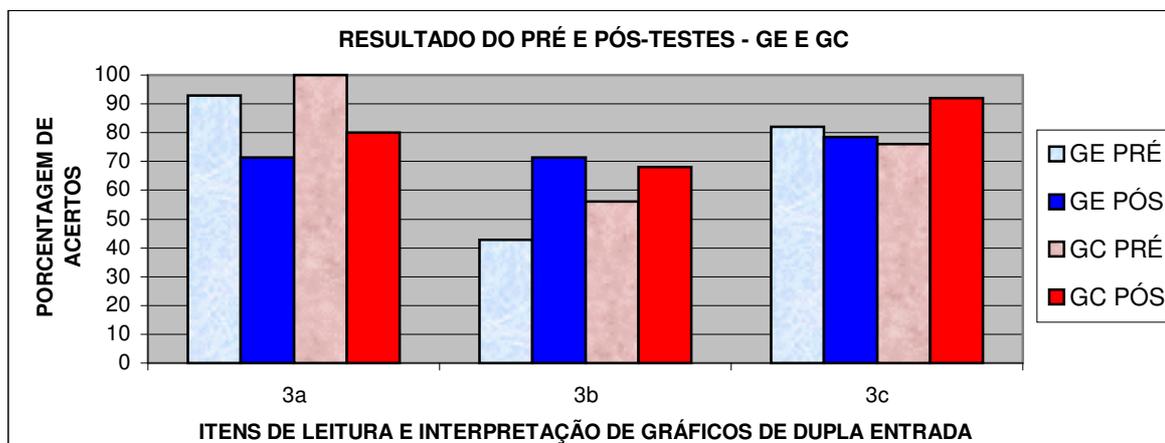
**Gráfico 6.3:** Desempenho dos dois grupos – GE e GC – nos itens referentes à leitura e interpretação de gráficos de barras verticais no pré e pós-testes

Quanto aos resultados dos itens do gráfico acima, observamos que os dois grupos apresentaram uma evolução na comparação intragrupos, ou seja, tanto o GE como o GC cresceram em seus desempenhos. Mas, ao confrontarmos os percentuais de crescimento desses dois grupos, notamos que, nos dois itens, o aumento no percentual de acerto do GE é maior do que o do GC, especialmente, no item “2a”.

Conforme já mencionamos anteriormente, nossa intervenção de ensino contemplou em diversas atividades gráficos de barras com escalas não unitárias, o que nos levar a considerá-las o motivo do crescimento no desempenho do GE no item “2a”, uma vez que esse item envolvia um gráfico dessa natureza.

Já o conteúdo do item “2c” (localização de ponto de mínimo em um gráfico com frequência nula) foi pouco trabalhado por nós. Os dados indicam que a leitura de gráficos com escala não unitária e com categoria de frequência nula precisa ser aprendida pelo aluno, necessitando, assim, de abordagem específica de tal conteúdo.

Passemos aos itens de leitura e interpretação de gráficos de dupla entrada.



**Gráfico 6.4:** Desempenho dos dois grupos – GE e GC – nos itens referentes à leitura e interpretação de gráficos de dupla entrada no pré e pós-testes

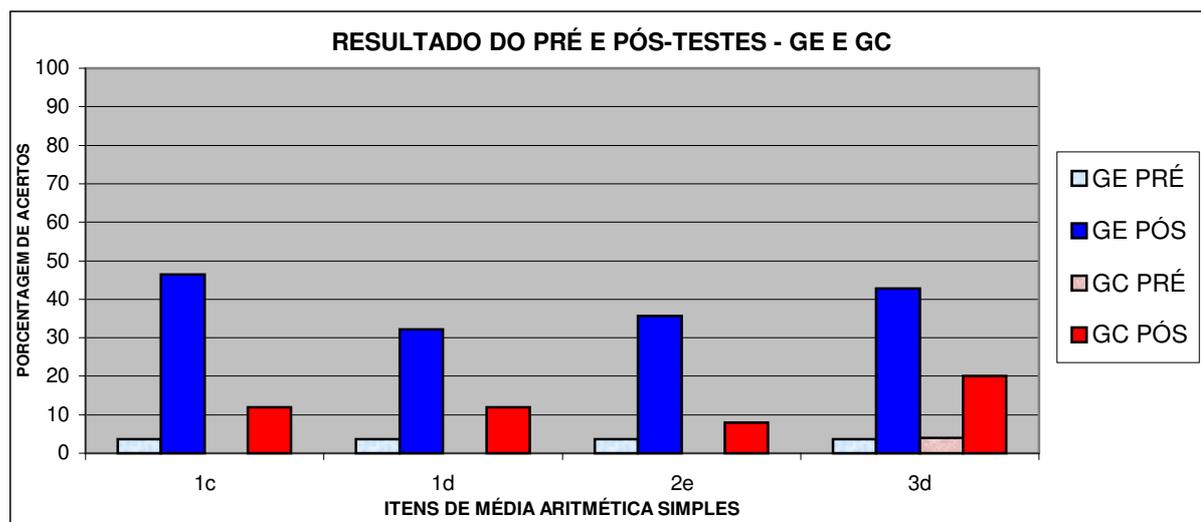
Quanto à análise intragrupos dos itens referentes à leitura e interpretação de gráfico de dupla entrada, ocorreu, em ambos os grupos, um decréscimo no item “3a” e uma evolução no item “3b”, enquanto no item “3c” o GE apresenta uma diminuição e o GC um crescimento. Tendo em vista que a diferença entre o crescimento e ou diminuição entre um grupo e outro é menor do que 10% percentual, consideramos os resultados intra e intergrupos, nesses itens, semelhantes.

Ainda que a diferença entre o desempenho dos grupos GE e GC não seja significativa e que esses itens tenham apresentado um número alto de acertos já no pré-teste (com exceção do item “3b”), salientamos que o resultado desta questão no pós-teste pode ter sido influenciado por algumas alterações que efetuamos no gráfico utilizado nesse instrumento diagnóstico, tais como: mudança no desenho dos ícones e posição da resposta correta. Comentaremos pormenorizadamente sobre os efeitos dessas mudanças no item 6.2.3.2.

Os resultados indicam que a leitura e interpretação de um gráfico de dupla entrada não apresenta grandes dificuldades aos alunos, uma vez que

desde o pré-teste o número de acerto está em torno de 70% em todos os itens, com exceção no item “3b”. O que nos leva a pensar que os alunos possuem, ainda que intuitivamente os invariantes operatórios de tal conceito.

A seguir, apresentamos os dados dos itens referentes ao conceito de média aritmética:



**Gráfico 6.5:** Desempenho dos dois grupos – GE e GC – nos itens referentes ao cálculo de média aritmética simples no pré e pós-testes

Nos itens que envolviam o conceito de média aritmética simples, os dados mostram um crescimento em ambos os grupos – GE e GC, porém, observamos, do pré-teste para o pós-teste, um aumento um tanto quanto maior no número de acertos do GE do que do GC em todos os itens que envolviam esse conceito.

Tanto o GE quanto o GC foram submetidos ao ensino de média aritmética, contudo tal ensino apresentou características diferenciadas. Nossa intervenção contemplou não só a definição desse conceito, como também o desenvolvimento da percepção de suas propriedades, além do uso do material manipulativo que, por sua vez, proporcionou a utilização da estratégia da

redistribuição na abordagem do conceito, conforme descrito no capítulo V. Já o desenvolvimento desse conteúdo no GC foi feito de maneira que denominamos “tradicional”, conforme descrita no item 5.2.

A análise quantitativa dos dados de ambos os grupos mostra indícios de um maior crescimento no desempenho dos alunos do GE do que dos alunos do GC, especificamente, significativo nas questões “2a”, “2c”, “1c”, “1d”, “2e” e “3d”, sendo as duas primeiras referentes a um gráfico de barras com escala graduada de duas a duas unidades e as quatro últimas relativas ao conceito de média.

Apontando, portanto, para um melhor resultado do trabalho com uma intervenção de ensino semelhante àquela por nós desenvolvida e aplicada ao GE em relação ao ensino que o GC foi submetido.

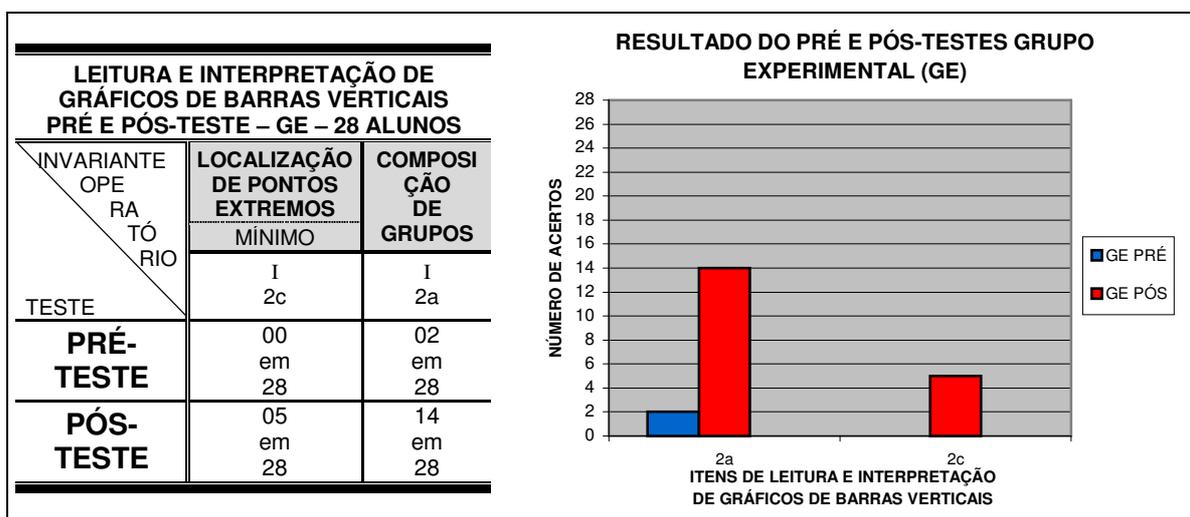
### **6.2.5 – Análise do número de acertos do pré e pós-teste do GE por item**

Na análise dos resultados do pré e pós-teste do GE, seguiremos a mesma divisão dos itens em partes 1, 2 e 3 constantes da seção 6.2.3.

#### **6.2.5.1 – Itens de leitura e interpretação de gráficos de barras verticais dos pré e pós-teste – GE**

Na parte 1, temos os itens “2a” e “2c” que tratam da leitura e interpretação de gráficos de barras verticais. A escala utilizada no gráfico apresentado nesses itens foi graduada de duas a duas unidades, dificultando assim a leitura da mesma, uma outra peculiaridade desse gráfico é a presença de uma categoria com frequência nula.

Os itens encontram-se no nível 2 de leitura e interpretação de gráficos de Curcio (1987), ou seja, requer uma leitura entre os dados. Os invariantes operatórios necessários na resolução das tarefas foram localização de pontos extremos e composição de grupos.



**Quadro 6.10:** Desempenho do grupo GE nos itens referentes à leitura e interpretação de gráficos de barras verticais no pré e pós-teste

No item “2a”, os alunos necessitaram compor grupos, isto é, calcular o total dos valores assumidos pela variável do gráfico. Em outro item semelhante a esse (“1c”), cujo gráfico utilizava a escala graduada de uma a uma unidade, os alunos apresentaram um bom desempenho ao efetuar tal operação (16 acertos, no pré-teste e 19, no pós-teste).

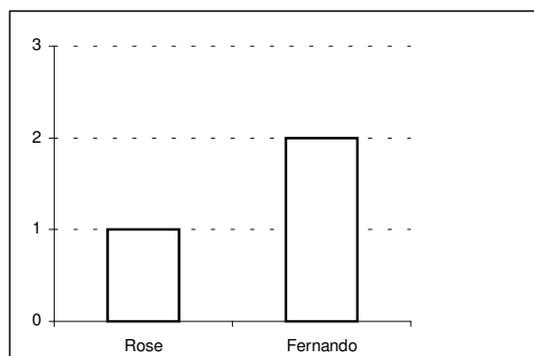
Os dados obtidos demonstram que a dificuldade dos alunos advém do uso de uma escala não unitária, no gráfico do item.

Guimarães, Ferreira e Roazzi (2001) encontraram dados que mostram que, quando o valor solicitado precisava ser inferido da escala, vários alunos apresentaram dificuldades, diferentemente, quando este valor estava explícito na escala, resolviam a questão com facilidade. Concordamos com os autores que a leitura da escala não é uma tarefa simples, quando os valores não estão

explícitos na mesma e que tal dificuldade parece estar “na compreensão dos valores contínuos apresentados na escala, onde é necessário que os alunos estabeleçam a proporcionalidade entre os pontos explicitados na escala adotada.” (GUIMARÃES, FERREIRA e ROAZZI, 2001, p. 13).

Pela nossa intervenção de ensino, extraímos um diálogo entre a classe e a professora que ilustra essa dificuldade apontada pelos autores e observada, também, por nós:

A pesquisadora apresenta o seguinte gráfico de barras verticais aos alunos, desenhando-o na lousa:



CLASSE – TÁ ERRADO!

PESQUISADORA – POR QUE QUE TÁ ERRADO?

DIEGO – TÁ MUITO ALTO (REFERINDO-SE AO TAMANHO DA BARRA MARCADA COM UMA UNIDADE)

BENEDITO – PORQUE TEM UM QUADRADINHO ALI E OUTRO ALI (DIVIDINDO O TAMANHO DA PRIMEIRA BARRA EM DUAS UNIDADES)

PESQUISADORA – MAS, ONDE ESTÁ O QUADRADINHO, BENEDITO?

CLASSE – MAS, TÁ ERRADO, PROFESSORA!

PESQUISADORA – POR QUE QUE TÁ ERRADO?

VITÓRIA – PORQUE SE VOCÊ FOR PÔR OS QUADRADINHOS ALI (REFERINDO-SE AOS QUADRADINHOS DA TÁBUA DE GRÁFICOS) OS QUADRADINHOS TÊM QUE SER DESTE TAMANHÃO! (MOSTRA UM TAMANHO COM AS MÃOS)

...

PESQUISADORA TOMA UM RETÂNGULO (MAIOR) USADO EM SUA TÁBUA DE GRÁFICOS E UM RETÂNGULO (MENOR) USADO NA TÁBUA DE GRÁFICOS DOS ALUNOS E ARGUMENTA:

PESQUISADORA – QUE TAMANHO É O MEU RETÂNGULO? ESTE AQUI EU CONTO QUANTOS?

CLASSE – UM.

PESQUISADORA – É O DE VOCÊS QUE TAMANHO TEM? EU CONTO QUANTOS?

CLASSE – UM.

A CLASSE CONTINUA DISCORDANDO.

**Quadro 6.11:** Excerto do diálogo que evidencia a dificuldade com a proporcionalidade da escala do gráfico

No diálogo acima, salientamos a não aceitação por parte dos alunos da unidade apresentar tamanhos diferentes, conforme a escala utilizada. Esse

resultado evidencia a não observância da proporcionalidade presente na representação escalar do gráfico.

Selva (2003) encontrou resultados semelhantes com crianças entre seis e oito anos. Algumas apresentaram dificuldades na construção de gráficos icônicos ao representarem os ícones, que formavam as barras coordenando a quantidade solicitada pelo problema, e o ponto que deveria finalizar a representação na escala, ou seja, tinham dificuldade para distribuir proporcionalmente o espaço referente à barra (indicado pelo valor na escala) entre a quantidade de desenhos que queriam fazer (valor dado no problema).

A mesma complexidade é perceptível nos “desenhos” dos gráficos feitos por nossos alunos, como o “desenho” do protocolo abaixo:



**Figura 6.1:** Protocolo do G1 que evidencia a dificuldade com a proporcionalidade da escala do gráfico

O protocolo acima ilustra o fato de que o grupo, ao desenhar o gráfico, não observou a necessidade de obedecer a um tamanho-padrão (determinado pela escala) ao construir as barras verticais. Podemos observar que a barra correspondente a Luiza, que possui três unidades, tem a mesma altura da barra

de Mariana que tem cinco unidades, da mesma forma que existem barras de mesma quantidade com alturas diferentes como as de Vitória e Luiza.

Apontamos o uso de duas formas geométricas diferentes (círculo e retângulo) como um fator que possa ter dificultado a observância da proporcionalidade requerida. Durante a intervenção de ensino, chamamos a atenção dos alunos para essa necessidade e os orientamos a utilizarem a régua como instrumento de apoio para verificarem a relação entre a altura das barras e os números da escala, tanto no material manipulativo como nos desenhos dos protocolos.

No item “2a”, observamos um crescimento no desempenho dos alunos entre os resultados do pré-teste e do pós-teste. Durante a intervenção de ensino, trabalhamos, em várias atividades, a leitura de diferentes escalas não unitárias, o que pode ter influenciado nos resultados do pós-teste.

O item “2c” que se refere à localização de ponto extremo (mínimo) apresenta um baixo desempenho tanto no pré-teste como no pós-teste. Destacamos que o ponto de mínimo do gráfico desse item é uma categoria com frequência nula. Das respostas dos alunos, encontramos uma quantidade significativa deles (26, no pré-teste e 21, no pós-teste) que indicaram como ponto de mínimo a menor frequência, diferente de zero.

A frequência nula pode ter sido desconsiderada na leitura e interpretação do gráfico, ou talvez, para o aluno, o “menor consumo”, expressão correspondente ao ponto de mínimo, não possa ser zero, ou seja, para haver consumo é necessário uma resposta envolvendo uma quantidade não nula.

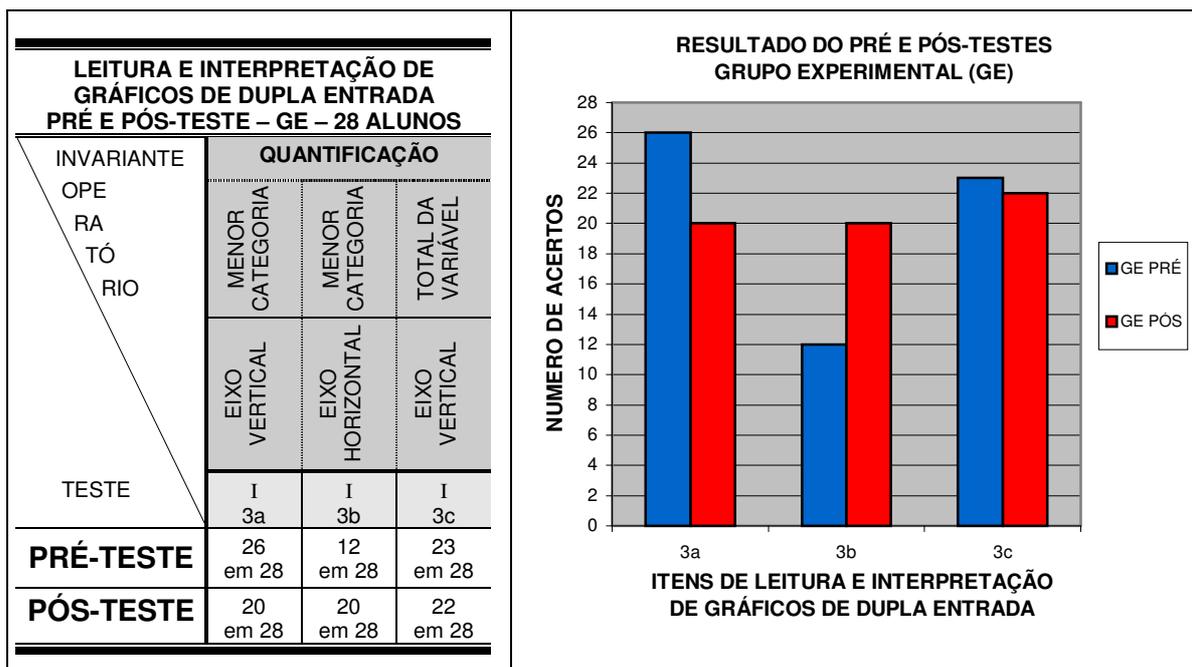
Dados semelhantes são apresentados no trabalho de Tierney e Nemirovsky (1991, apud SELVA, 2003) com crianças de 4ª série que, ao construírem um gráfico, para representarem a quantidade nula, a maioria delas, fazia símbolos diferentes dos utilizados na marcação das outras quantidades. Essas crianças mostraram dificuldade na representação do zero no gráfico, como nossos alunos, na leitura do mesmo. A ausência da barra não é admitida pelos alunos como correspondente à representação da quantidade nula. Em um gráfico, no qual existe pelo menos uma categoria com frequência nula, os resultados apontam que a localização de ponto de mínimo torna-se menos evidente ao aluno.

Observamos ainda que houve uma pequena mudança no número de acertos do pré-teste para o pós-teste no item “2c”, mesmo que um item semelhante a esse tenha sido trabalhado em apenas uma atividade (5A) de nossa intervenção de ensino.

A seguir, apresentamos os dados concernentes aos itens referentes à leitura e interpretação de gráficos de dupla entrada.

#### **6.2.5.2 – Itens de leitura e interpretação de gráficos de dupla entrada dos pré e pós-teste – GE**

O grupo 2 compõe-se de três itens (“3a”, “3b” e “3c”) que abordam a leitura e interpretação de gráficos de dupla entrada, trata-se de um gráfico pictórico extraído do software Tabletop. Nos dois primeiros itens, os invariantes operatórios envolvidos foram quantificação e comparação de categorias, enquanto o último requereu a composição de grupo.



**Quadro 6.12:** Desempenho do grupo GE nos itens referentes à leitura e interpretação de gráficos de dupla entrada no pré e pós-teste

Apontamos como possíveis fatores que influenciaram na diminuição de acertos no item “3a” entre o pré-teste e o pós-teste, a diferença na disposição da resposta correta, ou seja, no pré-teste a mesma estava mais evidenciada por posicionar-se na última linha horizontal do gráfico, ao passo que, no pós-teste a resposta certa encontrava-se no “meio” do gráfico (segunda linha horizontal de baixo para cima). Mostramos, ainda, o uso de formas distintas de ícones, ou seja, no pré-teste utilizamos para todas as categorias círculos, que diferiam apenas em suas cores e, no pós-teste, representamos as categorias por “desenhos” (uma cama, uma blusa, um gorro e um homenzinho) diferentes, o que pode ter tornado estes ícones mais evidentes no pré-teste, facilitando, assim, a leitura e interpretação do gráfico. Este último fator pode ter influenciado também os resultados do item “3c”.

Um outro fator a ser considerado relaciona-se às afirmações de Vergnaud (1993, p. 12), para o qual

“os processos cognitivos e as respostas do sujeito são função das situações com que ele se confronta” desta forma “os conhecimentos dos alunos são elaborados por situações que eles enfrentaram e dominaram progressivamente”,

relacionando-se, portanto com a história individual de cada aluno.

Tendo em vista as afirmações de Vergnaud (1993) e as situações da vida diária de nossos sujeitos, julgamos a situação do pré-teste (utilizando marcas de refrigerantes) nesse item, mais pertinente ao cotidiano infantil do que a situação do pós-teste (mantas, gorros, blusas e calça agrupados na classificação de agasalhos), o que pode ter interferido nos resultados dessa parte de itens.

Segundo Roth (1998, apud FRIEL, CURCIO, BRIGHT, 2001) o conhecimento sobre o fenômeno retratado no gráfico afeta sua compreensão. Santos e Magina (2001) afirmam que o conhecimento dos dados pode auxiliar em sua interpretação.

Ao longo da intervenção de ensino, trabalhamos este tipo de gráfico em duas atividades, em cada uma delas, os alunos construíram os gráficos na tábua de gráficos, com base nos dados fornecidos, atividade que, talvez, possa ter contribuído para o melhor desempenho do aluno no item “3b”, no pós-teste.

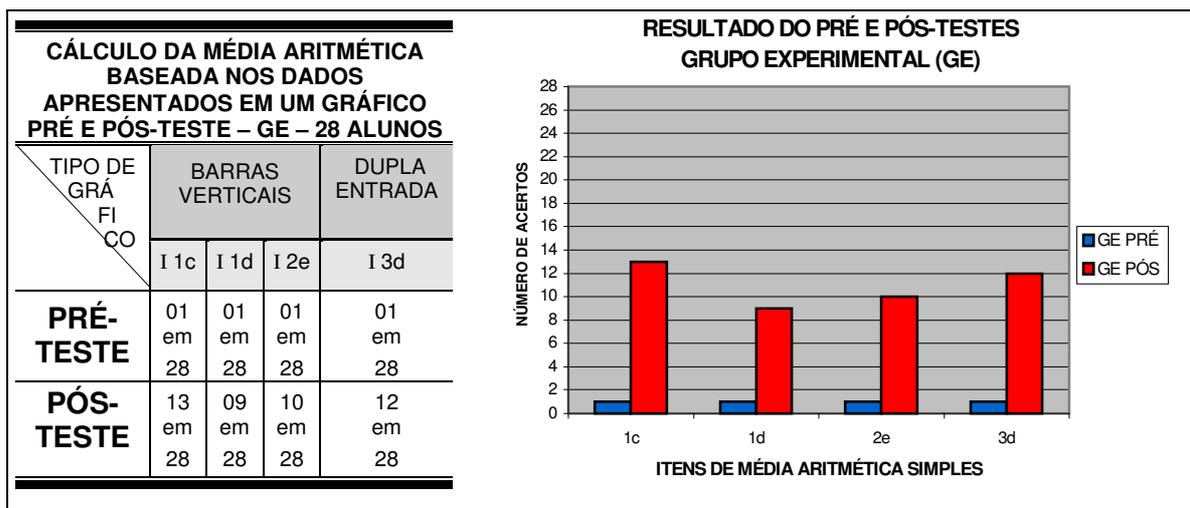
Os dados indicam que questões envolvendo gráficos de dupla entrada não são consideradas problema aos alunos, ainda que o mesmo não seja comum no dia a dia deles. Algumas características, como a ausência de escala e a possibilidade de contagem de um a um dos dados presentes nesse tipo de

gráfico, podem constituir-se em fatores de facilitação de sua leitura e interpretação.

#### **6.2.5.3 – Itens de cálculo da média aritmética baseada nos dados apresentados em um gráfico de barras verticais ou de dupla entrada dos pré e pós-teste – GE**

A parte 3 incluiu os itens “1c”, “1d”, “2e” e “3d” que requereram tanto a leitura e interpretação dos dados do gráfico como o cálculo da média aritmética. Em relação ao nível da leitura e interpretação de gráficos, esses itens encontraram-se no nível 2 de Curcio (1987). Nos três primeiros itens, o gráfico utilizado foi o de barras verticais, e o último apresentou um gráfico de dupla entrada.

Em todos os quatro itens, o aluno necessitou identificar os seguintes invariantes operatórios – o total dos valores da variável e o número (quantidade) desses valores. Nos itens “1c”, “1d” e “2e”, requereu-se a percepção de outros invariantes – três das propriedades da média aritmética (a média é um valor compreendido entre os extremos; o valor médio pode ser influenciado pelos valores de cada um dos dados; e tem-se que ter em conta os valores nulos no cálculo da média).



**Quadro 6.13:** Desempenho do grupo GE nos itens referentes ao cálculo de média aritmética no pré e pós-teste

Nos itens do quadro acima, o desempenho dos alunos não apresentou uma diferença significativa de item para item em um mesmo teste. Contudo, observamos que no item “1d” tivemos o menor número de acertos. Esse resultado pode relacionar-se às suas características, pois exigia que o aluno, inicialmente, calculasse o novo total, decorrente da alteração de um dos dados, para, após, calcular a média aritmética.

Dessa forma, o aluno poderia incorrer em erros em dois cálculos distintos ou apenas em um deles e, assim, não acertar o item, ainda que possuísse conhecimento do conceito matemático requerido pelo mesmo. A alteração de dados do gráfico e, em seguida, o cálculo da média aritmética, bem como a averiguação de que essa não permanece a mesma em função da alteração ocorrida, foram pontos abordados em nossa intervenção de ensino em diversas atividades (3B, 3C, 3D e 7B).

Os itens “2e” e “3d” possuem dependência dos itens “2a” e “3c”, respectivamente, pois, é provável que os alunos tenham utilizado o valor total calculado nesses últimos itens para, nos primeiros, calcularem a média aritmética.

Portanto, a quantidade um pouco menor de acertos encontrada no item “2e” pode ser em virtude da dificuldade de se calcular o valor total em razão do uso de uma escala não-unitária.

Os itens “1c” e “3d” foram os que atingiram um maior número de acertos, sendo de mais fácil resolução pelos alunos. O item “1c”, diferentemente, do “1d”, requeria apenas o cálculo do valor total, que era obtido pela leitura dos dados de um gráfico de barras verticais, com escala unitária, para qual, como mencionado anteriormente, os alunos não demonstraram dificuldade e, em seguida, o cálculo da média aritmética, sem necessidade de um cálculo anterior, ou seja, não havia a necessidade de se atentar para a mudança de dados do gráfico.

A resolução do item “3d” assemelha-se à do item “1c”, diferindo somente quanto ao tipo de gráfico utilizado, isto é, um gráfico de dupla entrada ao invés de gráfico de barras. Portanto, no item “3d” pelo fato do cálculo da média ser efetuado com os dados extraídos de um gráfico de dupla entrada necessitou-se da identificação do eixo da variável (horizontal ou vertical) a ser considerado.

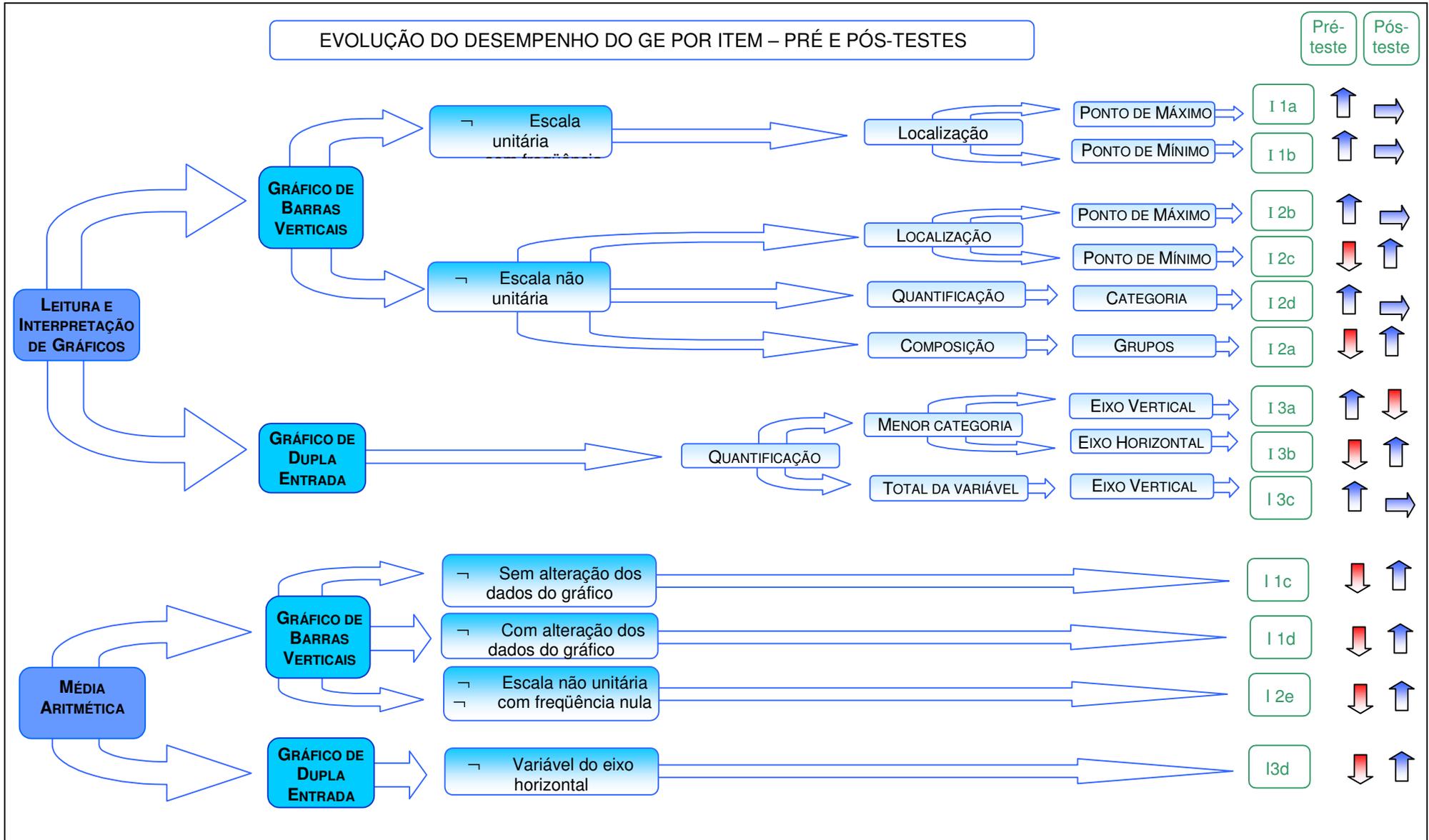
Salientamos que o primeiro tipo de gráfico foi, preferencialmente, mais trabalhado em nossa intervenção, por tratar-se de um gráfico bastante utilizado pelos meios de comunicação (MONTEIRO, 1999) e, portanto, com freqüência foi mais encontrado pelos alunos em seu dia a dia.

Observamos que houve um crescimento significativo no número de acertos do pré-teste para o pós-teste nos itens envolvendo o conceito de média. No pré-teste, encontramos somente uma aluna que possuía conhecimento do cálculo da média aritmética, e essa acertou todas as questões sobre média. No

pós-teste, obtivemos um percentual de quase 50% de acertos em dois dos itens (“1c” e “3d”) e, os itens que atingiram um percentual menor de acertos (“1d” e “2e”) apresentavam peculiaridades (alteração de dados do gráfico e escala não unitária, respectivamente) que os tornava de mais difícil resolução.

O conceito e as propriedades de média aritmética foram trabalhados em seis (do segundo ao oitavo), dos sete encontros que constituíram nossa intervenção de ensino.

A seguir, apresentaremos um quadro-resumo da evolução do desempenho do GE em cada um dos itens do pré e pós-teste.



Quadro 6.14: Quadro-resumo da evolução do desempenho do GE em cada um dos itens do pré e pós-teste

Com relação aos itens referentes à leitura e interpretação de gráficos de barras verticais, os dados mostram que o grupo de alunos pesquisado apresentou um baixo desempenho nos itens que utilizaram uma escala não unitária no gráfico e que traziam uma frequência nula.

Atribuímos a dificuldade de resolução do item “2c” à presença de frequência nula, uma vez que, como já apontamos na análise do mesmo item, encontramos elevado número de respostas ao ponto de mínimo como sendo a menor frequência diferente de zero. Já, ao item “2a” associamos seu resultado à escala do gráfico não graduada de uma a uma unidade, pois na quantificação de cada categoria para, após, efetuarem a composição (soma das quantidades de cada categoria), os alunos necessitavam ler a escala e, nos dados, encontramos grande percentual de erros nessa leitura.

Os resultados demonstram uma melhora no número de acertos de ambos os itens no teste final. Nos demais itens relacionados a esse conteúdo, o desempenho inicial foi próximo de 100% de acertos e manteve-se no teste final.

Quanto aos itens relacionados à leitura e interpretação de gráficos de dupla entrada, no primeiro item – “3a” – o número de acertos inicial foi elevado e sofreu uma pequena diminuição no instrumento diagnóstico final, enquanto no item “3b” encontramos um menor desempenho inicial e uma melhora no teste final. Apontamos como fatores de influência para o primeiro item características do gráfico do pós-teste – posição da resposta correta no gráfico, tipos de ícones utilizados e ou tema do contexto dos dados. Para o resultado do segundo item a forma de questionamento utilizado – pergunta indireta – pode ter influenciado o resultado inicial. No item “3c”, o resultado inicial foi bom e manteve-se.

No desempenho dos alunos, não encontramos diferença relacionada aos dois diferentes tipos de gráficos utilizados, mas sim, a características peculiares aos gráficos de um mesmo tipo. Citamos, como exemplo, o desempenho menor dos alunos em itens que apresentavam um gráfico de barras verticais com escala não-unitária e ou com frequência nula, em contraste com o número de acertos em itens que usavam gráficos com escala graduada de uma a uma unidade e sem frequência nula.

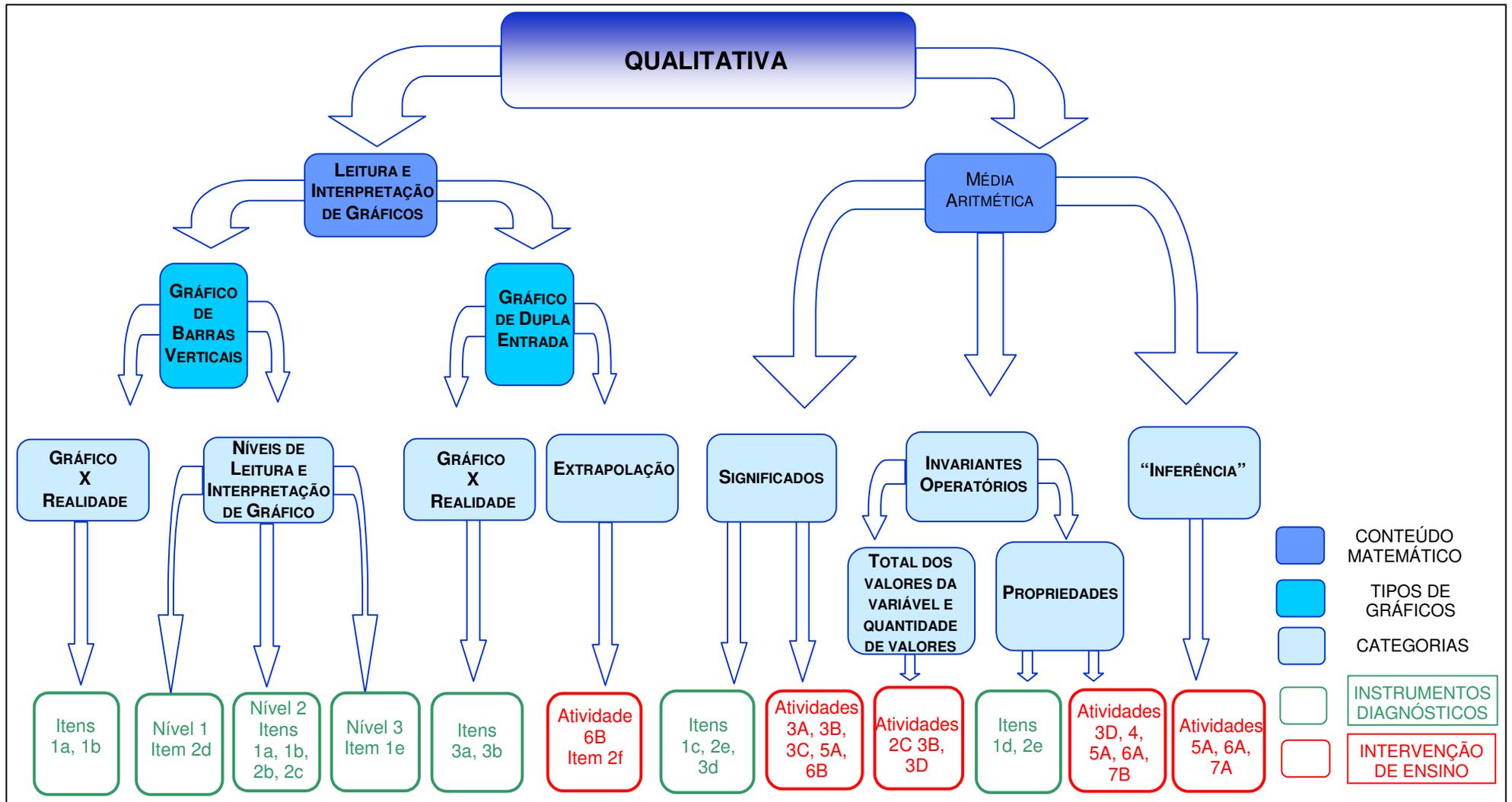
Nos quatro itens referentes ao conceito de média aritmética – “1c”, “1d”, “2e” e “3d” –, os resultados são semelhantes, ou seja, inicialmente, os alunos obtiveram um percentual de acerto praticamente nulo, seguido de um crescimento do mesmo no pós-teste. Ocorreu um menor aumento desse percentual nos itens “1d” e “2e”, podendo ter sido causado por particularidades de cada item, a saber: pela necessidade de ser feita a alteração dos dados do gráfico no item “1d” e; no item “2e” tanto pela escala não unitária como pela frequência nula presentes no gráfico desse item.

Também quanto à média aritmética, não encontramos resultados que indicassem diferença de desempenho relacionada ao tipo de gráfico. Entretanto, salientamos que ao se utilizar a estratégia da redistribuição no cálculo da média, dados apresentados em um gráfico de dupla entrada requeriam a observância do eixo da variável a ser mediada.

A seguir, na análise qualitativa discorreremos sobre outros pontos importantes relacionados tanto à leitura e interpretação de gráficos como à média aritmética.

### 6.3 – Análise qualitativa

Nossa análise qualitativa considerará dados obtidos na aplicação seja dos instrumentos diagnósticos (pré-teste e pós-teste) seja da intervenção de ensino. Para tanto, apresentamos o quadro abaixo com as categorias de análise:



Quadro 6.15: Estrutura da análise

A análise qualitativa apresenta-se subdividida em duas partes, cada uma delas com foco em um dos dois objetos de estudo de nossa pesquisa – leitura e interpretação de gráficos e média aritmética. Na primeira parte, a leitura e interpretação de gráficos de barras verticais é analisada separadamente da leitura e interpretação de gráficos de dupla entrada. Cada uma dessas subdivisões possui categorias específicas, conforme o quadro anterior. Procederemos a seguir à análise qualitativa, cujo foco é a leitura e interpretação de gráficos.

### **6.3.1 – Análise qualitativa focando a leitura e interpretação de gráficos**

Com relação à leitura e interpretação de gráficos, discutiremos os dados considerando o tipo de gráfico (de barras verticais e de dupla entrada) utilizado no item e ou atividade, partindo das categorias estabelecidas para cada tipo de gráfico que foram extraídas das estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das tarefas. As categorias relacionadas à leitura e interpretação de gráficos de barras verticais são:

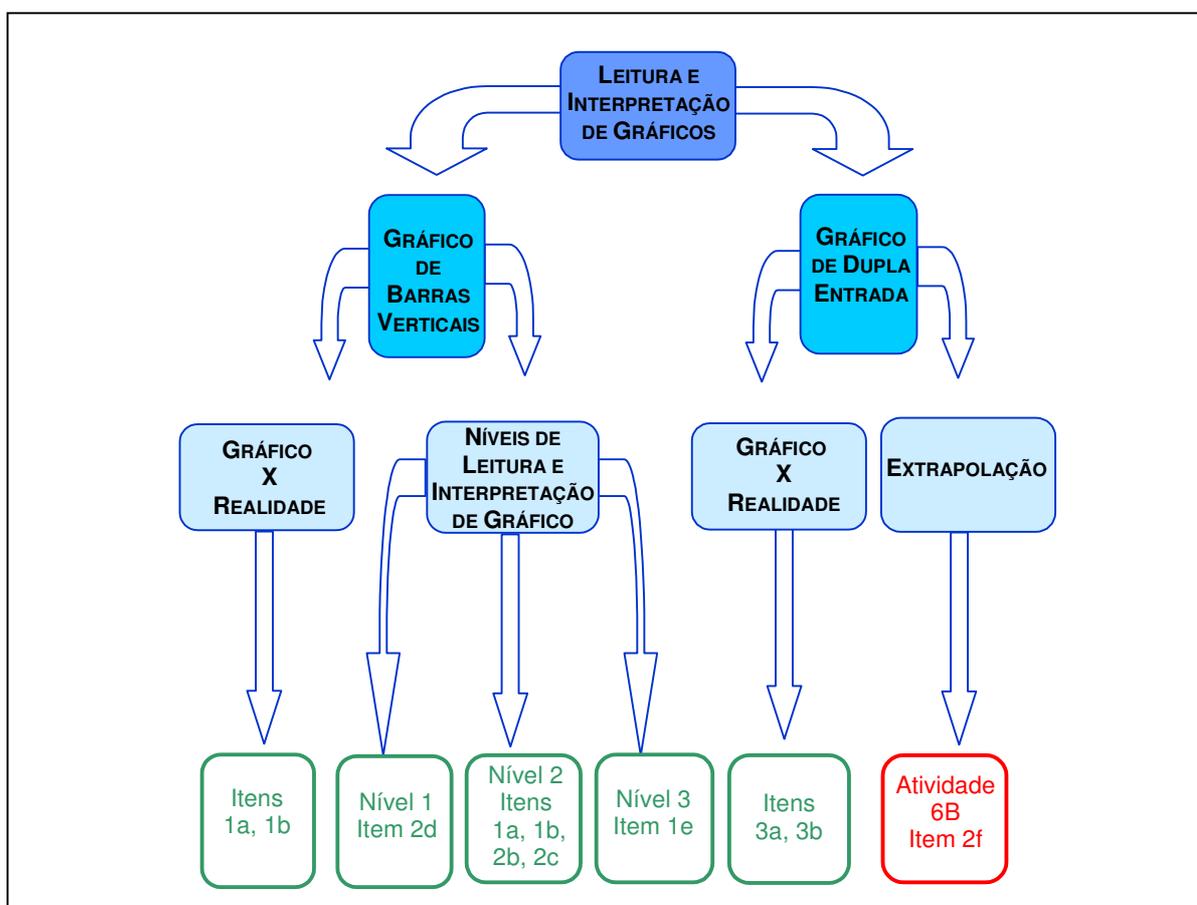
- a) **gráfico X realidade**, referindo-se à comparação entre as justificativas das respostas com base nos dados do gráfico e as justificativas envolvendo fatos do cotidiano do aluno, ou seja, sua realidade;
- b) **níveis de leitura e interpretação de gráficos**, segundo Curcio (1987) que são:
  - b.1. nível 1 “ler os dados”, no qual a informação a ser retirada do gráfico está explícita no mesmo;

- b.2. nível 2 “ler entre os dados”, referente a questões que incluem a interpretação e integração dos dados do gráfico para sua resolução e;
- b.3. nível 3 “ler além dos dados”, referente a itens que envolvem previsões e inferências a partir dos dados do gráfico, mas não descritas diretamente no mesmo.

Quanto às categorias referentes à leitura e interpretação de gráficos de barras de dupla entrada, consideraremos duas delas:

- a) **gráfico X realidade**, trata-se da mesma categoria utilizada para os gráficos de barras verticais e,
- b) **extrapolação**, relacionada a uma previsão efetuada com base nos dados de um gráfico de dupla entrada.

Nesta seção, analisaremos os dados dos itens “1a”, “1b”, “2b”, “2c”, “2d”, “3a”, “3b” dos instrumentos diagnósticos, considerando os resultados do pré e pós-teste; analisaremos ainda, as respostas fornecidas pelos alunos ao item “2f” da atividade 6B, constante de nossa intervenção de ensino. No quadro abaixo, apresentamos as subdivisões, as categorias e os respectivos itens considerados na análise qualitativa com foco na leitura e interpretação dos dados:



A seguir, discutiremos os resultados classificados na categoria gráfico X realidade.

### 6.3.1.1 – Gráfico X Realidade

Como esta categoria relaciona-se aos itens envolvendo tanto o uso de gráficos de barras verticais como gráficos de dupla entrada, analisaremos seus resultados conjuntamente.

Classificaremos as justificativas dos alunos apresentadas nos itens “1a”, “1b”, “3a” e “3b” no pré e pós-teste em: respostas que consideraram os dados do gráfico (G); respostas baseadas na realidade dos alunos (R) e; outros (O) para respostas nas quais não conseguimos identificar a base para a justificativa do aluno.

Esses quatro itens envolvem invariantes semelhantes, a saber, a localização dos pontos de máximo e mínimo requeridos, respectivamente, pelos itens “1a” e “1b” e a localização de menor categoria do eixo vertical no item “3a” e do eixo horizontal no item “3b”. Outra semelhança entre esses quatro itens é a solicitação de justificativa para a resposta dada, os mesmos diversificaram apenas quanto ao tipo de gráfico utilizado, sendo os itens “1a” e “1b” referentes a um gráfico de barras verticais e os itens “3a” e “3b” referentes a um gráfico de dupla entrada. Os resultados encontrados nesses itens estão dispostos nos dados da tabela abaixo:

Evolução nas respostas do pré para pós-teste			
Tipo de resposta	Item	Pré-Teste	Pós-Teste
<i>G</i> RESPOSTA BASEADA NO GRÁFICO	1A	5	7
	1B	4	7
	3A	25	27
	3B	17	28
<i>R</i> RESPOSTA BASEADA NA REALIDADE	1A	22	20
	1B	24	19
	3A	2	0
	3B	7	0
<i>O</i> RESPOSTA BASEADA EM OUTRA COISA	1A	1	1
	1B	0	2
	3A	1	1
	3B	4	0

**Tabela 6.2:** Distribuição da evolução nas respostas do pré para o pós-teste na categoria gráfico X realidade

Dentre as respostas dos itens “1a” e “1b” no pré-teste, percebemos um elevado número de justificativas baseadas na realidade do aluno, com uma pequena

diminuição delas no pós-teste nos mesmos itens. Abaixo transcrevemos uma resposta desse tipo referente ao pós-teste:

S18 – “ACHO QUE MARIA VENDEU MENOS RELÓGIOS (NO MÊS DE JANEIRO) POIS, ERAM FÉRIAS E TODOS ESTAVAM VIAJANDO.”

**Quadro 6.17:** Justificativa do S18 ao item “1a” do pós-teste – resposta baseada na realidade

Uma consideração a ser feita com relação aos itens “1a” e “1b” é a forma pela qual a justificativa dos mesmos foi requerida do aluno. A maneira como a pergunta foi redigida, ou seja, utilizando o “por que”, pode ter induzido os alunos a uma resposta pragmática, não tendo ocorrido o mesmo nos outros dois itens – “3a” e “3b”. Tal característica dos itens “1a” e “1b” pode ter influenciado em seu número elevado de respostas pragmáticas.

Ainda que os alunos (100%) acertassem as respostas dos itens, sendo estas encontradas na leitura do gráfico, buscavam uma justificativa de seu cotidiano.

Quanto aos itens “3a” e “3b”, mesmo que a forma (redação) como foram solicitadas suas respectivas justificativas, não tenha características que possam levar a respostas pragmáticas, encontramos, no pré-teste, um pequeno número delas. Destacamos duas dessas justificativas:

S9 – “COCA COLA. (RESPOSTA CORRETA) PORQUE O QUE ELES MENOS TOMA É COCA COLA POR QUE ELA TEM MUITO GÁS.”

S3 – “QUALTI. (RESPOSTA ERRADA) PORQUE PARA MIM ELA É MENOS VENDIDA.”

**Quadro 6.18:** Justificativa do S9 e S3 ao item “3a” do pré-teste – respostas baseadas na realidade

Na primeira transcrição encontramos uma resposta baseada na leitura do gráfico para a primeira parte do item seguida de uma justificativa extraída da realidade. Já, na segunda transcrição, observamos que o aluno desconsiderou as

informações do gráfico para responder a ambas as partes do item (pergunta inicial e sua justificativa).

Os dados evidenciam a presença de respostas, usando a realidade, sem considerar os dados do gráfico para itens envolvendo a leitura e interpretação tanto dos gráficos de barras verticais quanto de dupla entrada.

Diversos autores (CARRAHER, SCHLIEMANN e NEMIROVSKY, 1995; GUIMARÃES, 2002; HOYLES, LEALY e POZZI, 1994 apud GUIMARÃES, 2002; JANVIER, apud FRIEL, CURCIO e BRIGHT, 2001; MAGINA e MARANHÃO, 1998; MCKNIGHT, KALLMAN e FISHER apud FRIEL, CURCIO e BRIGHT, 2001; SANTOS e MAGINA, 2001) apresentam dados semelhantes.

No pós-teste, esse tipo de justificativa não mais aparece nos itens “3a” e “3b”, indicando que os alunos passaram a considerar os dados do gráfico na leitura e interpretação de gráficos da questão, após nossa intervenção de ensino. É provável que as justificativas dos itens “1a” e “1b” migrassem à categoria gráfico (G), caso essas apresentassem outro tipo de redação.

Passaremos à categoria níveis de leitura e interpretação de gráfico

### **6.3.1.2 – Níveis de leitura e interpretação de gráfico**

Nesta categoria, analisaremos os dados extraídos dos itens “2d”, “1a”, “1b”, “2b”, “2c” e “1e” do pré e pósteste, nos quais utilizamos um gráfico de barras verticais. Estes itens encontram-se classificados, de acordo com os níveis de leitura e interpretação de gráficos de Curcio (1987) – nível 1 “ler os dados”, nível 2 “ler entre os dados” e nível 3 “ler além dos dados”.

Iniciaremos pelo item “2d”, referente ao nível 1 – “ler os dados”:

- Nível 1 – “ler os dados”

NÍVEL 1 “LER OS DADOS”	
I 2d	
Pré	Pós
26	27

**Quadro 6.19:** Resultados do item de nível 1 “ler os dados”

O item “2d” apresenta um resultado positivo bem próximo do 100%, tanto no pré-teste como no pós-teste, sendo, portanto, de fácil resolução aos alunos pesquisados.

- Nível 2 – “ler entre os dados”

NÍVEL 2 “LER ENTRE OS DADOS”							
I 1a		I 1b		I 2b		I 2c	
Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós
28	28	27	28	27	28	0	5

**Quadro 6.20:** Resultados dos itens de nível 2 “ler entre os dados”

Os quatro itens classificados no nível 2 apresentaram resultados diferentes de um item para outro.

Notamos que no item “2c” o insucesso foi de 100% no pré-teste e de quase 82% no pós-teste, ao passo que nos itens “1a”, “1b” e “2b”, o insucesso foi de 0% tanto no pré-teste como no pós-teste.

Salientamos que esses quatro itens não só apresentaram o mesmo nível de leitura e interpretação de gráficos, como também utilizaram o mesmo tipo de gráfico, a saber: um gráfico de barras verticais. Comparando-os quanto aos invariantes operatórios envolvidos em sua resolução, destacamos que os dois itens “1a” e “2b” tratavam da localização de ponto de máximo e apresentaram o mesmo número de acertos; porém, os itens “1b” e “2c” que referiam-se à localização do ponto de mínimo, apresentaram resultados distintos, ou seja, um altíssimo número de acertos no item “1b” e um baixo número de acertos no item “2c”. Essa diferença pode ter sido influenciada pelas características do conjunto de dados do item “2c” no qual um dos dados é uma frequência nula.

Os alunos, em sua maioria consideraram como ponto de mínimo o dado com a menor frequência diferente de zero. Raciocínio semelhante a esse foi encontrado, também, durante o desenvolvimento das atividades 4 e 5A de nossa intervenção de ensino, como pode ser observado no excerto abaixo referente à atividade 4:

P – O PONTO DE MÍNIMO?

IZABELA – É O TIAGO PORQUE ELE NÃO TEM NENHUMA.

P – VOCÊ ACHA QUE É QUEM, GABRIEL?

GABRIEL – A SOFIA POR CAUSA QUE SE O TIAGO TIVESSE ALGUMA AÍ IA TA VALENDO ELE PORQUE ELE NÃO TEM NENHUMA BALA.

**Quadro 6.21:** Diálogo durante a atividade 4 – frequência nula não considerada como ponto de mínimo

Os resultados da pesquisa de Curcio (1987) e de Friel, Curcio e Bright (2001) apontam um grau crescente de dificuldade em questões do nível 1 para o

nível 3. Nossos resultados indicam que devemos considerar algo mais do que o nível de leitura e interpretação de gráficos das questões, as características do conjunto de dados (presença de frequência nula, por exemplo) trabalhados parece ter influenciado no desempenho dos alunos.

Trabalhos sobre leitura e compreensão de gráficos estudaram diferentes fontes de influência sobre a mesma. Carpenter e Shad (CARPENTER, 1995 apud FRIEL, CURCIO e BRIGHT, 2001; SHAD, 1998 apud FRIEL, CURCIO e BRIGHT, 2001) consideram os efeitos das características visuais e do contexto dos gráficos; Janvier (JANVIER, 1981, apud FRIEL, CURCIO e BRIGHT, 2001) também comenta o papel do contexto na percepção e ou concepção pessoal do leitor de gráfico; Curcio, Russel e Gal (CURCIO, 1987; RUSSEL, 1991 apud FRIEL, CURCIO e BRIGHT, 2001; GAL, 1993, apud FRIEL, CURCIO e BRIGHT, 2001) apontam conhecimento matemático e experiência como características necessárias para a compreensão de gráficos; Curcio e Pinker (CURCIO, 1987; PINKER, 1990 apud Cazorla, 2002) afirmam que a eficiência do leitor de gráficos, dentre outros fatores, depende do conhecimento prévio dos gráficos. Portanto, a leitura e interpretação de gráficos parece não ser algo tão simples.

- Nível 3 – “ler além dos dados”



**Quadro 6.22:** Resultados do item de nível 3 “ler além dos dados”

Quanto ao item “1e” classificado no nível 3 “ler além dos dados”, suas respostas não foram avaliadas com o critério de certo ou errado. Nesse item, foi solicitado ao aluno que fizesse uma previsão de vendas de determinado produto para o mês seguinte aos meses apresentados em um gráfico de barras verticais, tendo os dados do mesmo como base. Encontramos diferentes respostas que foram agrupadas em categorias de acordo com a justificativa apresentada. Os dados da tabela abaixo trazem os resultados desse item.

Evolução nas respostas do pré para pós-teste											
Tendência do gráfico		Realidade		Quantidade total da variável		Impossibilidade de previsão		Uso da média aritmética		Outros	
Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós
10	12	04	00	01	06	03	00	00	03	10	07

**Tabela 6.3:** Evolução nas respostas do pré para o pós-teste na categoria nível 3 de leitura e interpretação de gráficos

Classificamos como respostas que levaram em conta a tendência do gráfico, aquelas nos quais sua justificativa evidenciou a consideração, por parte do aluno, do aumento da quantidade da variável mês a mês, inclusive, do “quanto” aumentava. Respostas com essa característica estão presentes no pré e pós-teste. Destacamos abaixo uma resposta do pré-teste e outra do pós-teste classificadas nessa categoria:

S 10 – 13. CHEGUEI A ESTA CONCLUSÃO PORQUE DO MÊS DE JANEIRO ATÉ MARÇO ELE FOI VENDENDO 4 MINI-GAMES A MAIS.

S 01 – SERIA 13 RELÓGIOS. EM FEVEREIRO ELA VENDEU 9 RELÓGIOS E EM MARÇO ELA VENDE 11 ENTÃO EM ABRIL SERIA 13 RELÓGIOS.

**Quadro 6.23:** Justificativas do S10 e S1 ao item “1e”, do pré-teste e pós-teste, respectivamente – respostas que consideraram a tendência do gráfico

Observamos que os sujeitos S10 e S 01 consideraram o crescimento mensal da variável no cálculo da previsão, mesmo quando esse crescimento não era o mesmo nos três meses apresentados no gráfico; situação em que o sujeito considerou o valor do aumento da variável nos dois últimos meses, como podemos notar na resposta do S01, transcrita acima.

As justificativas com base em dados da realidade do aluno caracterizaram-se por apresentarem na parte numérica da resposta um “número grande” (alta previsão de venda). Estas justificativas aparecem apenas no pré-teste. Vejamos um exemplo:

S 02 – NO MÁXIMO 22. PORQUE NO MÊS DE MARÇO PASSOU MUITA GENTE.
---

**Quadro 6.24:** Justificativa do S2 ao item “1e” do pré-teste – resposta baseada na realidade do aluno

Nas justificativas classificadas sob o título “quantidade total da variável” os alunos faziam a previsão baseando-se na soma das quantidades da variável apresentada no gráfico. Encontramos mais respostas desse tipo no pós-teste do que no pré-teste.

Só no pré-teste, observamos respostas que afirmaram a impossibilidade de fazer a previsão solicitada. No entanto, as respostas nas quais a média aritmética foi utilizada no cálculo da previsão, foram encontradas apenas no pós-teste. Ressaltamos que o conceito de média aritmética era desconhecido pela maioria dos alunos no pré-teste, tendo sido contemplado seu ensino na intervenção de ensino, motivo que pode ter influenciado no uso desse conceito, após a mesma, ou seja, no pós-teste.

Salientamos um exemplo desse último tipo de resposta na qual o aluno calculou a média quadrimestral e não trimestral, considerando que a previsão foi

solicitada para o mês seguinte de um gráfico com dados de três meses consecutivos:

S 18 – 6. FIZ A MÉDIA (24) DIVIDIDA POR 4 MESES E DEU 6.
--

**Quadro 6.25:** Justificativa do S18 ao item “1e” do pós-teste – resposta utilizando a média aritmética

As justificativas classificadas como “outros” referem-se às respostas em branco ou àquelas em que não foi possível identificar a caracterização das mesmas.

A ausência de justificativas baseadas na realidade e o aumento de respostas referentes à quantidade total da variável no pós-teste indicam que os alunos passaram a considerar, em suas respostas, os dados fornecidos no gráfico.

Os dados da Tabela 6.3 mostram um número razoável de alunos (no pré-teste 10 e no pós-teste 12) que consideraram a tendência dos dados apresentados no gráfico do item “1e” e, alguns alunos (três) que utilizaram o conceito de média aritmética no pós-teste. Observamos, portanto, que os alunos lançaram mão de idéias e dados estatísticos na resolução de questões envolvendo “inferência”, especialmente no pós-teste, ou seja, após a intervenção de ensino.

Algumas pesquisas apresentam dados semelhantes aos nossos, como o estudo de caso desenvolvido por Santos (2003) com uma professora de 1<sup>a</sup> a 4<sup>a</sup> séries do Ensino Fundamental, no qual a autora observou que, em questões envolvendo tendência, o sujeito justificava sua resposta com dados de sua experiência, de suas crenças, portanto alheios ao banco de dados estudado, especialmente quando não havia tendência explícita.

Temos ainda a pesquisa de Guimarães, Ferreira e Roazzi (2001) com crianças de 3<sup>a</sup> série do Ensino Fundamental, na qual os pesquisadores encontraram, para uma questão de extrapolação, respostas justificadas pela realidade ou por

considerações pessoais, respostas baseadas nas informações do gráfico (em sua minoria) e respostas de que não há possibilidade de resolução da questão.

Os resultados apresentados por Cazorla (2002), trabalhando com alunos universitários mostram que os sujeitos extraíam tendências quando explícitas e faziam projeções quando existia um padrão regular.

### 6.3.1.3– Extrapolação

Essa categoria refere-se a dados extraídos de uma questão, na qual solicitamos uma previsão feita com base em dados de um gráfico de dupla entrada. Na atividade 6B, no item “2f”, propusemos aos alunos uma questão desse tipo. Vejamos a transcrição da fala do G8 na discussão da atividade em referência:

IZABELA – SE O IMAGINÁRIO CHEGASSE NA CLASSE, QUAL SERIA O DOCINHO ESCOLHIDO POR ELE?

LUCAS O. – EU ACHO QUE O BEIJINHO POR CAUSA QUE ELES COMERAM MAIS BEIJINHO.

GABRIEL – É O BEIJINHO.

P – O QUE QUE A IZABELA E O ROGÉRIO ACHAM?

ROGÉRIO – BEIJINHO.

IZABELA – BEIJINHO.

P – POR QUE VOCÊS ACHAM ISSO?

IZABELA – PORQUE SE A CLASSE DESSES ALUNOS AQUI GOSTARAM MAIS DOS BEIJINHOS DO QUE DOS BRIGADEIROS E DOS CAJUZINHOS, ENTÃO VAI TER MAIS BEIJINHO PARA O “IMAGINÁRIO” COMER. PORQUE DAÍ A MULHER VAI FAZER MAIS BEIJINHOS.

ROGÉRIO – PORQUE ELES CONSUMIRAM MAIS BEIJINHOS.

...

P – ESSES AQUI NÃO SIGNIFICA QUE SÃO OS DOCES QUE A TIA NENA FEZ, ELA VAI FAZER AINDA. ELA FEZ UMA PESQUISA PARA SABER O QUAL O DOCINHO PREFERIDO DAS CRIANÇAS. ENTÃO, SE O “IMAGINÁRIO” CHEGASSE, QUAL O DOCE QUE ELE ESCOLHERIA?

POR ALGUNS MINUTOS, OS ALUNOS DISCUTEM ENTRE SI, NÃO ENCONTRANDO UMA RESPOSTA COMUM. DE REPENTE, LUCAS O. COMEÇA A PERGUNTAR PARA CADA UM DO GRUPO: QUAL SERIA SEU DOCINHO PREFERIDO? TODOS RESPONDEM BRIGADEIRO, INCLUSIVE, LUCAS.

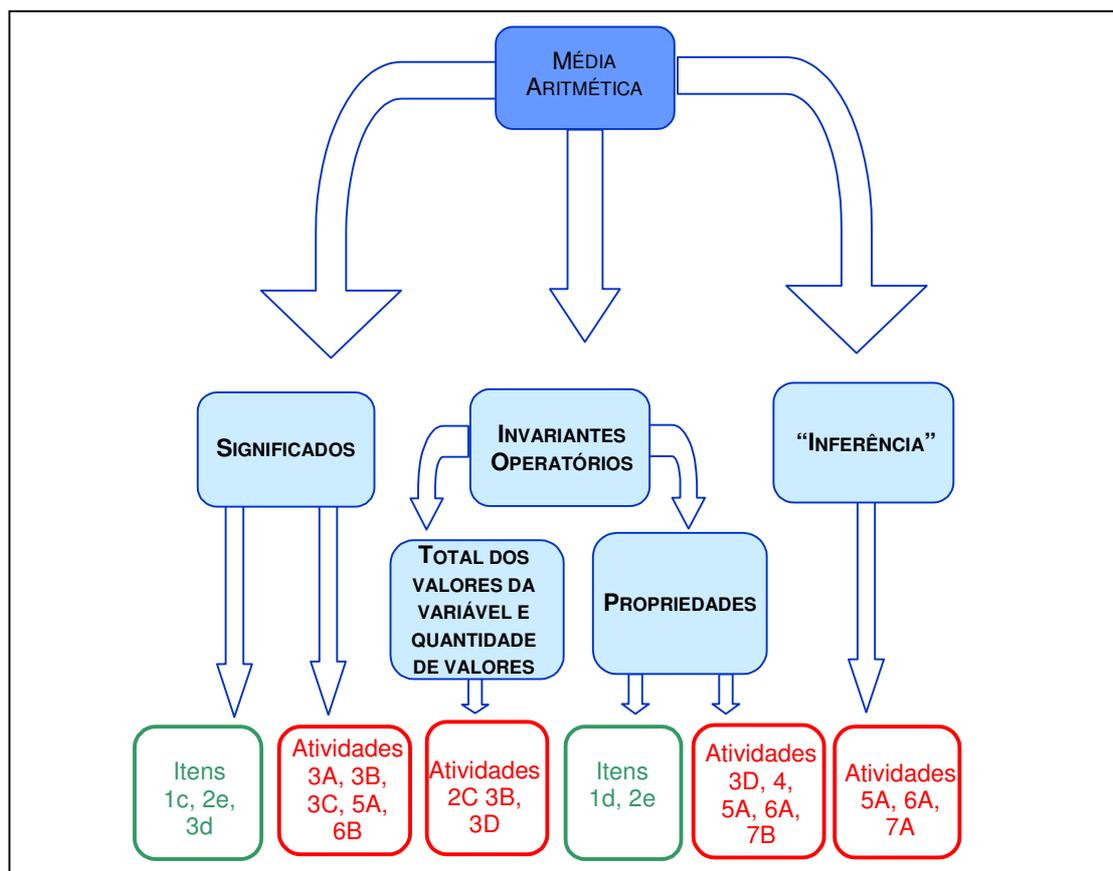
**Quadro 6.26:** Diálogo do G8 durante a atividade 6B, item “2f” – extrapolação

Nesse trecho da discussão dos alunos, ao justificarem suas respostas pela escolha do docinho mais consumido pelas crianças mencionadas na atividade, observamos a percepção de um outro conceito estatístico – a moda - sendo utilizado para se fazer uma previsão apoiada nos dados fornecidos, inclusive, comparando com uma pesquisa feita entre eles mesmos a respeito do mesmo assunto (docinho de preferência - brigadeiro). Notamos, também, a presença de justificativa com base na realidade na fala da aluna Izabela.

Os resultados da análise dos itens: “1e” que envolvia “inferência” e do item “2f” da atividade 6B que abordava extrapolação e ou previsão, indicam a possibilidade de trabalharmos a Estocástica nesse nível de ensino, como também desenvolvermos a diferenciação entre conceitos estatísticos como média e moda.

### **6.3.2 – Análise qualitativa focando a média aritmética**

Com relação ao conceito de média aritmética, analisaremos os dados extraídos dos instrumentos diagnósticos, de protocolos das atividades da intervenção de ensino, bem como de excertos do diálogo entre os alunos nos grupos e ou com a pesquisadora durante o desenvolvimento dessas atividades. O Quadro 6.28 traz as categorias extraídas das estratégias dos alunos na resolução das questões, envolvendo média aritmética, bem como os itens e atividades considerados nessa seção da análise:



**Quadro 6.27:** estrutura da análise qualitativa com foco no conceito de média aritmética

As categorias referentes à análise das questões sobre média aritmética são três a saber:

- a) **significados**, refere-se aos significados atribuídos pelos alunos à média aritmética. Tal análise foi baseada nas justificativas dos alunos, buscando evidências do sentido que os mesmos deram ao conceito de média aritmética;
- b) **invariantes operatórios**, trata-se da categoria, na qual procuramos evidenciar a percepção ou não percepção por parte dos alunos dos invariantes operatórios do conceito de média aritmética. Conforme apontamos no capítulo IV, referimo-nos à tríade de Vergnaud (1990a)

para o conceito da média. Esses invariantes são três, os quais agrupamos aqui em duas subcategorias:

b.1. percepção do total dos valores da variável e quantidade de valores;

b.2. propriedades da média aritmética referentes à classificação das propriedades da média de Strauss e Bichler (1988).

**c)“inferência”**, utilizando a média aritmética, referente a itens das atividades de intervenção de ensino que solicitaram uma inferência baseada no valor da média.

Iniciaremos a análise pela primeira categoria –, significados atribuídos à média aritmética.

### **6.3.2.1 – Significados atribuídos à média aritmética**

Nesta seção, analisaremos os dados dos itens “1c”, “2e” e “3d”. Para tanto, classificaremos as respostas dos alunos apresentadas nos itens citados anteriormente, considerando inclusive suas respectivas justificativas em: média como sinônimo do total dos dados da variável (T); média como sinônimo do total dos dados da variável dividido por dois (T/2); média igual ao valor assumido pela variável na barra ou categoria localizada no meio do gráfico (M); média como resultado do algoritmo da média aritmética – total dos valores da variável dividido pela quantidade de valores – (A); outros (O) para respostas nas quais não está claro o raciocínio utilizado pelo aluno para o cálculo da média.

Salientamos que classificamos na subcategoria média como resultado do algoritmo, respostas com valores aproximados, em virtude de erros de cálculo ou de

contagem. Os três itens analisados solicitam o cálculo da média aritmética apoiada nos dados apresentados em um gráfico, sendo gráfico de barras verticais nos dois primeiros itens (“1c” e “2e”) e gráfico de dupla entrada no último item (“3d”).

Nos dados da tabela abaixo apresentamos os resultados desses itens no pré e pós-teste:

Significados atribuídos à média aritmética			
Tipo de resposta	Item	Pré-Teste	Pós-Teste
<i>T</i> MÉDIA = TOTAL DOS DADOS DA VARIÁVEL	1C	15	5
	2E	10	3
	3D	11	1
<i>T/2</i> MÉDIA = TOTAL DOS DADOS DA VARIÁVEL DIVIDIDO POR DOIS	1C	0	0
	2E	0	0
	3D	4	1
<i>M</i> MÉDIA = VALOR ASSUMIDO PELA VARIÁVEL NA BARRA OU CATEGORIA LOCALIZADA NO MEIO DO GRÁFICO	1C	9	2
	2E	0	0
	3D	6	1
<i>A</i> MÉDIA = RESULTADO DO ALGORITMO	1C	1	13
	2E	1	17
	3D	1	18
<i>O</i> OUTROS	1C	3	8
	2E	17	8
	3D	6	7

**Tabela 6.4:** Evolução nas respostas do pré para o pós-teste na categoria significados atribuídos à média aritmética

No pré-teste, observamos que aproximadamente 50% dos alunos pesquisados associaram o conceito de média aritmética ao total dos valores da variável nos três itens analisados. Nos itens “1c” e “3d”, encontramos algumas respostas relacionando média ao valor assumido pela variável na barra ou na

categoria localizada no meio do gráfico, raciocínio que se aproxima do conceito de mediana. Percebemos que este último tipo de resposta não aparece no item “2e”, cujo gráfico traz uma categoria com frequência nula (ausência de coluna), característica que pode ter inibido este raciocínio por parte do aluno, uma vez que, ao desconsiderar essa frequência nula representada pela inexistência de barra vertical, o gráfico ficaria com um número par de barras verticais o que, por sua vez, dificulta a localização do “valor do meio”.

Ainda neste item, encontramos um número elevado de respostas classificadas em “outros”, resultado que pode ter sido influenciado por uma outra característica do gráfico utilizado nesse item, a saber a escala não era graduada de uma a uma unidade, o que dificultou a identificação do valor de cada categoria para o cálculo da média, resultando em respostas as mais variadas e difíceis de categorizar.

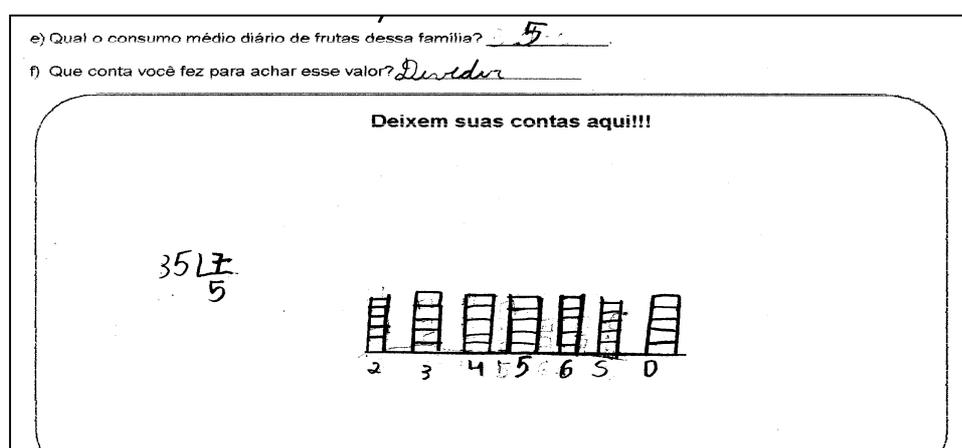
O elevado número de respostas relacionando a média com o total dos dados da variável, levou-nos à utilização da estratégia de redistribuição no ensino desse conceito, durante a intervenção de ensino, uma vez que nessa estratégia, partimos do total dos dados para efetuarmos uma distribuição eqüitativa entre as categorias, de maneira que cada uma dessas passa a ter o mesmo valor (frequência). Esse valor (idêntico) de cada categoria é, então, identificado com o valor da média aritmética desse conjunto de dados.

Nossa escolha está de acordo com as afirmações de Vergnaud (1998), segundo o qual os alunos, quando colocados em situações de resolução de problemas, lançam mão dos esquemas de ação que já possuem, ou seja, de seu

conhecimento prévio, podendo tais esquemas serem modificados, estendidos ou reduzidos.

No pós-teste, o número de respostas envolvendo o valor total dos dados diminuiu consideravelmente em relação ao pré-teste nos três itens. Encontramos quase metade de nossos sujeitos, utilizando o algoritmo da média aritmética.

Entre essas respostas, o uso da estratégia da redistribuição está explícito em cinco (duas no item “1c”, uma no item “2e” e duas no item “3d”), como podemos observar no protocolo abaixo:



**Figura 6.2:** Resposta do S5 – item “2e” – pós-teste

A aplicação da estratégia da redistribuição por alguns alunos leva-nos a concluir que esses alunos abstraíram o conceito de média aritmética por meio de uma abstração pseudo-empírica, uma vez que agiram sobre o objeto, no caso, uma representação gráfica e, ao igualarem as barras ou divisões do gráfico de dupla entrada, deram a esse objeto uma característica não inerente ao mesmo da qual abstraíram um conceito – a média aritmética, de maneira bastante semelhante ao que faziam no material manipulativo.

Em três das respostas classificadas na categoria algoritmo, os alunos apresentaram não só o algoritmo, isto é, o cálculo da operação de divisão, como

também uma explicação clara do significado desse cálculo, semelhante às respostas do protocolo a seguir:

c) Maria pediu para sua sobrinha Renata determinar qual foi sua venda média mensal de relógios nesses meses. Renata pediu ajuda para suas colegas que responderam:

**RESPOSTA DE JOANA:** SUA VENDA MÉDIA MENSAL É 4 RELÓGIOS.  
**RESPOSTA DE SONIA:** SUA VENDA MÉDIA MENSAL É 8 RELÓGIOS.  
**RESPOSTA DE CARMEM:** SUA VENDA MÉDIA MENSAL É 11 RELÓGIOS.  
**RESPOSTA DE SILVIA:** SUA VENDA MÉDIA MENSAL É 9 RELÓGIOS.  
**RESPOSTA DE CARINA:** SUA VENDA MÉDIA MENSAL É 24 RELÓGIOS.

E para você, qual é a resposta correta? Sua venda média mensal é 8 relógios.

Como você faria para convencer Maria que sua resposta está correta? Explicaria como fiz a conta: primeiro somei os relógios e deu 24. Depois o 24 e dividi em meses (3), e finalmente deu 8 relógios.

**Figura 6.3:** Resposta do S18 – item “1c” – pós-teste

Nas respostas acima, percebemos a identificação, por parte do aluno, dos invariantes operatórios -, o total dos valores da variável e a quantidade de valores da mesma – sendo esses partes da tríade de formação do conceito especificado por Vergnaud (1990a), o que nos levar a concluir que houve uma aprendizagem do conceito de média, uma vez que, segundo esse autor, os invariantes operatórios caracterizam um conceito, revelando importantes aspectos do mesmo. Logo, conhecê-los proporciona uma aprendizagem mais significativa.

Encontramos, ainda, esses mesmos significados para o conceito de média aritmética tratados até aqui, e alguns outros, sendo mencionados nas falas dos alunos durante a intervenção de ensino. A seguir, apresentamos excertos referentes a esses significados.

a. Média = Mediana

Na atividade 3A, que introduziu o conceito de média aritmética, ao responder o item “d” – “Como é chamada essa quantidade que vocês encontraram

na pergunta c)?”, encontramos a média sendo associada ao conceito de mediana, conforme o excerto a seguir:

ALGUNS ALUNOS – MÉDIA

P – TODOS CONCORDAM QUE É MÉDIA? QUEM ACHA QUE NÃO É MÉDIA?

BENEDITO – É MÁXIMA.

P – É MÁXIMA? O QUE SIGNIFICA MÁXIMA, BENEDITO?

BENEDITO – É ... MÉDIA.

P – MÁXIMA SIGNIFICA MÉDIA? É A MESMA COISA MÁXIMA E MÉDIA? O QUE A CLASSE ACHA?

CLASSE – NÃO!

P – O QUE É MÁXIMA?

HERINALDO – É MAIOR.

P – É O MAIOR?

HERINALDO – E MÉDIA É MAIS OU MENOS.

ALGUNS ALUNOS – É MAIS OU MENOS NO MEIO.

**Quadro 6.28:** Diálogo durante a atividade 3A – média = mediana

Na última linha desse excerto, alguns alunos associaram o conceito de média a uma localização central no conjunto de dados, afirmando que média “é mais ou menos no meio”, idéia semelhante ao conceito de mediana.

b. Média = ponto de máximo

No excerto citado no item anterior, observamos o aluno Benedito atribuindo à média o significado de ponto de máximo, ao identificar a quantidade eqüitativa (resposta do item “c” – “Se cada aluno ficasse com a mesma quantidade de balas, com quantas balas cada um ficaria?”) com a palavra “máxima” (linha 3).

c. Média = total dos valores da variável

No G3, a pesquisadora questiona a resposta dos alunos no item “c” da atividade 3B – “Antes de Paula encontrar as balas em seu bolso, cada aluno ficaria

com 4 balas. Acrescentando as balas que Paula achou, a média de balas por aluno vai mudar? Se sim, qual a nova média?” – e obteve a seguinte afirmação:

GRUPO – VAI.

P – SE SIM, QUAL SERÁ A NOVA MÉDIA? VOCÊS DISSERAM QUE 10. (REFERINDO-SE À RESPOSTA ESCRITA NA FICHA DE PROTOCOLO)

HERINALDO – NÃO! É 20. PODE MUDAR É 20.

P – É 10 OU É 20?

HERINALDO – É 20.

P – POR QUE QUE É 20, HERINALDO?

HERINALDO – PORQUE A MÉDIA DELES AGORA MUDARAM, AGORA É 20, 20 BALAS.

**Quadro 6.29:** Diálogo do G3 durante a atividade 3B – média = total dos dados da variável

O aluno Herinaldo identifica a média como sendo o total dos valores da variável. Na atividade 5<sup>A</sup>, observamos três grupos (G5, G7 e G8) fornecendo como resposta da questão sobre a média o total dos valores da variável. Observamos que à semelhança dos resultados encontrados nos instrumentos diagnósticos, na intervenção de ensino, a associação da média com o total dos valores da variável é a mais comum.

d. Média = total dos valores da variável dividido por dois

Encontramos a associação da média com o total dos valores da variável dividido por dois em duas atividades iniciais e em uma atividade do final da intervenção de ensino. As duas primeiras associações foram feitas pelos alunos Lucas e Herinaldo, em duas atividades seguidas (3B e 3C), sendo a primeira na seqüência do excerto mencionado no item anterior:

P – E AQUI VOCÊS TINHAM ASSIM: QUE O TOTAL DE BALAS MUDOU E O NOVO TOTAL É 20. O TOTAL É 20 E A MÉDIA TAMBÉM É 20?

LUCAS – NÃO! É 10.

P – POR QUE É 10, LUCAS?

LUCAS – PORQUE É A MÉDIA, PORQUE É A METADE. METADE DE 20 É 10.

P – METADE DE 20 É 10.

LUCAS – É A METADE DE DEZESSEIS É 8.

P – ANTES, DA OUTRA VEZ, QUANDO ELA NÃO TINHA ACHADO ESSAS BALAS, A MÉDIA TINHA DADO QUANTO?

DIEGO – 16 (HESITANTE)

P – A MÉDIA TINHA DADO...

LUCAS – POR QUE 16? 8.

DIEGO – AH! É 8

LUCAS – A MÉDIA DE 16 É 8, PORQUE É A METADE DELE. A METADE DE 20 É 10.

...

P – A MÉDIA DELES ERA QUANTO?

HERINALDO – 8, NÃO É? A DE DEZESSEIS É 8. OU QUER QUE EU FAÇO A CONTINHA?

P – VOCÊ ACHA QUE É 8 POR QUE? POR QUE É 16 DIVIDIDO POR DOIS?

HERINALDO – É.

...

P – ANTES DE PAULA ENCONTRAR AS BALAS EM SEU BOLSO, CADA ALUNO FICARIA COM 4 BALAS. QUANTO ERA A MÉDIA ANTES?

LUCAS – ERA 20. NÃO 10.

HERINALDO – 8

DIEGO – 16

HERINALDO – 8 PORQUE É 16 DIVIDIDO POR 2.

**Quadro 6.30:** Diálogo do G3 durante a atividade 3B – média = total dos dados da variável dividido por dois

Vejam os que esses mesmos alunos discutem na atividade 3C:

DIEGO – QUAL É A MÉDIA DE BALAS POR ALUNO? 4  
 LUCAS – 6  
 P – POR QUE VOCÊ ACHA QUE É 6, LUCAS?  
 LUCAS – PORQUE É A MÉDIA DE 12.  
 P – E QUE CONTA VOCÊ FEZ PARA ACHAR 6?  
 LUCAS – 12 DIVIDIDO POR 2, QUE DÁ 6.  
 P – É A MÉDIA QUANTO É? É 6?  
 LUCAS – É. PORQUE 12, A MÉDIA DELE É 6.  
 P – A MÉDIA É 6, PORQUE VOCÊ DIVIDIU POR 2. E LÁ NO GRÁFICO (REFERINDO-SE À REDISTRIBUIÇÃO FEITA NA TÁBUA) QUANTO DEU PARA CADA UM?  
 HERINALDO – 3.  
 P – E ALI DEU 3 P'RA CADA UM.  
 HERINALDO – A MÉDIA DELE É 3, LUCAS. É 3.  
 P – POR QUE QUE É 3, HERINALDO?  
 HERINALDO – PORQUE É, É, TEM QUE DIVIDIR COM OS ALUNOS, 12 DIVIDIDO POR 4. 4 VEZES...

**Quadro 6.31:** Diálogo do G3 durante a atividade 3C – média = total dos dados da variável dividido por dois

Nesta segunda atividade, notamos que o aluno Herinaldo já consegue posicionar-se corretamente e, com firmeza, quanto ao conceito de média aritmética frente à opinião contrária do colega Lucas. Contudo, encontramos ainda, em uma das últimas atividades (6B) da intervenção de ensino, uma aluna do G2 considerando a média igual ao total dos valores da variável dividido por dois:

P – POR QUE QUE VOCÊS ACHAM QUE A MÉDIA É 20 DOCINHOS?  
 TAIS – EU FALEI P'RA ELA É QUE NÓS CONTAMOS ISTO DAQUI DEU 40, DAÍ ELA FALOU QUE A MÉDIA DIVIDIDA É 20.  
 P – E VOCÊS ACHAM QUE A MÉDIA É ISTO?  
 TAIS – EU ACHO QUE NÃO, MAS ELAS NÃO CONCORDARAM COMIGO.

**Quadro 6.32:** Diálogo do G2 durante a atividade 6B – média = total dos dados da variável dividido por dois

Dos excertos da intervenção de ensino citados anteriormente, observamos que as duas associações mais comumente efetuadas pelos alunos referem-se ao total dos valores da variável ou a esse total dividido por dois, dados esses que confirmam os resultados do pré-teste e justificam o uso da estratégia da redistribuição durante a intervenção de ensino, conforme já mencionamos anteriormente ainda nesta seção.

A pesquisa de Stella (2003) realizada com alunos do Ensino Médio encontrou dados semelhantes, ao apontar resultado, em que a média é interpretada como moda e ou mediana. Santos (2003) verificou em seu trabalho interpretações como ponto de máximo e como “mais ou menos” para a expressão “em média” por parte de uma professora do 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental.

#### **6.3.2.2 – Percepção dos invariantes operatórios da média aritmética**

Nessa seção, analisaremos dados selecionados dos instrumentos diagnósticos e de diálogos da intervenção de ensino, considerando a percepção dos invariantes operatórios da média aritmética sob duas subcategorias: a) o total dos valores da variável e a quantidade de valores e; b) as propriedades da média aritmética, segundo listadas por Strauss e Bichler (1988). Buscaremos salientar a importância da identificação desses invariantes para a compreensão do conceito de média.

– Percepção dos invariantes operatórios: total dos valores da variável e número (quantidade) desses valores

A atividade 2C constituiu-se na primeira atividade, na qual abordamos o conceito de média aritmética, apresentando-o aos alunos por meio da redistribuição, que foi solicitada no seguinte item dessa atividade:

“Como ficaria o gráfico se cada aluno ficasse com a mesma quantidade de balas?” (o gráfico encontrava-se construído nas tábuas de gráfico)

Para nossa surpresa, todos os grupos apresentaram procedimento semelhante na resolução deste item – acrescentaram ímãs ao gráfico (que representavam as balas) ou retiraram-nos, não utilizando, portanto, a estratégia da redistribuição. Solicitamos, então, que eles deveriam resolver a questão sem aumentar ou diminuir a quantidade de balas do gráfico, após essa instrução, a redistribuição passou a ser a solução adotada por todos.

Observamos aqui a importância da percepção dos invariantes operatórios da média aritmética, a saber - total dos valores da variável e número (quantidade) desses valores para seu cálculo, uma vez que ao modificarem o total dos valores da variável (colocando ou retirando ímãs), a média é alterada.

Nas atividades seguintes, a percepção desses invariantes foi enfatizada. Contudo, encontramos um dos grupos (G3), na atividade 3B, com dificuldades para identificar os diferentes invariantes em duas situações distintas. Na primeira situação, os dados são: 5, 2, 8 e 1 (total dos valores da variável = 16). Na segunda, quem tinha 8 balas encontra mais 4, ficando com 12 balas (passando o total dos valores da variável de 16 para 20). Vejamos o excerto abaixo:

P – COMO VAI FICAR A PAULA MESMO? ELA ACHOU 4 BALAS EM SEU BOLSO.  
 DIEGO - ENTÃO ELA VAI FICAR, PORTANTO, 12,13,14,15,16 (REDISTRIBUI SEM ACRESCENTAR 4 BALAS PARA A PAULA, PERMANECENDO COM O MESMO TOTAL 16).  
 HERINALDO – PÊRA AÍ, PÊRA AÍ! ELA TINHA 4 BALAS NO BOLSO DELA E TINHA 12?  
 P – ELA TINHA QUANTAS ANTES?  
 LUCAS – 4  
 DIEGO – 12  
 HERINALDO – NÃO! OITO!  
 P – ELA TINHA OITO. QUANTAS QUE ELA ACHOU?  
 GRUPO – 4  
 P – VAI FICAR COM QUANTAS?  
 GRUPO – COM 12.  
 P – VAI FICAR COM 12.  
 LUCAS – ELA TINHA ESSAS AQUI (MOSTRANDO 8 ÍMÃS) E ESSAS AQUI ELA NÃO TINHA (MOSTRANDO 4 ÍMÃS, MAS, SEM ACRESCENTAR 4 ÍMÃS NO TOTAL, TRABALHANDO APENAS COM O TOTAL ANTERIOR).  
 ...  
 DIEGO – CALMA, TO PENSANDO, PÊRA AÍ! FICA TUDO COM A MESMA QUANTIDADE. (ESTAVA CALCULANDO A MÉDIA, AINDA SEM ACRESCENTAR AS 4 BALAS).  
 HERINALDO - LEIA AÍ DE NOVO!  
 DIEGO RELÊ: PAULA TINHA SE ESQUECIDO DE CONTAR AS 4 BALAS.  
 HERINALDO – PÊRA AÍ! AS 4 TÁ AQUI. (CONTINUAVAM NÃO ACRESCENTANDO 4 ÍMÃS AO TOTAL ANTERIOR).

**Quadro 6.33:** Diálogo do G3 durante a atividade 3B – dificuldade em identificar os invariantes operatórios do conceito de média aritmética em um gráfico de barras verticais

Os alunos permaneceram por muito tempo trabalhando com o total anterior, tentando distribuir os ímãs de maneira que Paula ficasse com 12 e os outros alunos permanecessem com a quantidade anterior. Observamos aqui que a não identificação dos diferentes invariantes operatórios de cada uma das duas situações levou os alunos a fracassarem na resolução do problema.

Na atividade 3D, a pesquisadora procura salientar os invariantes operatórios de uma outra maneira, para tanto faz a seguinte pergunta:

P – DOIS É A MÉDIA DE QUEM POR QUEM?  
 IZABELA – DA ISABELA PARA A PAULA.  
 P – MAS VOCÊ DIVIDIU DA ISABELA PARA O MURILO TAMBÉM.  
 IZABELA – É (PENSA POR ALGUNS MINUTOS).  
 P – O QUE QUE NÓS ESTAMOS DIVIDINDO? O QUE É TUDO ISSO JUNTO AQUI? (MOSTRANDO OS ÍMÃS)  
 IZABELA – BALAS.  
 P – POR QUEM? TÁ DIVIDINDO P'RA QUEM?  
 IZABELA – PELOS ALUNOS.  
 P – AH! ENTÃO É MÉDIA DE?  
 IZABELA – QUANTIDADE DE BALAS.  
 P – POR?  
 GRUPO – ALUNOS.

**Quadro 6.34:** Diálogo do G8 durante a atividade 3D – dificuldade em identificar os invariantes operatórios do conceito de média aritmética em um gráfico de barras verticais

Nesse excerto, observamos a dificuldade do G8 para identificar os invariantes operatórios nessa atividade (3D) que se constituía em uma atividade não introdutória sobre o conceito de média aritmética. O mesmo ocorreu com o G1, também, na atividade 3D:

P – QUEM É O 8?  
 VITÓRIA – AH! A MÉDIA DE PAULA POR ISABELA?  
 P – SÓ PELA ISABELA? VOCÊ DEU TODAS AS BALAS PARA A ISABELA?  
 VITÓRIA – DEI P'RO PEDRO, P'RO MURILO E P'RA PAULA.  
 P – E QUEM SÃO ELES?  
 VITÓRIA – OS ALUNOS.  
 P – ENTÃO É MÉDIA DE BALAS POR?  
 VITÓRIA – ALUNOS.

**Quadro 6.35:** Diálogo do G1 durante a atividade 3D – dificuldade em identificar os invariantes operatórios do conceito de média aritmética em um gráfico de barras verticais

Observamos uma dificuldade maior, por parte dos alunos, na identificação dos invariantes operatórios da média aritmética em um gráfico de dupla entrada, uma vez que, é necessário identificar em relação a qual dos eixos (horizontal ou

vertical) o total dos valores da variável está sendo mediado. O excerto seguinte mostra-nos essa dificuldade pelo G5 na atividade 6B:

MANUELLA – É OITO A MÉDIA.

P – E LÁ NO GRÁFICO SERÁ QUE VAI DAR ISSO MESMO?

PALOMA – VAI DAR. (PÕE-SE A FAZER A REDISTRIBUIÇÃO COLOCANDO DOIS EM CADA SUBDIVISÃO DO GRÁFICO, ENCONTRANDO O TOTAL DE 6 COMO MÉDIA, MUDA, ENTÃO, PARA 3 EM CADA SUBDIVISÃO E CHEGA À CONCLUSÃO DE QUE NÃO DÁ).

PALOMA – 3 NÃO DÁ!

P – COMO QUE EU FAÇO?

PALOMA – SE EU COLOCAR 8 AQUI, 8 AQUI, AQUI, AQUI E AQUI (REFERINDO-SE A CADA ALUNO), 3 + 3, 6, SETE E OITO.

P – VOCÊS TINHAM ACHADO QUE ERA 3 COMO, PALOMA E TAMYRIS?

PALOMA – A GENTE TINHA COLOCADO 2, 2 E 2 (DOIS EM CADA SUBDIVISÃO) E AÍ SOBROU UM MONTE AQUI, AÍ NÓS COLOCAMOS 3, MAS NÃO DEU E AGORA AQUI TEM 8 E AQUI TAMBÉM E AQUI TAMBÉM...

**Quadro 6.36:** Diálogo do G5 durante a atividade 6B – dificuldade em identificar os invariantes operatórios do conceito de média aritmética em um gráfico de dupla entrada

Como nessa atividade, o eixo horizontal apresentava cinco categorias e o eixo vertical três e, sendo o valor da média solicitada oito, não era possível distribuírem uma mesma quantidade de ímãs em cada subdivisão do gráfico (considerando-se os dois eixos), pois oito não é múltiplo de três (quantidade de categorias do eixo vertical). Aqui a identificação do invariante quantidade dos valores mediados é imprescindível para o cálculo da média, tendo em vista que o gráfico (de dupla entrada) traz dados de duas variáveis.

Nossos dados evidenciam a relevância dos invariantes operatórios do conceito de média aritmética – total dos valores da variável e número (quantidade) desses valores – para o entendimento do mesmo, como também salientam a relação desses invariantes com a estratégia da redistribuição, pois caso os totais sejam mudados (sem ocorrer alterações no conjunto de dados) essa estratégia não será

eficaz. Sua importância é evidenciada também no trabalho com o gráfico de dupla entrada, uma vez que tem-se que levar em conta qual eixo da variável deverá ser mediado, relacionando-se, portanto, com o número (quantidade) dos valores mediados.

– Percepção dos invariantes operatórios: propriedades da média aritmética

Ao longo de nossa intervenção de ensino, trabalhamos cinco das sete propriedades da média aritmética enumeradas por Strauss e Bichler (1988), conforme quadro constante do capítulo III.

Entretanto, observamos que as sete propriedades foram percebidas pelos alunos ou por grupos deles, ainda que de maneira intuitiva.

A seguir, discorreremos a respeito da percepção, por parte dos alunos, de cada uma dessas propriedades ao longo da intervenção de ensino:

a. Propriedade A: A média é um valor compreendido entre os extremos

Vejamos um excerto no qual uma aluna percebe essa propriedade da média e dá à mesma uma justificativa bastante significativa, como podemos observar na última linha de sua fala.

<p>P – NESTE CASO, POR EXEMPLO, A LAURA COMEU 1, ELA É QUEM COMEU MENOS, A MÉDIA É 8, ELA PODERIA SER MENOR QUE 1?</p> <p>GRUPO – NÃO!</p> <p>P – É MAIOR DO QUE 15, QUE É O DO LUÍS QUE COMEU MAIS?</p> <p>GRUPO – NÃO!</p> <p>GRUPO – A MÉDIA É 8.</p> <p>P – É ELA PODERIA DAR UM NÚMERO MENOR DO QUE 1 E MAIOR DO QUE 15?</p> <p>GRUPO – NÃO.</p> <p>P – POR QUE NÃO, SERÁ?</p> <p>MARIANA – EU ACHO QUE É PORQUE NÃO IRIA DAR 15 PRA CADA UM</p>
---

**Quadro 6.37:** Diálogo do G1 durante a atividade 6A – percepção da propriedade A: a média é um valor compreendido entre os extremos

A aluna Mariana relaciona a propriedade abordada na atividade 6A com a estratégia da redistribuição, apontando para a impossibilidade de se efetuar essa última, com o conjunto de dados fornecido, caso a propriedade citada não seja válida e ou observada, ou seja, é impossível que a média, na situação particular apresentada, dê um número maior do que 15, pois sendo, assim, teríamos que ter um total de docinhos suficiente para cada categoria ficar com a quantidade de 15, após a redistribuição.

A propriedade foi abordada apenas nessa atividade (6A) da intervenção de ensino. O resultado apresentado pelo excerto acima evidencia a possibilidade de trabalhar tal propriedade com sucesso, em outras situações.

b. Propriedade B: A soma das variações da média é zero

Esta propriedade é percebida pelos alunos por meio da idéia de compensação que também vem associada à estratégia da redistribuição para o cálculo da média aritmética. Observemos a seguinte fala dos alunos:

P – SE EU SEMPRE TIVER ALGUÉM COM ZERO, COM NADA, A MÉDIA VAI SEMPRE DIMINUIR?

CLASSE – VAI.

P – POR QUE?

GABRIEL – PORQUE QUEM TEM MAIS VAI TER QUE DIVIDIR COM QUEM TEM MENOS.

P – ENTÃO VOCÊS ACHAM QUE SEMPRE QUE EU TIRAR AS BALAS DE ALGUÉM, A MÉDIA VAI DIMINUIR? VAMOS VER? TIRA AS DE PEDRO, ELE TEM 2.

JAQUELINE – ÍZABELA VAI TER QUE DAR P'RA ELE.

**Quadro 6.38:** Diálogo do G6 durante a atividade 3D – percepção da propriedade B: a soma das variações da média é zero

Ainda que de maneira intuitiva, na linha cinco deste excerto, o aluno Gabriel faz uso da propriedade B, uma vez que lança mão da idéia de distribuição

eqüitativa da média aritmética, na qual a quantidade de quem tem mais será a mesma de quem tem menos, até que todos tenham a mesma quantidade.

Salientamos que essa propriedade não foi abordada em nossa intervenção de ensino, portanto, sua percepção não foi articulada em nenhuma das situações apresentadas aos sujeitos por nós. Os dados apontam para a possibilidade de trabalharmos situações, nas quais tal propriedade possa tornar-se mais perceptível ao aluno.

c. Propriedade C: O valor médio pode ser influenciado pelos valores de cada um dos dados

A propriedade acima é percebida pela aluna Vitória em um conjunto de dados assimétrico, na atividade 4. A aluna aponta uma diferença de uma unidade entre o valor que, visivelmente, daria à média aritmética dos dados e o valor resultante do cálculo pela redistribuição.

P – VITÓRIA ACHA QUE, SE UM PEGOU 11, O OUTRO PEGOU 9, O OUTRO PEGOU 7 E O OUTRO PEGOU 3, NÃO É 6 PARA CADA UM?

VITÓRIA – É.

P – POR QUE?

VITÓRIA – EU ACHO QUE É 7. EU ACHO QUE É MAIS UM POUQUINHO PORQUE CADA UM PEGOU MUITA QUANTIDADE. PODE ATÉ SER 6, MAS DE VISTA ASSIM, NÃO PARECE.

P – VOCÊ ACHA QUE É MAIOR OU MENOR?

VITÓRIA – MAIOR.

...

P – POR QUE, VITÓRIA, VOCÊ TINHA ACHADO QUE TINHA DADO UM NÚMERO MAIOR QUE 6? E AGORA O QUE VOCÊ CONCLUI? PORQUE NÓS CHEGAMOS QUE DEU MESMO 6.

VITÓRIA – É PORQUE ASSIM EU TAVA VENDO ALI DA BRUNA QUE ELA TINHA 11, DEPOIS O MARCELO TINHA 9, A SOFIA TINHA 3 E O LEANDRO TINHA 7, ENTENDEU? DE CARA ASSIM EU FALEI QUE DAVA 6, MAS PARECIA QUE DAVA MAIS.

P – E POR QUE PARECIA QUE DAVA MAIS?

VITÓRIA – PORQUE AQUI ELES TINHAM MAIOR QUANTIDADE E O LEANDRO TAMBÉM TINHA, O TIAGO TINHA MENOS QUANTIDADE.

**Quadro 6.39:** Diálogo do G1 durante a atividade 4 – percepção da propriedade C: o valor médio pode ser influenciado pelos valores de cada um dos dados

Após checar o resultado da média, Vitória percebeu que os valores maiores “elevam” a média e que os valores menores e zerados (Tiago) “abaixam” a média, ou seja, a propriedade C fica bastante perceptível nessa atividade.

Esta propriedade é contemplada também no item “1d”<sup>2</sup> dos instrumentos diagnósticos. Dos dados obtidos, destacamos três protocolos entre as respostas, nas quais consideramos que o aluno, ainda que de maneira intuitiva, percebeu a influência dos valores dos dados sobre o valor da média, especificamente, quando um desses valores dos dados é alterado, como no caso do item em questão.

A primeiro protocolo refere-se a uma resposta extraída do pré-teste, no qual encontramos dois alunos que evidenciaram a percepção dessa propriedade tanto ao afirmarem a mudança no valor da média, na primeira parte do item, quanto ao relacionarem essa mudança com a alteração dos dados, na segunda parte do item. Vejamos uma dessas respostas:

S 15 – NÃO. ACHO QUE NÃO POR QUE SE SEU CHICO TIVESSE VENDIDO 7 MINI-GAMES NÃO IRIA DÁ DOZE (PARA ESSE ALUNO DOZE ERA O TOTAL DOS MINI-GAMES DO ITEM ANTERIOR, OU SEJA, ANTES DA ALTERAÇÃO DOS DADOS).

**Quadro 6.40:** Resposta do S15 ao item “1d” do pré-teste – percepção da propriedade C: o valor médio pode ser influenciado pelos valores de cada um dos dados

Observamos que o aluno percebeu a alteração de um dos invariantes operatórios (o total dos valores da variável) e justificou sua afirmação de que a média não será a mesma em razão dessa alteração. Salientamos que, até então, nenhuma atividade da intervenção de ensino havia sido desenvolvida ainda.

No pós-teste, o número de respostas com essa característica subiu para dez alunos. O protocolo abaixo exemplifica uma dessas respostas:

<sup>2</sup> A seguir transcrevemos o item “1d”:

Se Maria tivesse vendido 6 relógios no mês de fevereiro, sua venda mensal nesse período seria a mesma? \_\_\_\_\_

- Se você acha que SIM, explique porquê nas linhas abaixo.
- Mas se você acha que NÃO escreva nas linhas abaixo qual seria a nova média.

S 10 – NÃO. NÃO, PORQUE ELA TERIA A MÉDIA DE 7 RELÓGIOS, POIS A SOMA E A DIVISÃO MUDARÁ E A MÉDIA DIMINUIRÁ.
--

**Quadro 6.41:** Resposta do S10 ao item “1d” do pós-teste – percepção da propriedade C: o valor médio pode ser influenciado pelos valores de cada um dos dados

Na resposta do sujeito 10, percebemos inclusive o apontamento de diminuição na média, ou seja, a caracterização da alteração (para mais ou para menos) na mesma, o que nos leva a concluir que a aluna percebeu a relação entre os dados mediados e o valor da média.

Os resultados evidenciam um crescimento do pré-teste para o pós-teste, no número de alunos para os quais a propriedade C foi perceptível, inclusive, de maneira a ser aplicada para justificar a resposta ao item “1d”. Salientamos que essa propriedade foi trabalhada em três das 17 atividades da intervenção de ensino.

d. Propriedade D: A média não é, necessariamente, igual a um dos valores dos dados

Nos excertos referentes a essa propriedade, a média era um valor muito próximo a um dos valores da variável, e os alunos identificavam esse último com a média.

A percepção dessa propriedade foi esclarecida pela pesquisadora, uma vez que os dados apontam para uma aproximação abusiva desses elementos, por parte dos alunos, o que podemos observar no excerto a seguir:

ALGUÉM – E O PONTO DE PEDRO É O MÉDIO  
P – O PEDRO SERÁ QUE É O PONTO MÉDIO?  
ALGUNS – NÃO!  
OUTROS – É.  
P – QUANTO PEDRO TEM?  
CLASSE – 6.  
P – COMO É QUE EU FAÇO PARA CALCULAR A MÉDIA MESMO?  
JAQUELINE – DIVIDINDO  
PESQUISADORA FAZ A REDISTRIBUIÇÃO NA TÁBUA DE GRÁFICOS  
P – QUANTO DEU?  
CLASSE – 7.  
P – MAS PEDRO TINHA QUANTAS?  
CLASSE – 6  
P – ENTÃO PEDRO É O PONTO MÉDIO?  
ALGUNS – É  
P – MAS ELE TINHA QUANTAS?  
CLASSE – 6.  
P – E QUANTO DEU A MÉDIA?  
CLASSE - 7  
P – ENTÃO ELE ERA O MÉDIO?  
CLASSE – ERA  
P – QUANTAS TINHA NO PEDRO?  
CLASSE – 6.  
P – ELE TINHA 6. AÍ VOCÊS DISSERAM PEDRO É O MÉDIO. SERÁ QUE É? QUANTO DEU A MÉDIA?  
VITÓRIA – 7.  
P – ENTÃO, PEDRO ERA A MÉDIA?  
VITÓRIA – NÃO!

**Quadro 6.42:** Diálogo da pesquisadora com a classe durante a atividade 7B – percepção da propriedade D: a média não é, necessariamente, igual a um dos valores dos dados

A percepção da propriedade D foi desenvolvida em apenas uma atividade da intervenção de ensino. O excerto transcrito anteriormente mostra a dificuldade dos alunos para distinguir entre o valor da média e o valor de cada dado mediado (ou valor de cada categoria, no caso de dados extraídos de um gráfico). Este resultado indica a necessidade de abordarmos mais vezes e em diferentes situações essa propriedade.

e. Propriedade E: A média pode ser uma fração que não tenha equivalente na realidade física

Esta propriedade da média aritmética restringe-se a situações, envolvendo valores discretos e a dificuldade está em relacionar um valor “quebrado”, resultado do cálculo da média com variáveis discretas.

Na atividade 3D, a quantidade total de balas é diminuída, diminuindo, portanto, a média. No final da discussão dessa atividade com a classe, uma aluna observou que, se tiver menos que 4 não dá um para cada, conduzindo a discussão para a abordagem dessa propriedade da média. A pesquisadora cita, então, um exemplo:

P – SE TIVESSE SÓ 2 NO TOTAL? POR EXEMPLO, SÓ A QUANTIDADE DE PEDRO (2 BALAS)?  
VITÓRIA – ELE IA TER QUE REPARTIR A BALA DELE NO MEIO.

**Quadro 6.43:** Diálogo da pesquisadora com a classe durante a atividade 3D – percepção da propriedade E: a média pode ser uma fração que não tenha equivalente na realidade física

Vitória admite um valor fracionário, porém, pensando, provavelmente, na possibilidade de se ter a metade de uma bala, na realidade.

Em uma outra atividade (6B), a pesquisadora apresenta um outro exemplo, no qual o valor da média não é um número inteiro:

P – IMAGINEM VOCÊS QUE SE O “IMAGINÁRIO TIVESSE RESPONDIDO NA PESQUISA DA TIA NENA QUE ELE COMERIA 6 DOCINHOS. SERIA 4 BEIJINHO E 2 BRIGADEIROS. QUANTO SERIA A MÉDIA DE DOCINHOS, AGORA?  
CLASSE – NOVE / NOVE VÍRGULA UM  
P – QUEM RESPONDEU NOVE, QUE CONTA FEZ? POR QUE NOVE?  
DISCUTEM, MAS NÃO CHEGAM A UMA CONCLUSÃO.  
P – IZABELA, POR QUE DÁ 9,1?  
IZABELA HAVIA CALCULADO O TOTAL DE 46 DIVIDIDO POR 5.

**Quadro 6.44:** Diálogo da pesquisadora com a classe durante a atividade 6B – percepção da propriedade E: a média pode ser uma fração que não tenha equivalente na realidade física

Ainda que a aluna Izabela tenha errado o cálculo do total de docinhos (segundo os dados da situação em discussão), ressaltamos que a mesma admitiu um valor fracionário para a média aritmética e que não tem um equivalente na realidade física, isto é, não há como haver 9,1 docinhos.

Não objetivamos abordar essa propriedade na intervenção de ensino, porém, por diversas vezes, em diferentes situações, a mesma foi alvo de questionamentos por parte dos alunos, ou seja, situações colocadas por eles mesmos exigiram de nós uma resposta que envolvia tal propriedade.

Salientamos que não havia valores “quebrados” da média aritmética encontrados nas situações colocadas por nós na intervenção.

A insistência dos alunos em questionarem a respeito dos valores da média não inteiros indica tanto a possibilidade como a necessidade de desenvolvermos situações, em que os alunos das séries iniciais possam ter a percepção e o entendimento dessa propriedade, uma vez que pesquisas como a de Cazorla (2002) aponta a dificuldade de alunos do ensino superior para interpretar a média (valor “quebrado”) de uma variável discreta.

f. Propriedade F: Tem-se que ter em conta os valores nulos no cálculo da média

Por parte dos alunos, a reação de repúdio a essa propriedade é observada em suas falas durante o desenvolvimento das atividades da intervenção de ensino, como nos resultados do item “2e” dos instrumentos diagnósticos o qual também abordavam essa propriedade.

Inicialmente, vejamos um excerto:

MANUELLA FAZ A REDISTRIBUIÇÃO.

PALOMA – TA CERTO?

P – O QUE VOCÊ ACHA?

PALOMA – MAS ELA NÃO TINHA.

P – ELA NÃO TINHA NENHUM SALGADINHO. E AGORA QUANTO QUE DEU?

MANUELLA – DEU 7.

P – ENTÃO A MÉDIA É 7?

GRUPO – É.

PALOMA – MAS NÃO PODE, A MARA NÃO TINHA NADA, NÃO PODE DIVIDIR COM ELA!

PALOMA INSISTE POR ALGUMAS VEZES E ACABA SENDO CONVENCIDA PELO GRUPO DE QUE A CATEGORIA COM FREQUÊNCIA NULA DEVE SER CONSIDERADA.

**Quadro 6.45:** Diálogo do G5 durante a atividade 5A – percepção da propriedade F: tem-se que ter em conta os valores nulos no cálculo da média

No grupo (G5), Paloma não admite a inclusão da categoria nula no cálculo da média feito por meio da redistribuição.

Analisamos os dados extraídos das justificativas dos alunos no item “2e” no pós-teste e observamos que entre os 17 alunos que utilizaram o algoritmo e ou a redistribuição para o cálculo da média, com sucesso ou não, 13 deles consideraram o valor nulo presente no gráfico; enquanto quatro efetuaram o cálculo dividindo o total por seis (dias) e não por sete (dias), ou seja, desconsideraram o dia da semana em que o valor era nulo.

Nossos resultados mostram uma melhora na percepção dessa propriedade do pré-teste para o pós-teste, o que indica a possibilidade de sucesso no desenvolvimento de atividades que abordem a mesma.

A dificuldade com tal propriedade é também apontada por Cazorla (2002) em sua pesquisa com estudantes universitários.

g. Propriedade G: O valor médio é representativo dos valores mediados

A percepção desta propriedade será discutida na próxima seção – “inferência” com o uso da média aritmética.

Com relação à análise sobre a percepção das propriedades da média aritmética, notamos que cada uma das propriedades foram percebidas pelo menos por uma parte dos alunos.

Parece que as propriedades “C” e “F” ficaram mais evidentes aos alunos, provavelmente, por terem sido mais trabalhadas durante a intervenção de ensino.

Tendo em vista a afirmação de Vergnaud de que “quando estudamos a aprendizagem e o desenvolvimento de conceitos matemáticos em crianças, insistimos no fato de que o reconhecimento (ou a descoberta) de diferentes propriedades do mesmo conceito nem sempre ocorre simultaneamente, mas freqüentemente percorre vários anos.” (VERGNAUD, 1997, p. 5)<sup>3</sup>.

Desse modo, ressaltamos a necessidade de retorno ao ensino-aprendizagem das propriedades da média aritmética para a ampliação desse conceito.

### **6.3.2.3 – “Inferência” utilizando a média aritmética**

Atividades envolvendo “inferência” utilizando a média aritmética foram abordadas nas atividades 5A, 6A e 7A da intervenção de ensino, respectivamente, nos itens “g” e “h”, “f”, “d”. Nos protocolos das atividades que constavam esses itens encontramos dois diferentes tipos de erros:

---

<sup>3</sup> Tradução livre do texto original: “When studying the learning and development of mathematical concepts in children, one is struck by the fact that the recognition (or the Discovery) of different properties of the same concept does not always take place simultaneously but often covers several years.”

- multiplicação do total dos dados da variável do gráfico pelo total de alunos da classe

Vejamos um protocolo que exemplifica esse tipo de erro:

g) Vocês acham que com esses dados, a Tia Nena pode fazer uma previsão de quantos salgadinhos ela deverá preparar para a classe toda? Sim

Por que? De acordo com o que ela preparou para 10 alunos, ela tem que multiplicar para trinta alunos.

h) Se for possível fazer a previsão, quantos salgadinhos ela precisará fazer para uma classe com 30 alunos? Ela precisará fazer 1260 salgadinhos.

Como vocês chegaram a este resultado? multiplicamos cada salgadinho por 40 alunos.

Espaço para fazer as contas.

$$\begin{array}{r} 40 \\ \times 30 \\ \hline 1260 \end{array}$$

**Figura 6.4:** Resposta do G8 – atividade 5A – itens “g” e “h” – tipo de erro: multiplicação do total dos dados da variável do gráfico pelo total de alunos da classe

Neste protocolo, referente à atividade 5A, encontramos uma previsão abusiva (1260) do número de salgadinhos suficientes para uma classe com trinta alunos. Salientamos que essa era a primeira atividade, na qual abordamos esse conteúdo.

O segundo tipo de erro trata-se de:

- Multiplicação e ou divisão do número de alunos por alunos

A seguir, apresentamos dois protocolos desse tipo de erro, um referente ao uso da multiplicação e outro, referente à divisão do número de alunos por alunos.

d) Sabendo que a 4ª.C tem 35 alunos, quantas prendas esta classe poderá arrecadar? *Essa*

*classe poderá arrecadar 175 prendas.*

---

Deixem suas contas aqui!!!

$$\begin{array}{r} 30 \\ + 00 \\ \hline 30 \end{array}$$

$$35 \times 5 =$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 5 \\ \hline 175 \end{array}$$

Figura 6.5: Resposta do G6 – atividade 7A – item d - Multiplicação do número de alunos por alunos

f) Quantos docinhos tia Nena precisará fazer, sabendo que a 4ª. série tem 30 alunos? *6 para cada aluno*

Espaço para fazer a conta

$$\begin{array}{r} 30 \\ \times 5 \\ \hline 006 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ \times 5 \\ \hline 008 \end{array}$$

Figura 6.6: Resposta do G3 – atividade 6A – item f - Divisão do número de alunos por alunos

Os protocolos acima referem-se, respectivamente, às atividades 7A e 6A. Embora percebamos um erro comum em ambas as respostas anteriores, a saber – relacionaram número de alunos com número de alunos, quando a questão requeria o número de prendas (na atividade 7A) e o número de docinhos (na atividade 6A) – ; o segundo protocolo diferencia-se do primeiro por utilizar a operação de divisão, o que pode indicar o uso da média aritmética, ainda que com valores indevidos.

O emprego da divisão nessas duas últimas atividades que envolviam a “inferência” pode ter sido influenciado pela primeira atividade, na qual orientamos quanto ao uso da média em problemas desse tipo.

No desenvolvimento da primeira atividade, encontramos a resposta que utilizou a média aritmética, sem a intervenção da pesquisadora, ou seja, por iniciativa dos alunos em apenas um dos grupos (G7). Nos demais grupos, houve a necessidade de orientação por parte da pesquisadora na resolução do problema.

Vejamos o diálogo da pesquisadora com o grupo G7 ao responderem o item “h”<sup>4</sup> da atividade 5A:

ANA BEATRIZ – SETE VEZES TRINTA?

P – POR QUE VOCÊ ACHA QUE É SETE VEZES TRINTA?

ANA BEATRIZ – É POR CAUSA QUE SETE DEU PRA 6 ALUNOS (REFERINDO-SE À MÉDIA DE SALGADINHOS DO CONJUNTO DE DADOS APRESENTADO NO GRÁFICO) DAÍ, PRA 30 TEM QUE VER O RESULTADO QUANTO QUE DÁ.

P – RESULTADO DE QUE CONTA?

ANA BEATRIZ – SETE VEZES TRINTA POR CAUSA QUE DE 6 ALUNOS FOI SETE PARA CADA UM DAÍ TEM QUE VER QUANTO VAI DAR SETE P’RA TRINTA ALUNOS.

**Quadro 6.46:** Diálogo do G7 durante a atividade 5A – utilização da média aritmética em questão envolvendo a “inferência”

Trata-se do grupo em que o uso da média aritmética foi espontâneo. Observamos que a aluna Ana Beatriz inicia seu raciocínio, na linha 3, admitindo a quantidade média de salgadinhos dos dados fornecidos no gráfico, suficiente para aquele grupo de alunos e assume que essa quantidade média será também suficiente para uma classe com 30 alunos.

<sup>4</sup> Transcrevemos aqui o item “h” da atividade 5A:

Se for possível fazer a previsão, quantos salgadinhos ela precisará fazer para uma classe com 30 alunos? \_\_\_\_\_  
Como vocês chegaram a este resultado?

Ressaltamos que os dados fornecidos foram extraídos entre os alunos da mesma classe para a qual foi solicitada a previsão, ou seja, o conjunto de dados do gráfico constituía-se em uma amostra da população – a classe.

Já os demais grupos não obtiveram êxito nessas atividades, ocorrendo variados erros de raciocínio, os quais podem ser encontrados nos diálogos abaixo:

Grupo 3 discutindo sobre o mesmo item “h” da atividade 5A:

P – POR QUE QUE VOCÊ ACHA QUE É 30 VEZES SEIS, DIEGO? COMO VOCÊ PENSOU ISSO?  
 HERINALDO – NÃO! É SEIS ALUNOS VEZES 30 ALUNOS!? TEM QUE SER 42.  
 P – POR QUE QUE VOCÊ ACHA QUE TEM QUE SER 42, HERINALDO?  
 HERINALDO – PORQUE VAI SER SALGADINHOS. PORQUE SEIS ALUNOS VEZES 30 ALUNOS?  
 DIEGO – 30 VEZES SEIS DÁ 180, NÃO É?  
 P – SIM, DÁ 180, MAS POR QUE QUE VOCÊ MULTIPLICOU POR SEIS, DIEGO?  
 DIEGO – POR CAUSA DOS ALUNOS AQUI (APONTANDO PARA A TÁBUA).  
 P – MAS O HERINALDO TÁ DIZENDO QUE NÃO CONCORDA PORQUE TÁ MULTIPLICANDO ALUNO POR ALUNO, NÃO É ISSO? O QUE VOCÊS ACHAM?  
 DISCUTEM ENTRE SI E COMEÇAM A FAZER CÁLCULOS COM OS NÚMEROS ALEATORIAMENTE (42 X 6; 4 X 6, POR EXEMPLO). A PESQUISADORA ADVERTE-OS:  
 P – VOCÊS TÊM QUE PENSAR O PORQUÊ DOS NÚMEROS QUE VOCÊS ESTÃO MULTIPLICANDO.  
 DIEGO CALCULA 42 VEZES SEIS E DIZ.  
 DIEGO – DÁ 252.  
 DEMONSTRA NÃO ACEITAR A RESPOSTA COMO CORRETA.  
 P – POR QUE QUE VOCÊ ACHA QUE NÃO É ESSA RESPOSTA, DIEGO?  
 DIEGO – É MUITO!  
 P – MUITO SALGADO? É?  
 DIEGO – É. PRA TRINTA ALUNOS?

**Quadro 6.48:** Diálogo do G3 durante a atividade 5A – raciocínios errôneos em questão envolvendo a “inferência”

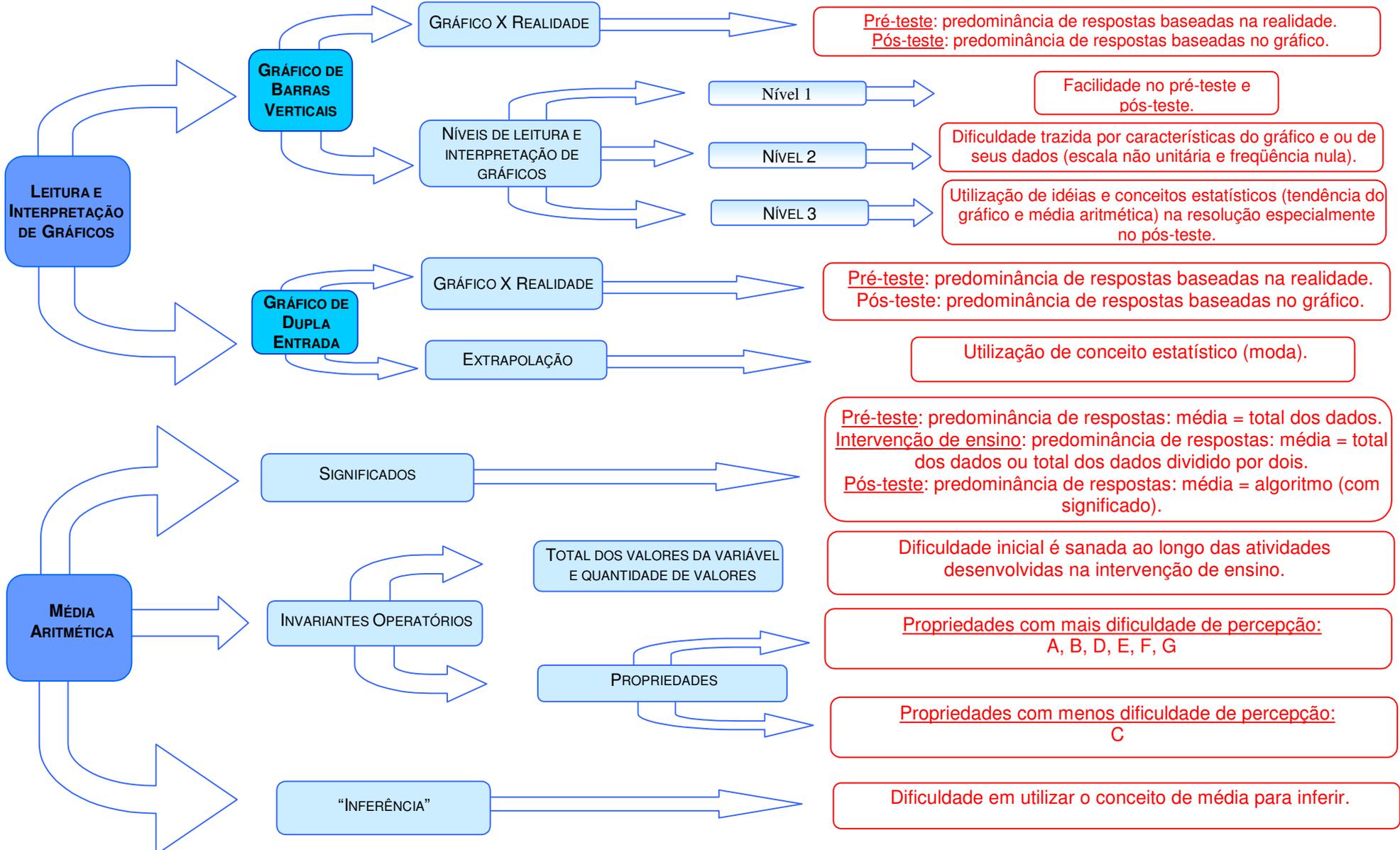
Na linha 1, observamos que o aluno Diego relaciona erroneamente, a quantidade de alunos (6) fornecida no gráfico com a quantidade de alunos da classe toda (30), uma vez que o problema solicita a quantidade de salgadinhos e não de alunos.

O raciocínio do Diego é, imediatamente, rejeitado por Herinaldo, na linha 3, percebendo o erro do colega, passando a efetuar cálculos multiplicativos com os dados referentes a alunos e a salgadinhos, porém, de maneira aleatória, sem entenderem o porquê. Ressaltamos que os alunos, ainda que escolhendo raciocínio não pertinente à situação colocada, ponderam, na linha 18, sobre o resultado de seus cálculos, verificando se a resposta encontrada é possível ou não, por tratar-se de uma previsão.

Os resultados apesar de apontarem a dificuldade dos alunos na resolução de problemas desse tipo, revelam também a importância e a possibilidade de ensinarmos a Estocástica desde as séries iniciais, uma vez que percebemos a idéia do provável, sendo trabalhada pelos alunos e a busca da coerência entre dados fornecidos e resultados encontrados e ou entre resultados e realidade.

A seguir, o quadro-resumo mostra as evidências observadas na análise qualitativa dos dados, de acordo com as categorias utilizadas na mesma

PRINCIPAIS EVIDÊNCIAS DA ANÁLISE QUALITATIVA DOS DADOS



Quadro 6.48: Quadro-resumo das principais evidências da análise qualitativa dos dados

# **CAPÍTULO VII**

## **CONCLUSÃO**

# CAPÍTULO VII

## CONCLUSÃO

### 7.1 – Introdução

No presente capítulo, faremos o fechamento do estudo apresentando nossas conclusões tendo por base a análise dos dados. Buscando uma apresentação sintética e objetiva de nossas idéias conclusivas, dividiremos este capítulo em quatro partes, sendo a primeira um breve relato da trajetória de nosso estudo. A segunda parte, faz uma síntese dos principais resultados obtidos tanto na aplicação dos instrumentos diagnósticos como na intervenção de ensino. Na terceira parte, responderemos às questões de pesquisa tendo como base a análise dos resultados e as idéias teóricas por nós relatadas. E, por fim, apresentaremos algumas sugestões para futuras pesquisas sobre o tema.

### 7.2 – A trajetória do estudo

Nossa pesquisa teve como objetivo investigar o desenvolvimento da leitura e interpretação de gráficos, bem como do conceito de média aritmética, em crianças da 4ª série do Ensino Fundamental, por meio de uma intervenção de ensino com o uso de material manipulativo.

Para atingirmos o objetivo proposto, percorremos um longo caminho, o qual se iniciou pela problematização e elaboração da questão de pesquisa (capítulo I). Tendo em vista os dois objetos de estudo de nossa pesquisa, a saber:

a leitura e interpretação de gráficos e o conceito de média aritmética, passamos ao levantamento de pesquisas referentes a esses dois temas.

Dentre os estudos lidos, teve particular interesse aquele desenvolvido por Curcio (1987), que propõe uma classificação para questões, envolvendo a leitura e interpretação de gráficos restrita a três níveis e que apresentam um grau de dificuldade crescente. O primeiro nível trata de questões mais simples que solicitam a obtenção de informações explícitas no gráfico; as questões de nível 2 não apenas requerem a extração de dados do gráfico, como também exigem a integração e comparação dos mesmos por meio de habilidades e conceitos matemáticos. No último nível, encontram-se as questões de inferência, solicitando informações não contidas diretamente no gráfico, porém extraídas de seus dados.

Outro estudo bastante relevante trata das sete propriedades da média aritmética apresentadas por Strauss e Bichler (1988). Tais propriedades abordam diferentes aspectos desse conceito – o estatístico (relativo à média como função matemática); o abstrato (relativo a valores não-observados) e o representativo de um conjunto de dados. Na busca de entendermos a proposta, que o sistema educacional brasileiro faz para o estudo desses temas nas séries iniciais, procedemos a uma análise da abordagem dos mesmos feita pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (1<sup>a</sup> a 4<sup>a</sup> séries) – volume 3 – Matemática. Este documento evidencia a relevância do ensino da leitura e interpretação de gráficos desde as séries iniciais, relacionando-o à construção da cidadania, mas traz poucas referências quanto ao conceito de média. Uma delas refere-se à sua utilização, como ferramenta para compreensão de fatos e outra ao ensino tanto de seu cálculo como de sua interpretação.

Procedemos ainda à apresentação do conceito de média aritmética, sob o ponto de vista da Estatística (capítulos II e III). Além da classificação dos níveis de leitura e interpretação de gráficos de Curcio e das propriedades da média aritmética de Strauss e Bichler, descritas, respectivamente, nos capítulos II e III, nosso estudo buscou fundamentação em duas teorias psicológicas – a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e a idéia de abstração reflexionante de Piaget (capítulo IV).

Baseando-nos também na definição de campo conceitual apresentada por Vergnaud, tomamos o “Tratamento da Informação”, como um campo conceitual, envolvendo os nossos dois objetos de estudo – a leitura e interpretação de gráficos e o conceito de média aritmética. Especificamos os três elementos da tríade (S - situações, I – invariantes operatórios, R – representações simbólicas) de cada conteúdo os quais, segundo o autor, constituem o conceito e apresentam estreitas interligações em sua formação.

A idéia de abstração reflexionante de Piaget propõe dois níveis de abstração na obtenção do conhecimento – abstração empírica (a que se apóia nos objetos) e abstração reflexionante (apóia-se nas atividades cognitivas do sujeito). Neste segundo nível, o autor distingue dois subníveis: abstração pseudo-empírica (abstração de propriedades, a partir dos objetos, introduzidas nos mesmos pela atividade do sujeito, portanto, ainda requer a manipulação) e abstração refletida (envolve conscientização do raciocínio utilizado e formalização do conceito).

Estes três níveis de abstração podem estar relacionados com os níveis de desenvolvimento infantil do mesmo autor – sensório motor, operacional e formal. Em nosso estudo, servimo-nos da idéia de abstração pseudo-empírica,

tendo em vista a inclusão de nossos sujeitos no nível operacional concreto (que necessita de manipulação) e uso de material manipulativo. Pela sustentação dessas idéias teóricas, planejamos a pesquisa de campo que se constituiu da aplicação de instrumentos diagnósticos (pré-teste e pós-teste) em dois grupos pesquisados – GE e GC – e de uma intervenção de ensino baseada em resolução de problemas, propostos em fichas de atividades, aplicadas apenas no GE em período intermediário entre a aplicação do pré-teste e do pós-teste. Nesta intervenção, utilizamos material manipulativo que se compunha de uma placa de metal, na qual foram fixados dois eixos perpendiculares e de um conjunto de ímãs de diferentes cores e formas, com os quais os alunos construíam os gráficos (capítulo V).

De posse dos resultados obtidos das crianças, baseados em suas respostas às questões dos instrumentos diagnósticos e das fichas de atividades, procedemos a análise dos dados (capítulo VI), cuja síntese encontra-se na seção a seguir.

### 7.3 – Síntese dos principais resultados

Nesta seção, sintetizamos os principais resultados obtidos no capítulo da análise dos dados, considerando os dois focos da – a leitura e interpretação de gráficos e o conceito de média aritmética.

Com relação à leitura e interpretação de gráficos, pontuaremos, inicialmente, a respeito do gráfico de barras verticais. Tendo em vista os níveis de leitura e interpretação de gráficos propostos por Curcio (1987), observamos que a questão classificada no nível 1, na qual solicitávamos a quantificação de uma categoria do gráfico, não apresentou dificuldades aos alunos.

Já as quatro questões do nível 2, que requeriam a identificação de pontos de máximo e de mínimo, ainda que sendo de um nível intermediário, evidenciaram um maior grau de dificuldade em situações específicas como, por exemplo, quando o gráfico utilizava uma escala não unitária e ou quando os dados do gráfico traziam uma categoria com frequência de valor zero.

Na primeira situação (escala não unitária), o aluno tinha dificuldade para identificar o invariante operatório “quantificação de categorias” que, por sua vez, dificultava a “composição de grupos”. Na segunda situação (presença de frequência nula), a identificação do invariante “localização de ponto de mínimo” tornava-se confusa para o aluno, uma vez que encontramos a indicação da frequência nula e da menor frequência diferente de zero como ponto de mínimo do gráfico.

Na questão referente ao nível 3, que solicitava uma previsão baseada nos dados do gráfico, os alunos consideraram a tendência desses dados em suas respostas, desde o pré-teste e no pós-teste alguns chegaram a utilizar a média aritmética para responderem a questão.

As atividades que requeriam a leitura e interpretação do gráfico de dupla entrada, não apresentaram problemas ao aluno. Em uma das atividades da intervenção de ensino, em que havia uma questão de extrapolação, baseada em dados de um gráfico de dupla entrada, observamos o uso do conceito estatístico de moda.

Encontramos, tanto em questões utilizando um gráfico de barras verticais, como em um gráfico de dupla entrada, justificativas baseadas na realidade do aluno ou em seu cotidiano, desconsiderando total ou parcialmente os dados do gráfico.

Quanto ao conceito de média aritmética, no pré-teste, os dados demonstraram que a maioria dos alunos tinha como sinônimo de média aritmética o valor total dos dados do gráfico ou o valor assumido pela variável na barra ou categoria localizada no meio do gráfico (idéia semelhante ao conceito de mediana). Já, no pós-teste, quase 50% dos alunos obtiveram êxito no cálculo da média aritmética e alguns, inclusive, chegaram a discriminar os invariantes operatórios da mesma em suas justificativas, o que nos leva a pensar que houve aprendizagem significativa.

Durante o desenvolvimento da intervenção de ensino, os alunos demonstraram, inicialmente, dificuldade para identificar os invariantes operatórios da média aritmética – total dos valores da variável e quantidade desses valores - sendo tal dificuldade superada ao longo do trabalho de intervenção.

Quanto aos invariantes – propriedades –, a de mais fácil percepção por parte dos alunos foi a “C” (o valor médio pode ser influenciado pelos valores de cada um dos dados). A propriedade que os alunos mostraram maior dificuldade de aceitação, foi a F (tem-se que ter em conta os valores nulos no cálculo da média). A propriedade E (a média pode ser uma fração que não tenha equivalente na realidade física), mesmo não tendo sido incluída nas situações apresentadas aos alunos por nós, foi abordada por diversas vezes a partir de situações colocadas pelos mesmos. Já a propriedade G (o valor médio é representativo dos valores mediados), ainda que trabalhada em três atividades da intervenção, mencionadas como atividades de “inferência”, apresentou um elevado grau de dificuldade.

Percebemos que os alunos consideravam a necessidade de coerência entre as respostas dadas a essas questões e os dados fornecidos e ou entre a

realidade e essas respostas. Notamos ainda a idéia do “provável”<sup>1</sup> sendo trabalhada pelos alunos.

Considerando nossa interpretação dos resultados obtidos no experimento, sentimo-nos aptos a responder nossa questão de pesquisa na seção a seguir.

#### 7.4 – Respostas às questões de pesquisa

*QUAIS AS CONTRIBUIÇÕES DE UMA INTERVENÇÃO DE ENSINO COM O USO DE MATERIAL MANIPULATIVO PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE CONCEITOS ELEMENTARES DE ESTATÍSTICA NAS SÉRIES INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL?*

Antes de respondermos à questão central explicitada acima, faremos às duas questões subjacentes específicas propostas no capítulo I, com o objetivo de fornecer subsídios para que possamos responder a esta questão mais ampla.

↳ *Quais as relações que existem entre leitura e interpretação de gráficos e o conceito de média aritmética?*

Tendo em vista que os dados para o cálculo da média aritmética foram fornecidos por meio de uma representação gráfica, a leitura e interpretação desta tornou-se condição necessária para o desenvolvimento do conceito de média aritmética.

---

<sup>1</sup> A idéia de “provável” em oposição à idéia de resposta determinista (certa ou errada), uma vez que se tratava da resposta a uma previsão, antes, podendo tal resposta estar mais próxima ou mais distanciada do resultado específico daquela situação.

Independente da estratégia escolhida pelo aluno para o cálculo da média aritmética, a identificação dos invariantes operatórios desse conceito – total dos valores da variável e quantidade desses valores – que eram extraídos do gráfico, constituiu-se em um passo primordial no processo de formação de tal conceito.

Portanto, apontamos como um dos principais e mais importantes fatores para o estabelecimento das relações entre leitura e interpretação de gráficos e média aritmética, a identificação dos dados apresentados pelo gráfico para a resolução da situação problema envolvendo média aritmética.

Outros fatores, também, mostraram-se elementos contribuintes para o estabelecimento dessas relações, que foram identificados por nós em situações específicas, nas quais o gráfico utilizado possuía algumas características particulares.

O primeiro fator trata-se de dados apresentados em um gráfico com escala não unitária (não graduada de uma a uma unidade). Percebemos que a dificuldade dos alunos na leitura desse tipo de escala influenciou na identificação dos invariantes operatórios da média aritmética, uma vez que a mesma dificultou a quantificação das categorias. A observação relaciona-se apenas ao gráfico de barras verticais, uma vez que o gráfico de dupla entrada não utiliza escala.

Um outro fator foi a freqüência nula, que apareceu em uma situação, na qual um dos dados do gráfico era zero. A freqüência nula em uma das categorias do gráfico dificultou a observância, por parte do aluno, de outro invariante operatório da média aritmética – a propriedade na qual tem-se que levar em conta os valores nulos no cálculo da média -, uma vez que os alunos desconsideravam esta categoria no cálculo da média aritmética.

Quanto ao tipo de gráfico, nossos resultados apontam que, em um gráfico de dupla entrada, a identificação do eixo da variável que estava sendo mediada (eixo horizontal ou eixo vertical), foi condição *“si ne qua non”* para o cálculo da média aritmética, uma vez que um gráfico desse tipo apresenta dados de duas diferentes variáveis, uma em cada eixo. Sendo a determinação do eixo da variável mediada, um passo necessariamente anterior à identificação dos invariantes operatórios da média aritmética, a leitura e interpretação desse tipo de gráfico interferiu no desenvolvimento do conceito de média aritmética.

Logo, temos indícios de relações particulares entre leitura e interpretação de gráficos e média aritmética influenciadas por situações específicas, referentes ao tipo de escala (não-unitária) de um gráfico de barras verticais, ao conjunto de dados fornecidos pelo gráfico (presença de frequência nula) e ao tipo de gráfico (de dupla entrada) utilizado.

Ressaltamos que as atividades de intervenção de ensino propostas por nós tiveram influência na formação dessas relações entre leitura e interpretação de gráficos e média aritmética, uma vez que, por meio delas, diferentes situações, utilizando distintas representações, de ambos os conteúdos eram desenvolvidas com os alunos, permitindo a percepção dos invariantes operatórios dos mesmos, bem como suas relações.

Para Vergnaud, um conceito é definido como uma tríade que envolve um conjunto de situações, um conjunto de invariantes operatórios e um conjunto de representações simbólicas, e esses três elementos inte-relacionam-se em um mesmo campo conceitual. No campo conceitual – “Tratamento da Informação” – objeto de nosso estudo, não só observamos a inter-relação entre os três elementos constituintes dos conteúdos leitura e interpretação de gráfico e média

aritmética, como também as intrínsecas relações entre um elemento de um dos conteúdos com outro elemento de outro conteúdo, ou seja, as tríades entrelaçam-se, no processo de formação do conceito.

Pudemos observar, por exemplo, em *situações* em que o tipo de escala (não unitária) utilizada no gráfico de barras verticais, os dados do gráfico (presença da frequência nula), bem como o tipo de *representação gráfica* (gráfico de dupla entrada) influenciaram na identificação dos *invariantes operatórios* do conceito de média aritmética.

} *Quais estratégias são facilitadas pelo material manipulativo para desenvolvimento dos conceitos elementares de Estatística em alunos das séries iniciais?*

Considerando os dois objetos de estudo de nossa pesquisa, ou seja, o desenvolvimento da leitura e interpretação de gráficos e a média aritmética, dividiremos nossa resposta para esta questão em duas partes, como segue abaixo:

a) *Quais as estratégias que são facilitadas pelo material manipulativo para o desenvolvimento de leitura e interpretação de gráficos em alunos das séries iniciais?*

Quanto à leitura e interpretação de gráficos de barras verticais, o material manipulativo possibilitou o uso da contagem um a um dos ímãs na quantificação das categorias do gráfico, uma vez que cada ímã representava uma unidade.

Desta forma, não foi necessário remeter-se à escala, tal estratégia foi transferida ao contexto do papel e lápis em situação de gráfico de barras verticais convencional. Para isto o aluno necessitou seccionar as barras. Mas, ao contrário da situação no material manipulativo, a escala necessariamente foi considerada, pois a seção foi efetuada, tendo como padrão sua unidade.

Salientamos que a intervenção de ensino muito contribuiu para que os alunos conseguissem fazer essa transferência de conhecimento de um contexto para o outro, pois, durante as atividades da intervenção de ensino, solicitamos, por diversas vezes, que os mesmos atentassem para a escala que estava sendo utilizada. Para tanto, recorreremos ao uso da régua (para relacionar a altura da barra do gráfico construído com o número colocado na escala, ambos no material manipulativo) e ao “desenho” (no qual, inicialmente, os alunos representavam barras de mesma quantidade com alturas diferentes, sem qualquer relação com a escala).

Outro elemento que contribuiu para que os alunos considerassem a escala de um gráfico e percebessem que a mesma se constitui em um de seus principais elementos, foi o uso de escalas de diferentes graduações (de uma a uma unidade, de duas a duas, de três a três e escalas escolhidas pelos próprios alunos) nas atividades da intervenção. O trabalho proporcionou, inclusive, o desenvolvimento de outro conceito matemático envolvido na leitura de escalas de gráfico – a proporcionalidade.

Mais uma vez, esses dados relacionam-se com a teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, quando consideramos que o processo de formação de conceito requer um conjunto de situações, que envolvem vários tipos de

conceitos, procedimentos e representações simbólicas que estão conectados uns aos outros.

Observamos que, ao seccionar as barras de um gráfico de barras verticais o aluno abstrai o conceito de unidade por meio de uma abstração pseudo-empírica, pois sua ação sobre o objeto (representação gráfica) é que dá a este uma característica não inerente ao mesmo – barras subdivididas de uma a uma unidade – da qual ele abstrai um conceito.

Na leitura e interpretação de gráficos, a quantificação de categorias constitui-se em invariante operatório basilar, uma vez que a mesma é necessária na identificação dos outros invariantes operatórios da leitura e interpretação de gráficos – localização de ponto de máximo e ou mínimo; composição de grupos e comparação de categorias.

- b) Quais as estratégias que são facilitadas pelo material manipulativo para o desenvolvimento do conceito de média aritmética em alunos das séries iniciais?

No desenvolvimento do conceito de média aritmética, a estratégia facilitada pelo material manipulativo foi a da redistribuição, na qual os alunos redistribuíam a quantidade total dos ímãs (representando o total dos valores da variável) de maneira eqüitativa entre as categorias do gráfico (representando a quantidade desses valores). Esta quantidade eqüitativa foi relacionada com o valor da média aritmética. Tal estratégia foi proposta por nós durante a intervenção de ensino.

Em um gráfico de barras verticais convencional, esta estratégia foi utilizada após a seção das barras em unidades (relacionando cada unidade a um

ímã). Cada “pedaço” de barra era então redistribuído, construindo-se um outro gráfico em que todas as barras apresentavam a mesma altura, sendo a quantificação dessa barra relacionada com o valor da média aritmética.

Na leitura e interpretação de gráficos, pontuamos aqui a presença da abstração pseudo-empírica de Piaget na ação do aluno sobre o gráfico (objeto) reconstruindo-o e dando-lhe uma outra caracterização da qual abstrai o conceito de média aritmética.

Em um gráfico de dupla entrada, a aplicação da estratégia da redistribuição requereu a observância do eixo da variável a ser mediada.

Retornemos à nossa questão de pesquisa central:

*QUAIS AS CONTRIBUIÇÕES DE UMA INTERVENÇÃO DE ENSINO COM O USO DE MATERIAL MANIPULATIVO PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE CONCEITOS ELEMENTARES DE ESTATÍSTICA NAS SÉRIES INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL?*

Podemos concluir que nossa intervenção de ensino com o uso de material manipulativo contribuiu para o ensino-aprendizagem de conceitos elementares de Estatística a alunos das séries iniciais do Ensino Fundamental, ao proporcionar-lhes diferentes situações que requeriam tanto a habilidade de leitura e interpretação de gráficos como o conhecimento de média aritmética.

Estas situações possibilitaram a percepção dos invariantes operatórios de ambos os conteúdos abordados. As atividades da intervenção de ensino caracterizaram-se ainda por utilizarem diferentes representações gráficas (gráfico de barras verticais pictórico e gráfico de dupla entrada). O material manipulativo

teve papel fundamental ao propiciar o desenvolvimento de estratégias para a resolução das situações problema, estratégias essas que foram transferidas para outras situações propostas no pós-teste, ou seja, situações a serem resolvidas apenas no contexto de papel e lápis (sem o uso de material manipulativo) e empregando gráficos de barras verticais convencionais, isto é, não pictóricos.

A interligação entre os dois conteúdos – leitura e interpretação de gráficos e média aritmética – foi possível por meio de atividades, em que a leitura e interpretação de gráficos encontrava-se subjacente ao desenvolvimento do conceito de média aritmética. Esta interligação gerou estreitas relações entre a tríade proposta por Vergnaud (situações – S, invariantes operatórios – I, representações simbólicas – R) de cada conteúdo, ampliando assim o campo conceitual referente ao “Tratamento da Informação” do aluno.

Portanto, concluímos que a associação da intervenção de ensino com o material manipulativo possibilitou tanto as abstrações reflexionantes necessárias à obtenção do conhecimento como as relações entre os elementos dos conceitos estudados que permitem a ampliação de um campo conceitual.

## 7.5 – Sugestões para futuras pesquisas

O presente estudo caracterizou-se por trabalhar conceitos elementares de Estatística com alunos da 4ª série do Ensino Fundamental de uma determinada escola da região central de São Paulo, utilizando material manipulativo específico. Pelas características particulares do trabalho, consideramos que os resultados não têm caráter generalizador, pelo contrário, restringem-se a seu contexto.

Sugerimos, portanto, um trabalho com alunos de duas ou três escolas distintas e com maior tempo de aplicação do material manipulativo, a fim de observar o alcance dessa ferramenta. Outra sugestão seria trabalhar não com classes completas, mas sim, com pequenos grupos de cada classe. Em tal pesquisa perdas ocorridas do ponto de vista da educação poderiam ser compensadas pelos ganhos do ponto de vista psicológico, uma vez que o trabalho com grupos pequenos permitiria melhor observação das estratégias e do raciocínio utilizados pelos alunos na resolução das situações-problema, enquanto a pesquisa desenvolvida com classes completas revelar-nos-iam aspectos do ensino-aprendizagem relacionados à realidade de nossas escolas.

Este nosso envolvimento com o tema conceitos elementares de Estatística levou-nos a pensar em outros importantes focos de pesquisa sobre o mesmo.

Tendo como foco a estocástica, sugerimos uma pesquisa intervencionista com crianças das séries iniciais com ou sem o uso de ferramentas específicas, objetivando estudar as relações feitas pelas mesmas entre a Estatística descritiva e a Estatística inferencial, uma vez que observamos a possibilidade de trabalharmos a Estocástica com alunos deste nível de ensino.

Considerando a importância das relações entre diferentes conceitos sugerimos uma pesquisa que aborde a diferenciação entre as três medidas de tendência central (média, moda e mediana) com ou sem material manipulativo e envolvendo ou não a leitura e interpretação de gráficos.

Esses são alguns aspectos do vasto campo da pesquisa voltada ao “Tratamento da Informação”. Nossas sugestões não esgotam as possibilidades de

que mentes aguçadas e pesquisadores apaixonados pela Educação Matemática possam explorar.

**CAPÍTULO VIII**

**REFERÊNCIAS**

**BIBLIOGRÁFICAS**

## CAPÍTULO VIII

### Referências Bibliográficas

BATANERO, C. et al. 1992. **Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales.** Disponível em: <<http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/CULTURA.pdf>> Acesso em: 19 out. 2002.

BATANERO, C. 2000a. **¿Hacia dónde va la Educación Estadística?** Disponível em: <<http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/BLAIX.htm>> Acesso em: 19 out. 2002.

\_\_\_\_\_. 2000b. **Significado y comprensión de las medidas de posición central.** Disponível em: <<http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/CULTURA.pdf>> Acesso em: 19 out. 2002.

\_\_\_\_\_. **Didáctica de la Estadística.** Granada: Servicio de reprografía de la Facultad de Ciencias, Universidade de Granada, 2001. Disponível em: <<http://www.ugr.es/~batanero/proyecto.html>> Acesso em: 19 out. 2002.

BERTIN, J. **Semiology of graphics.** Madison: University of Wisconsin Press, 1983.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais (1ª a 4ª série) Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais (5ª a 8ª série) Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CAI, J. Beyond the computational algorithm: students' understanding of the arithmetic average concept. In: Proceedings of the 19<sup>nd</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education - PME, 19, 1995, Recife. **Anais do Proceedings of the 19<sup>nd</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education – PME**. v. 3, p. 145-151.

CAMPBELL, D. T.; STANLEY, J. C. **Experimental and quasi-experimental designs for research**. Chicago: Rand McNally & Company, 1972.

CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A.; NEMIROVSKY, R. **Graphing Form Everyday Experience, Hands on!** 18 (2), 1995.

CARSWELL, C M. **Choosing specifiers: An evaluation of the basic tasks model of graphical perception**. Human Factors, 34, 535-554, 1992.

CAZORLA, I. M. **A relação entre a habilidade viso-pictórica e o domínio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos**. Campinas, 2002. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Estadual de Campinas.

CRESPO, A. A. **Estatística Fácil**. São Paulo: Saraiva, 2002.

CURCIO, F. R. Comprehension of Mathematical Relationships Expressed in Graphs. **Journal for Research in Mathematics Education**, New York, v. 18, n. 5, p. 382-393, nov. 1987.

FRANCHI, A. Considerações sobre a Teoria dos Campos Conceituais. In: Machado, S. D. A. et al. **Educação Matemática Uma Introdução**. São Paulo: EDUC, 1999. p. 155-195.

FRIEL, S. N; CURCIO, F. R.; BRIGHT, G. W. Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehension and Instructional Implications. **Journal for Research in Mathematics Education**, New York, v. 32, n. 2, p. 124-158, mar. 2001.

GUIMARÃES, G. **Interpretando e Construindo Gráficos de Barras**. Recife, 2002. Tese (Doutorado em Psicologia Cognitiva), Universidade Federal de Pernambuco.

GUIMARÃES, G. L.; FERREIRA, V. G. G.; ROAZZI, A. 2001. **Interpretando e Construindo Gráficos**. Disponível em:

<<http://www.anped.org.br/24/tp1.htm#gt19,2001>> Acesso em: 19 ago. 2003.

LOPES, C. A. E. **A Probabilidade e a Estatística no Ensino Fundamental: uma análise curricular**. Campinas, 1998. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.

\_\_\_\_\_. **O Conhecimento Profissional dos Professores e suas Relações com Estatística e Probabilidade na Educação Infantil.** Campinas, 2003. Dissertação (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.

MCKNIGHT, C. C. Critical evaluation of quantitative arguments. In: KULM, G. (Ed.). **Assessing higher order thinking in mathematics.** Washington, DC: American Association for the Advancement of Science, 1990. p. 169-185.

MAGINA, S; MARANHÃO, M. Using database to explore students' conceptions of mean and cartesian axis. In: Proceedings of the 22<sup>nd</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education - PME, 22, 1998, África do Sul. **Anais do Proceedings of the 22<sup>nd</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education – PME.** v. 4, p. 272.

MAGINA, S. et al. **Repensando Adição e Subtração Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais.** São Paulo: PROEM, 2001.

MEVARECH, Z. R. A deep structure model of students statistical misconceptions. **Education Studies in Mathematics.** Boston, v. 14, n. 4, p. 415-429, 1983.

MOKROS, J. RUSSELL, S. J. Children's Concepts of Average and Representativeness **Journal for Research in Mathematics Education.**, New York, v. 26, p. 20-39, jan. 1995.

MONTANGERO, J.; MAURICE-NAVILLE, D. **Piaget ou a inteligência em evolução sinopse cronológica e vocabulário**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

MONTEIRO, C. E. F. **Interpretação de gráficos sobre economia veiculados pela mídia impressa**. Recife, 1999. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva), Universidade Federal de Pernambuco.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática Uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PIAGET, J. **Epistemologia Genética**. São Paulo: Martins Fontes, 1990.

\_\_\_\_\_; Colaboradores. **Abstração reflexionante relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

\_\_\_\_\_; GARCÍA, R. **Psicogénesis e historia de la ciencia**. México: Siglo XXI Editores, 1984.

\_\_\_\_\_; INHELDER, B. **A Psicologia da Criança**. São Paulo: Bertrand, 1995.

RUDIO, F. V. **Introdução ao projeto de pesquisa científica**. Petrópolis: Vozes, 1986.

SANTOS, S. S. **A Formação do Professor Não Especialista em Conceitos Elementares do Bloco Tratamento da Informação – Um estudo de Caso no Ambiente Computacional.** São Paulo, 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica.

SANTOS, S. S.; MAGINA, S. Quando os dados advindos da realidade cotidiana fazem sentido na interpretação de gráficos? **Revista Brasileira de Tecnologia Educacional**, Rio de Janeiro, ano XXIX, nº 152/153, 2001.

SCHLIEMANN, A.; CARRAHER, D. W.; CARRAHER, T. N. **Na vida dez, na escola zero.** São Paulo: Cortez, 2001.

SELVA, A. C. V. **Gráficos de Barras e Materiais Manipulativos: Analisando Dificuldades e Contribuições de Diferentes Representações no Desenvolvimento da Conceitualização Matemática em Crianças de Seis a Oito Anos.** Recife, 2003. Dissertação (Doutorado em Psicologia) – Faculdade de Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco.

STELLA, C. A. **Um estudo sobre o conceito de média com alunos do Ensino Médio.** São Paulo, 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica.

STRAUSS, S.; BICHLER, E. The development of children's concepts of the arithmetic average. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 19, nº 1, p. 64-80, 1988.

TOLEDO, G. L.; OVALLE, I. I. **Estatística Básica.** São Paulo: Atlas, 1995.

VERGNAUD, G. Conclusion. In: Janvier, C. (Ed.). **Problem of Representation in the Teaching and Learning for Mathematics**. New Jersey: LEA – Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 1987. p. 227-232.

\_\_\_\_\_. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990a.

\_\_\_\_\_. Epistemology and Psychology of Mathematics Education. In: Nesher, P.; Kilpatrick, J. (Ed.). **Mathematics and Cognition: a Research Synthesis by the International Group for the psychology of Mathematics Education**. New York: Cambridge University Press, 1990b. p. 14-30.

\_\_\_\_\_. Teoria dos Campos Conceituais. In: Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, 1, 1993, Rio de Janeiro. **Anais do 1º Seminário Internacional de educação Matemática do Rio de Janeiro**. p. 1-26.

\_\_\_\_\_. The nature of mathematical concepts. In: NUNES, T.; BRYANT, P. (Ed.). **Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective**. London: Psychology Press, 1997. p. 5-28.

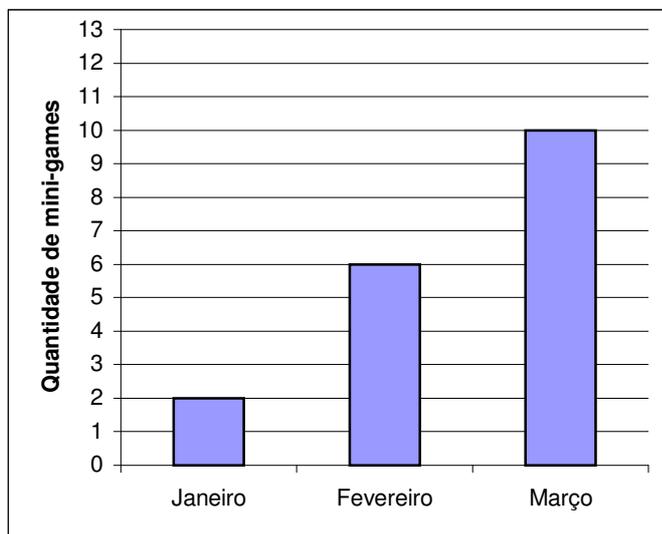
\_\_\_\_\_. A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. **Journal of Mathematical Behavior**. v. 17, n. 2, p. 167-181, 1998.

WAINER, H. Understanding graphs and tables. **Educational Researcher**, 21(1), p. 14-12, 1992.

## Atividades de Gráfico

Nome: \_\_\_\_\_ 4<sup>a</sup> \_\_\_\_\_

1. Chico vende mini-games na praça da República. No gráfico abaixo está representado a quantidade de mini-games que ele vendeu nos meses de janeiro, fevereiro e março.



- a) Em qual mês “seu Chico” vendeu mais mini-games?

\_\_\_\_\_

Por que você acha que ele vendeu mais mini-games neste mês? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- b) Em qual mês “seu Chico” vendeu menos mini-games? \_\_\_\_\_

Por que você acha que ele vendeu menos mini-games neste mês? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- c) “Seu Chico” pediu para seu netinho Luis determinar qual foi sua venda média mensal de mini-games nesses meses. Luis pediu ajuda para seus colegas que responderam:

**RESPOSTA DE LUIS:** SUA VENDA MÉDIA MENSAL É 2 MINI-GAMES.

**RESPOSTA DE ALBERTO:** SUA VENDA MÉDIA MENSAL É 12 MINI-GAMES.

**RESPOSTA DE PAULO:** SUA VENDA MÉDIA MENSAL É 4 MINI-GAMES.

**RESPOSTA DE RUI:** SUA VENDA MÉDIA MENSAL É 6 MINI-GAMES.

**RESPOSTA DE CARLOS:** SUA VENDA MÉDIA MENSAL É 18 MINI-GAMES.

E para você, qual é a resposta correta? \_\_\_\_\_

Como você faria para convencer “seu Chico” que sua resposta está correta? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- d) Se “seu Chico” tivesse vendido 7 mini-games no mês de março, sua venda média mensal nesse período seria a mesma? \_\_\_\_\_

⇒ Se você acha que **SIM**, explique porquê nas linhas abaixo.

⇒ Mas se você acha que **NÃO** escreva nas linhas abaixo qual seria a nova média.

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- e) Observe com atenção o gráfico acima novamente e diga quantos mini-games você acha que “seu Chico” deverá vender em Abril? \_\_\_\_\_

Como você chegou a esta conclusão? \_\_\_\_\_

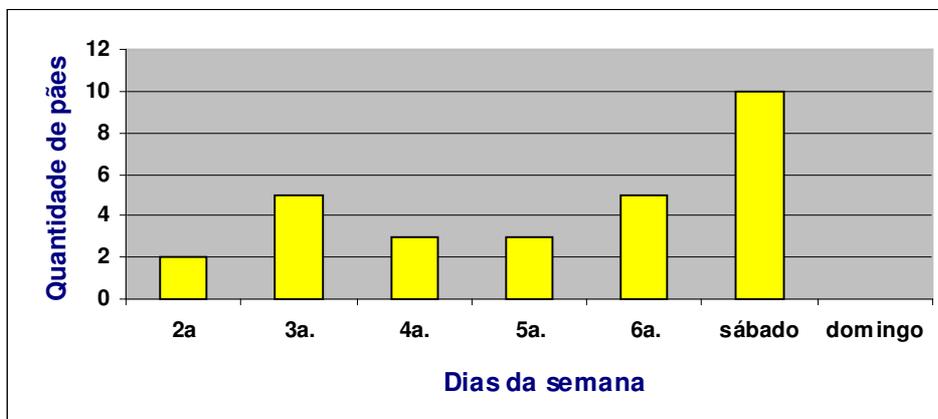
\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

## Atividades de Gráfico

Nome: \_\_\_\_\_ 4<sup>a</sup> \_\_\_\_\_

2) O gráfico abaixo informa o consumo de pães, da família de “seu Chico” durante uma semana.



Lendo as informações no gráfico, responda as seguintes questões:

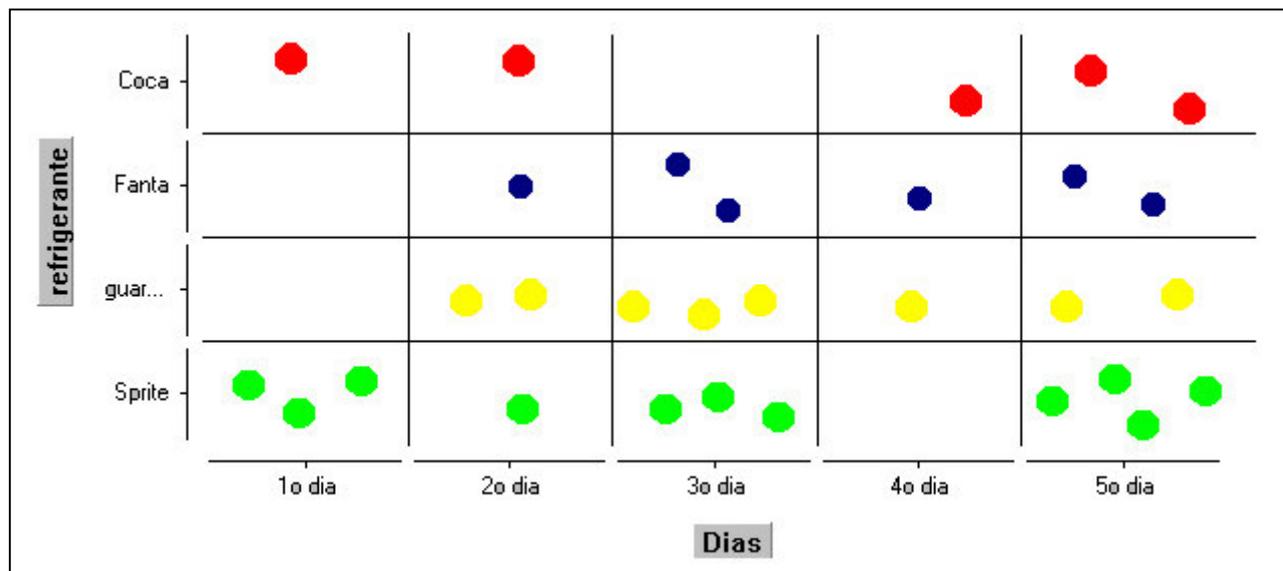
- a) Qual o total de pães consumidos por essa família nessa semana? \_\_\_\_\_
- b) Em que dia o consumo de pães foi **maior**? \_\_\_\_\_
- c) Em que dia o consumo de pães foi **menor**? \_\_\_\_\_
- d) Teve algum dia nessa semana em que não houve consumo de pão pela família do seu Chico? \_\_\_\_\_  
**Se sim**, qual foi esse dia? \_\_\_\_\_
- e) Qual o consumo médio diário de pães dessa família? \_\_\_\_\_.
- f) Que conta você fez para achar esse valor? \_\_\_\_\_

**Espaço para fazer as contas**

Atividades de Gráfico

Nome: \_\_\_\_\_ Idade: \_\_\_\_\_ 4<sup>a</sup> \_\_\_\_\_

3) As crianças da 5<sup>a</sup>. série da escola Caetano de Campos fizeram uma campanha de reciclagem de latinhas de refrigerante. O grupo de Cristina marcou no gráfico abaixo, as latinhas que conseguiram trazer em cada um dos cinco dias da semana.



a) Qual a marca de refrigerante foi menos recolhida pelo grupo durante a semana? \_\_\_\_\_

O que fez você saber que foi essa a marca menos recolhida? \_\_\_\_\_

b) Carlos acha que no 2º dia foram trazidas menos latas de refrigerantes. Você concorda com ele? \_\_\_\_\_

Por que? \_\_\_\_\_

c) Qual o total de latas de refrigerantes trazidas na semana? \_\_\_\_\_

Se alguém disser que sua resposta está errada, como você prova que ela está certa? \_\_\_\_\_

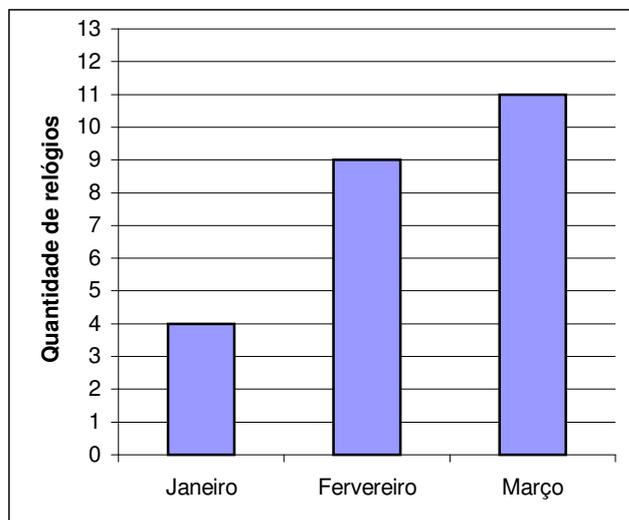
d) Qual a média diária de latas trazidas nesta semana? \_\_\_\_\_

Como você chegou a esta resposta? \_\_\_\_\_

## Atividades de Gráfico

Nome: \_\_\_\_\_ Idade: \_\_\_\_\_ 4<sup>a</sup> \_\_\_\_\_

2. Maria vende relógios na praça da Sé. No gráfico abaixo está representada a quantidade de relógios que ela vendeu nos meses de janeiro, fevereiro e março.



- a) Em qual mês Maria vendeu menos relógios?

Por que você acha que ela vendeu menos relógios neste mês?

- b) Em qual mês Maria vendeu mais relógios?

Por que você acha que ela vendeu mais relógios neste mês?

- c) Maria pediu para sua sobrinha Renata determinar qual foi sua venda média mensal de relógios nesses meses. Renata pediu ajuda para suas colegas que responderam:

**RESPOSTA DE JOANA:** SUA VENDA MÉDIA MENSAL É 4 RELÓGIOS.

**RESPOSTA DE SONIA:** SUA VENDA MÉDIA MENSAL É 8 RELÓGIOS.

**RESPOSTA DE CARMEM:** SUA VENDA MÉDIA MENSAL É 11 RELÓGIOS.

**RESPOSTA DE SILVIA:** SUA VENDA MÉDIA MENSAL É 9 RELÓGIOS.

**RESPOSTA DE CARINA:** SUA VENDA MÉDIA MENSAL É 24 RELÓGIOS.

E para você, qual é a resposta correta? \_\_\_\_\_

Como você faria para convencer Maria que sua resposta está correta? \_\_\_\_\_

- d) Se Maria tivesse vendido 6 relógios no mês de fevereiro, sua venda média mensal nesse período seria a mesma? \_\_\_\_\_

⇒ Se você acha que **SIM**, explique porquê nas linhas abaixo.

⇒ Mas se você acha que **NÃO** escreva nas linhas abaixo qual seria a nova média.

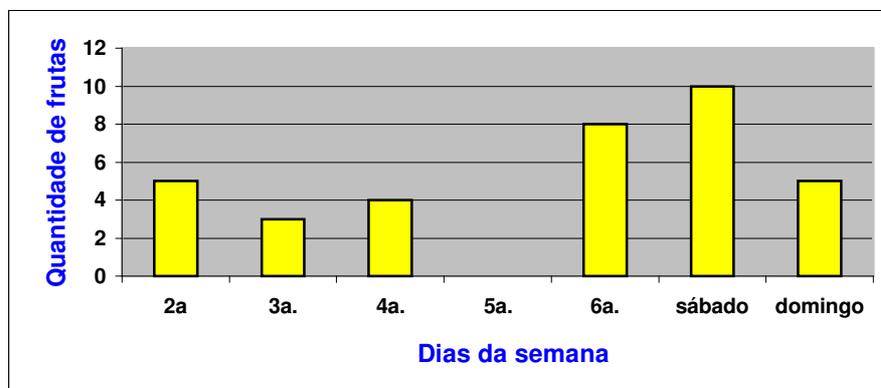
- e) Observe com atenção o gráfico acima novamente e diga quantos relógios você acha que Maria poderá vender em Abril? \_\_\_\_\_

Como você chegou a esta conclusão? \_\_\_\_\_

## Atividades de Gráfico

Nome: \_\_\_\_\_ Idade: \_\_\_\_\_ 4<sup>a</sup> \_\_\_\_\_

1. O gráfico abaixo informa o consumo de frutas, da família de Maria durante uma semana.



Lendo as informações no gráfico, responda as seguintes questões:

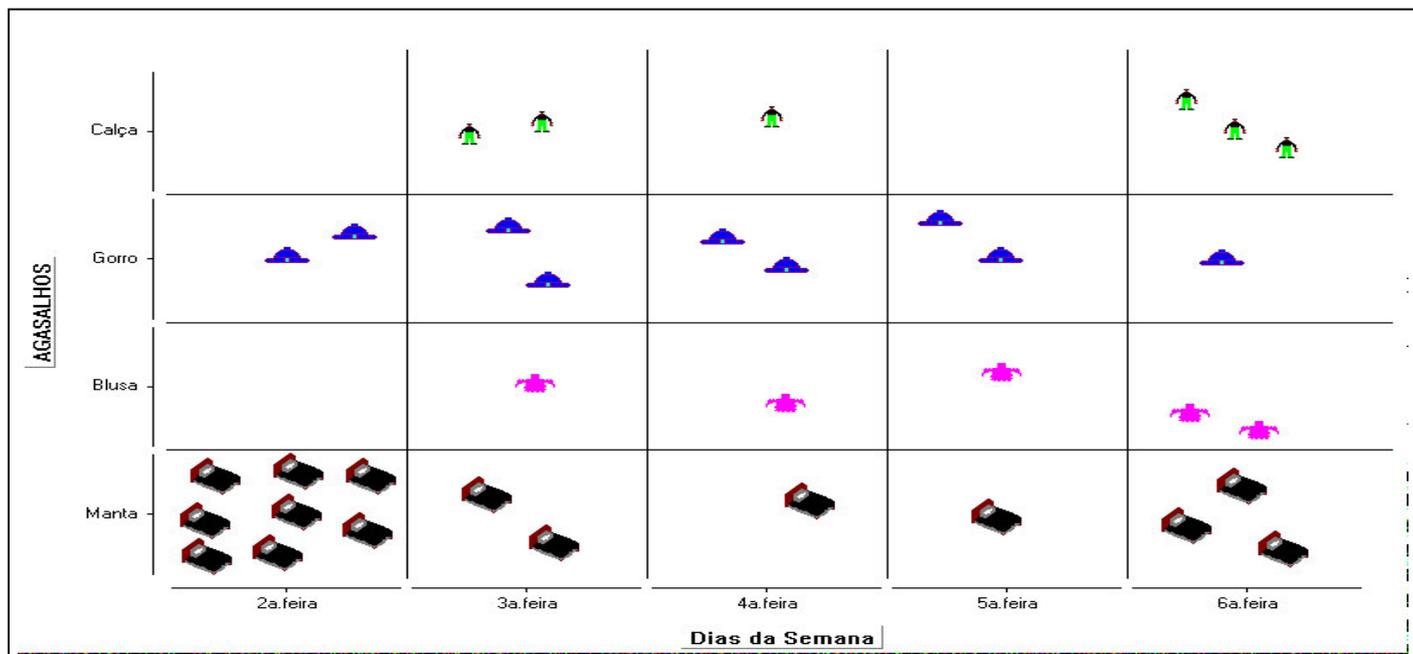
- a) Qual o total de frutas consumidas por essa família nessa semana? \_\_\_\_\_
- b) Em que dia o consumo de frutas foi **maior**? \_\_\_\_\_
- c) Em que dia o consumo de frutas foi **menor**? \_\_\_\_\_
- d) Teve algum dia nessa semana em que não houve consumo de frutas pela família de Maria? \_\_\_\_\_  
**Se sim**, qual foi esse dia? \_\_\_\_\_
- e) Qual o consumo médio diário de frutas dessa família? \_\_\_\_\_
- f) Que conta você fez para achar esse valor? \_\_\_\_\_

**Deixem suas contas aqui!!!**

Atividades de Gráfico

Nome: \_\_\_\_\_ Idade: \_\_\_\_\_ 4<sup>a</sup> \_\_\_\_\_

3. Os alunos da 5<sup>a</sup>. série da escola Caetano de Campos organizaram a Campanha do Agasalho para ajudar às crianças da comunidade. O grupo de Patrícia marcou no gráfico abaixo, os agasalhos que conseguiram trazer em cada um dos cinco dias da semana.



a) Qual o tipo de agasalho que foi menos recolhido pelo grupo durante a semana? \_\_\_\_\_  
 O que você fez para saber que foi esse o tipo de agasalho menos recolhido? \_\_\_\_\_

b) João acha que na 3<sup>a</sup>.feira foram recolhidos menos agasalhos. Você concorda com ele? \_\_\_\_\_  
 Por que? \_\_\_\_\_

c) Qual o total de agasalhos trazidos na semana? \_\_\_\_\_  
 Se alguém disser que sua resposta está errada, como você prova que ela está certa? \_\_\_\_\_

d) Qual a média diária de agasalhos trazidos nesta semana? \_\_\_\_\_  
 Como você chegou a esta resposta? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**ATIVIDADE 1A**

GRUPO \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_  
 NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_  
 NOME \_\_\_\_\_

1) Vocês irão desenvolver várias atividades neste grupo durante alguns encontros. O que vocês acham de se conhecerem melhor?

Anotem na tabela abaixo os dados das pessoas que formam as famílias de todos os alunos de seu grupo. Anotem, também a quantidade de adultos, de crianças, de homens e de mulheres. Não se esqueçam que vocês também fazem parte de suas próprias famílias!

ALUNO	QUANTIDADE DE PESSOAS	QUANTIDADE DE ADULTOS	QUANTIDADE DE CRIANÇAS	QUANTIDADE DE HOMENS	QUANTIDADE DE MULHERES

2) Com os dados desta tabela e utilizando a tábua de gráficos, façam um gráfico que represente a quantidade de pessoas que pertencem à família de cada aluno do seu grupo.

**ATIVIDADE 1B**

GRUPO \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_  
NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_  
NOME \_\_\_\_\_

1) Observando o gráfico que vocês fizeram, respondam às questões abaixo:

a) A família de qual aluno do seu grupo tem mais pessoas? \_\_\_\_\_

Quantas pessoas tem nessa família? \_\_\_\_\_

b) A família de qual aluno do seu grupo tem menos pessoas? \_\_\_\_\_

Quantas pessoas tem nessa família? \_\_\_\_\_

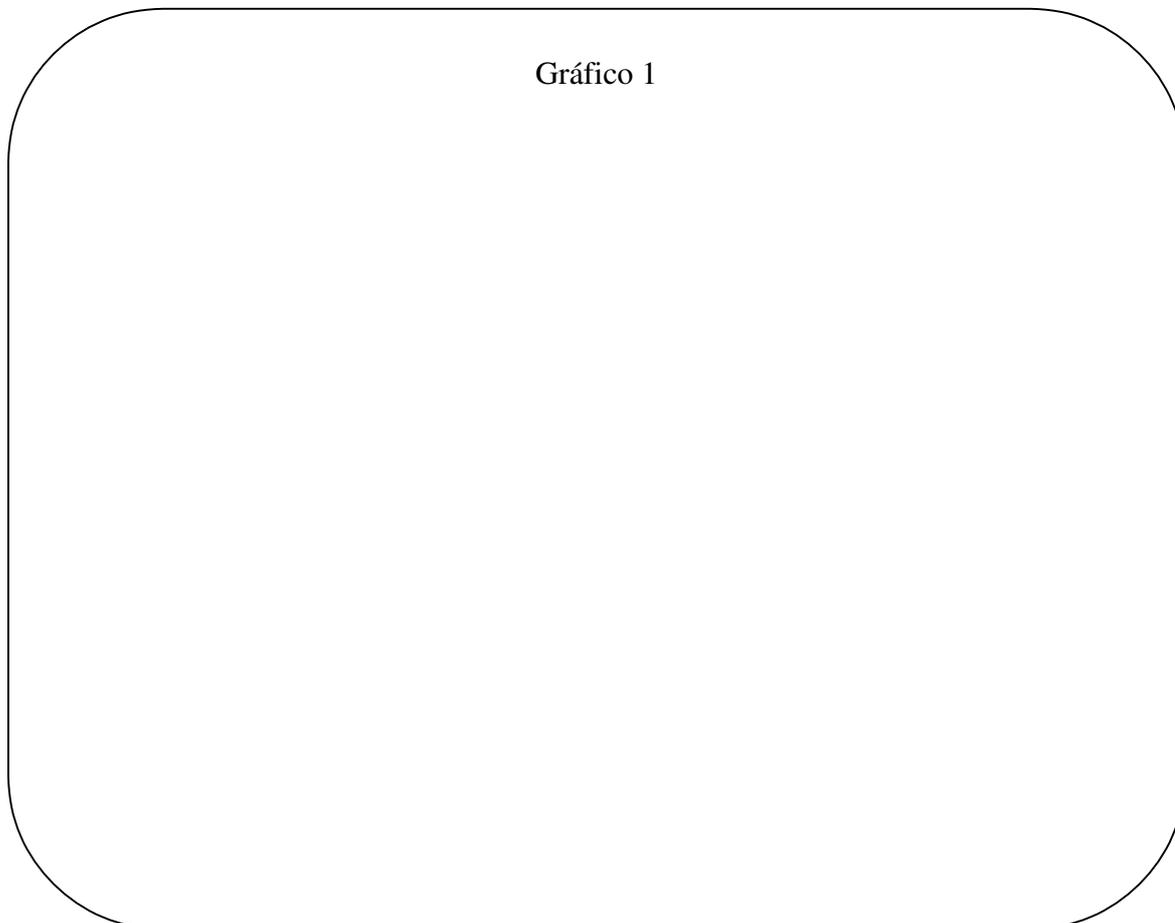
c) Há colegas do seu grupo que têm a mesma quantidade de pessoas na família? \_\_\_\_\_

Se houver, quais são os alunos com a mesma quantidade de pessoas na família?

\_\_\_\_\_

2) Desenhem no retângulo abaixo o gráfico que seu grupo fez na tábua de gráficos.

Gráfico 1



## ATIVIDADE 1C

GRUPO \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_  
NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_  
NOME \_\_\_\_\_

Bom dia! Me desculpem  
pelo atraso. Meu relógio  
não despertou e acabei  
me atrasando!



Como vocês puderam observar, acabou de chegar um aluno um pouco atrasado! Seu nome é “Imaginário”!

- 1) “Imaginário” gostaria de entrar no seu grupo. Como ficaria o gráfico com esse novo aluno, sabendo que ele mora sozinho?
- 2) Desenhem no retângulo abaixo o gráfico incluindo o “Imaginário”.

Gráfico 2

## ATIVIDADE 2A

GRUPO \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_  
NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_  
NOME \_\_\_\_\_

Na festa dos aniversariantes do mês de abril da classe da Professora Carla tinha um “bexigão” cheio de balas. Ao estourar o “bexigão”, cada aluno pegou algumas balas. A tabela abaixo mostra a quantidade de balas pegas por quatro alunos dessa classe.



NOME DO ALUNO	QUANTIDADE DE BALAS
CAMILA	4
PAMELA	6
ARTUR	8
JOÃO	2

1) Na tábua de gráficos, façam um gráfico que mostre a quantidade de balas que cada um destes alunos pegou.

## ATIVIDADE 2B

GRUPO \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_  
NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_  
NOME \_\_\_\_\_

1) Respondam as questões de acordo com o gráfico que vocês fizeram:

a) Qual aluno pegou mais balas? \_\_\_\_\_

Quantas balas ele pegou? \_\_\_\_\_

b) Qual aluno pegou menos balas? \_\_\_\_\_

Quantas balas ele pegou? \_\_\_\_\_

c) Houve alunos que pegaram a mesma quantidade de balas? \_\_\_\_\_

Se sim, quais foram esses alunos? \_\_\_\_\_

d) Quantas balas foram pegas, no total, por estes quatro alunos? \_\_\_\_\_

e) Quantas balas pegou João? \_\_\_\_\_

2) Desenhem o gráfico da tábua de gráficos no retângulo abaixo:

Gráfico 1



## ATIVIDADE 2C

GRUPO \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_  
 NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_  
 NOME \_\_\_\_\_

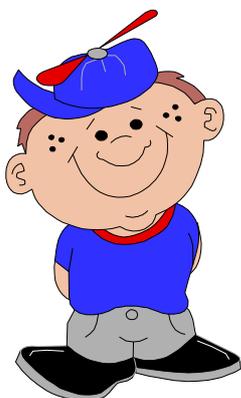
Camila ficou triste porque João conseguiu apenas duas balas. Ela propôs aos alunos de seu grupo que seria mais justo que todos ficassem com a mesma quantidade de balas.



- 1) Como ficaria o gráfico se cada aluno ficasse com a mesma quantidade de balas?  
 Desenhem este gráfico no retângulo abaixo:

Gráfico 2

- 2) De acordo com a proposta de Camila, com quantas balas cada aluno ficaria?



Obrigado por  
 terem ajudado a  
 Camila!

Essa quantidade de balas com que cada aluno ficaria é chamada de média dessas quatro quantidades. No dia-a-dia, vocês já devem ter ouvido expressões do tipo:

- Em média, eles ganham...
- A média de gols...
- A média de filhos por família é...

Sendo assim, podemos dizer que a média dessas quatro quantidades é 5 balas.

### ATIVIDADE 3A

GRUPO \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_  
 NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_  
 NOME \_\_\_\_\_

Na festa dos aniversariantes do mês de abril da professora Carla havia outros alunos. Na tábua de gráficos está representada a quantidade de balas que os alunos do grupo de Paula pegaram ao estourar o “bexigão”.

1) Observando o gráfico respondam:

a) Qual o total de balas que este grupo de alunos pegou? \_\_\_\_\_

b) Qual o total de alunos deste grupo? \_\_\_\_\_

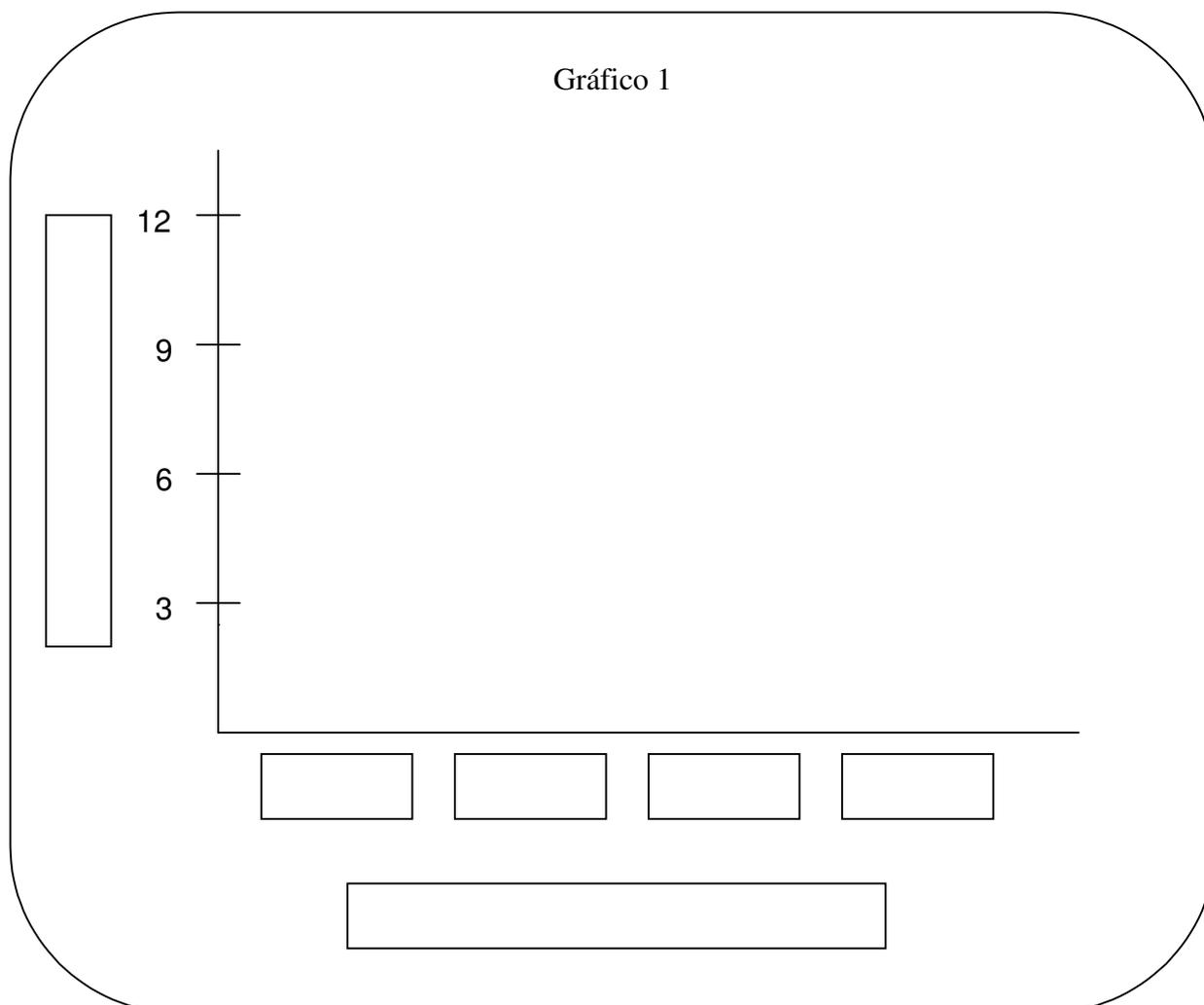
c) Se cada aluno ficasse com a mesma quantidade de balas, com quantas balas cada um ficaria? \_\_\_\_\_

d) Como é chamada essa quantidade que vocês encontraram na pergunta c)?

\_\_\_\_\_



2) Desenhem, no retângulo como ficou o gráfico quando os alunos ficaram com a mesma quantidade de balas.



### ATIVIDADE 3B

GRUPO \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_  
 NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_  
 NOME \_\_\_\_\_

Paula tinha se esquecido de contar as 4 balas que havia guardado em seu bolso. Portanto, ela pegou 12 balas.

1) Na tábua de gráficos refaçam o gráfico acrescentando as balas que Paula encontrou em seu bolso.

2) Observando este novo gráfico respondam:

a) O total de balas mudou? \_\_\_\_\_

Se sim, qual é o novo total de balas? \_\_\_\_\_

b) O total de alunos mudou? \_\_\_\_\_

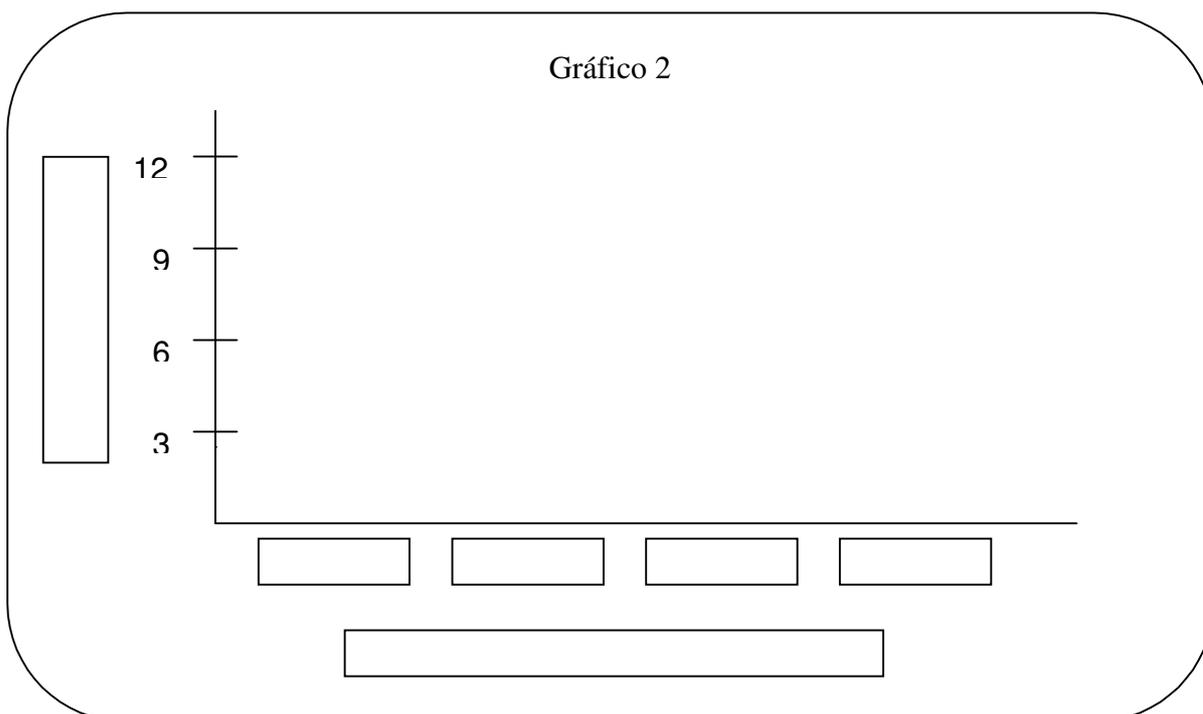
Se sim, qual é o novo total de alunos? \_\_\_\_\_

c) Antes de Paula encontrar as balas em seu bolso, cada aluno ficaria com 4 balas.

Acrescentando as balas que Paula achou, a média de balas por aluno vai mudar?

Se sim, qual será a nova média? \_\_\_\_\_

Essa nova média é maior ou menor que a média anterior? \_\_\_\_\_



### ATIVIDADE 3C

GRUPO \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_  
 NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_  
 NOME \_\_\_\_\_

Paula pensou em guardar para seus irmãos 8 das balas que tinha pego. Os colegas do grupo concordaram.

1) Refaçam o gráfico, na tábua de gráficos, retirando as 8 balas que Paula guardou.

2) Respondam, observando este último gráfico feito:

a) Qual o total de balas do grupo? \_\_\_\_\_

b) Qual o total de alunos do grupo? \_\_\_\_\_

c) Qual a média de balas por aluno? \_\_\_\_\_

d) O que aconteceu com a média? \_\_\_\_\_

e) Se vocês fossem do grupo de Paula, vocês concordariam com que ela guardasse as 8 balas?

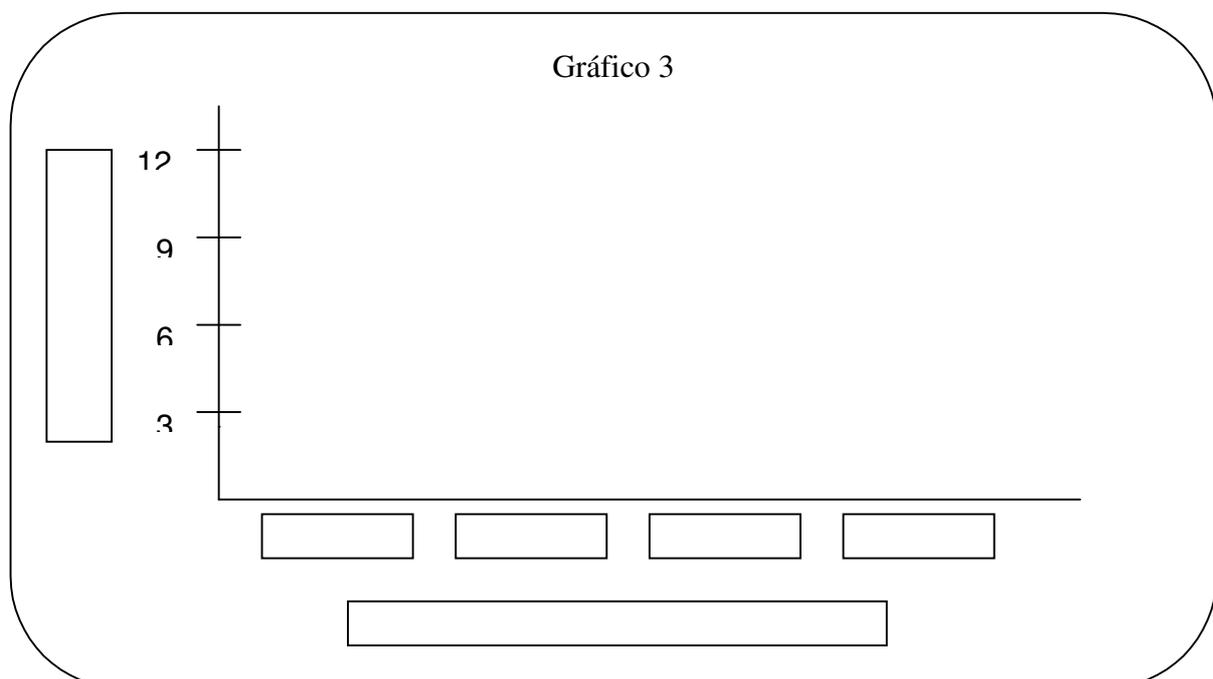
\_\_\_\_\_

Por que? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



**ATIVIDADE 3D**

GRUPO \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_  
 NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_  
 NOME \_\_\_\_\_

1) Supondo que Paula tivesse guardado todas as suas balas, como ficaria o gráfico? Faça-o na tábua de gráficos.

2) Observando este último gráfico, respondam:

a) Qual o total de balas do grupo? \_\_\_\_\_

b) Qual o total de alunos do grupo? \_\_\_\_\_

c) Qual a média de balas por aluno? \_\_\_\_\_

d) O que aconteceu com a média? \_\_\_\_\_

e) Seria melhor para Paula guardar todas as suas balas ou não? \_\_\_\_\_

Por que?

---



---

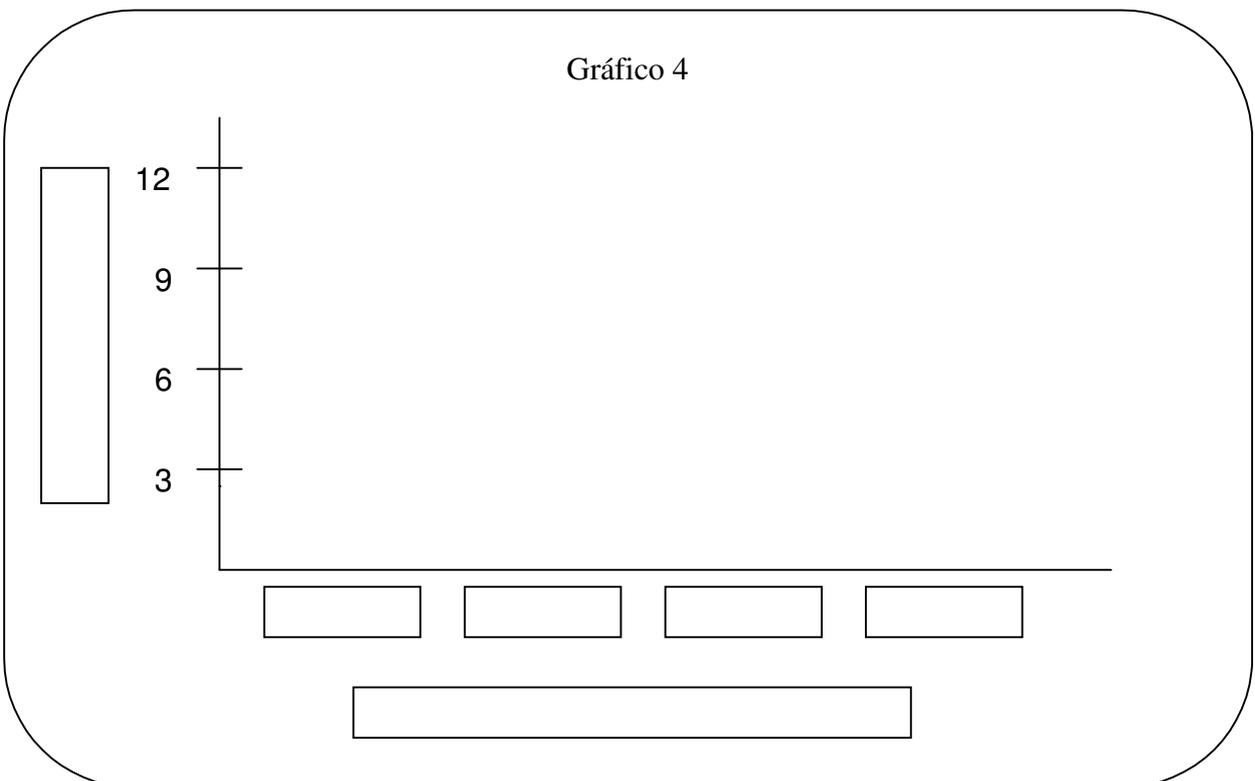


---



---

Gráfico 4



## ATIVIDADE 4

GRUPO \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_  
 NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_  
 NOME \_\_\_\_\_

Na tábua de gráficos da professora está representada a quantidade de balas que cada aluno do grupo de Bruna pegou, na festa da classe da professora Carla.

1) Observando o gráfico da tábua de gráficos da professora, respondam:

a) Havia alguém que não conseguiu pegar nenhuma bala? \_\_\_\_\_

Quem? \_\_\_\_\_

b) Se cada aluno ficasse com a mesma quantidade de balas, com quantas balas cada um ficaria? \_\_\_\_\_

c) Como é chamada essa quantidade que vocês encontraram na pergunta b)? \_\_\_\_\_

d) Qual o total de balas pegas pelo grupo? \_\_\_\_\_

e) Qual o total de alunos deste grupo? \_\_\_\_\_

f) Vocês saberiam calcular a média utilizando o total de balas pegas pelo grupo e o total de alunos deste grupo? \_\_\_\_\_

Se sim, que conta vocês fariam?

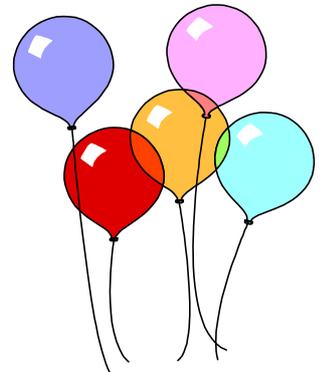
Espaço para fazer a conta

g) Bruna não ficou muito contente ao perceber que Tiago ficaria com a mesma quantidade de balas que todos do grupo, afinal ele não tinha pego nenhuma bala. Vocês concordam com Bruna? \_\_\_\_\_

Por que? \_\_\_\_\_

h) Para encontrar a média de balas por aluno precisamos incluir Tiago ou não? \_\_\_\_\_

Por que? \_\_\_\_\_



## ATIVIDADE 5A

GRUPO \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_

NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_

NOME \_\_\_\_\_

Tia Nena está preparando uma festa para os alunos da 4ª série. Para isso ela precisa saber qual a média de salgadinhos consumidos por essas crianças.



VAMOS  
AJUDAR  
TIA  
NENA?

O gráfico da tábua de gráficos fornece a quantidade de salgadinhos consumida por seis crianças da 4ª série onde será a festa.

1) Observando este gráfico, respondam:

a) Qual a quantidade média de salgadinhos consumidos pelos alunos deste grupo?

\_\_\_\_\_

b) Quem consome mais salgadinhos? \_\_\_\_\_  
Quantos? \_\_\_\_\_

c) Quem consome menos salgadinhos? \_\_\_\_\_  
Quantos? \_\_\_\_\_

d) Tem algum aluno do grupo, que consome mais salgadinhos que a quantidade média de salgadinhos consumida pelos alunos do grupo? \_\_\_\_\_  
Quem? \_\_\_\_\_

e) Tem algum aluno do grupo, que consome menos salgadinhos que a quantidade média de salgadinhos consumida pelos alunos do grupo? \_\_\_\_\_  
Quem? \_\_\_\_\_

f) Tem algum aluno no grupo, que consome a mesma quantidade da média de salgadinhos consumida pelos alunos do grupo? \_\_\_\_\_  
Quem? \_\_\_\_\_

g) Vocês acham que com esses dados, a Tia Nena pode fazer uma previsão de quantos salgadinhos ela deverá preparar para a classe toda? \_\_\_\_\_  
Por que? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

h) Se for possível fazer a previsão, quantos salgadinhos ela precisará fazer para uma classe com 30 alunos? \_\_\_\_\_  
Como vocês chegaram a este resultado? \_\_\_\_\_

Espaço para fazer as contas.

### ATIVIDADE 5B

GRUPO \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_  
 NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_  
 NOME \_\_\_\_\_



VAMOS  
 CONSTRUIR  
 UM GRÁFICO  
 QUE AJUDE A  
 TIA NENA?

Tia Nena quer saber se é verdade que, nesta classe, as meninas consomem mais salgadinhos que os meninos.

1) Utilizando os dados do gráfico de frequência da atividade anterior, construam, na tábua de gráficos, um gráfico de dupla entrada que possa auxiliar Tia Nena.

2) Observando este gráfico, respondam:

a) Qual o total de salgadinhos consumidos pelas meninas? \_\_\_\_\_

b) Qual o total de salgadinhos consumidos pelos meninos? \_\_\_\_\_

c) Vocês concordam que as meninas deste grupo consomem mais salgadinhos que os meninos? \_\_\_\_\_  
 Por que? \_\_\_\_\_

d) Qual a quantidade média de salgadinhos consumida por estes alunos? \_\_\_\_\_

e) Podemos afirmar que todos os alunos deste grupo consumiram exatamente \_\_\_ salgadinhos? \_\_\_\_\_

Por que? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

## ATIVIDADE 6A

GRUPO \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_  
NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_  
NOME \_\_\_\_\_



Tia Nena pretende também fazer docinhos para a festa que está preparando. Os alunos da 4<sup>a</sup>. série fizeram uma pesquisa com 5 coleguinhas para ajudar tia Nena. No gráfico da tábua de gráficos temos os dados obtidos nesta pesquisa.

1) Utilizando este gráfico respondam as seguintes questões:

- a) Quem comeu mais docinhos? \_\_\_\_\_  
Quantos docinhos esta criança comeu? \_\_\_\_\_
- b) Quem comeu menos docinhos? \_\_\_\_\_  
Quantos docinhos esta criança comeu? \_\_\_\_\_
- c) Qual a média de docinhos consumidos por aluno? \_\_\_\_\_
- d) A quantidade média de docinhos consumidos pode ser maior que a quantidade de quem comeu mais docinhos? \_\_\_\_\_
- e) A quantidade média de docinhos consumidos pode ser menor que a quantidade de quem comeu menos docinhos? \_\_\_\_\_
- f) Quantos docinhos tia Nena precisará fazer, sabendo que a 4<sup>a</sup>. série tem 30 alunos? \_\_\_\_\_

Espaço para fazer a conta

## ATIVIDADE 6B

GRUPO \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_  
 NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_  
 NOME \_\_\_\_\_



Tia Nena precisa  
saber o docinho  
preferido das  
crianças.  
Vamos ajuda-la?

Construam um gráfico, na tábua de gráficos que mostre a quantidade de cada tipo de docinho que cada aluno consome.

2) Observando este gráfico, respondam:

a) Qual o docinho preferido de Fernando? \_\_\_\_\_

b) Qual o total de cajuzinhos consumidos por este grupo de alunos? \_\_\_\_\_

c) Qual o docinho preferido por estes alunos? \_\_\_\_\_

d) Quantos docinhos Fabio consumiu? \_\_\_\_\_

e) Quantos brigadeiros Laura consumiu? \_\_\_\_\_

f) Se o "Imaginário" chegasse na classe, qual seria o docinho escolhido por ele?

\_\_\_\_\_

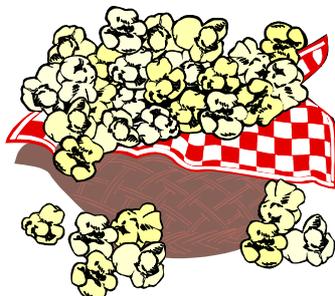
Por que? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

g) Qual a média de docinhos por aluno? \_\_\_\_\_

### ATIVIDADE 7A

GRUPO \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_  
 NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_  
 NOME \_\_\_\_\_



Na tábua de gráficos, temos um gráfico que mostra as prendas arrecadadas por um grupo de alunos da 4<sup>a</sup>. série C para a Festa Junina da escola. As prendas desta classe foram brinquedos.

1) Respondam as questões abaixo, observando este gráfico.

- a) Qual criança deste grupo trouxe mais prendas? \_\_\_\_\_ Quantas? \_\_\_\_\_
- b) Qual criança deste grupo trouxe menos prendas? \_\_\_\_\_ Quantas? \_\_\_\_\_
- c) Podemos dizer que a média de prendas trazidas pelos alunos do grupo foi 30? \_\_\_\_\_

Por que? \_\_\_\_\_

- d) Sabendo que a 4<sup>a</sup>.C tem 35 alunos, quantas prendas esta classe poderá arrecadar? \_\_\_\_\_

Deixem suas contas aqui!!!

## ATIVIDADE 7B

GRUPO \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_  
NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_  
NOME \_\_\_\_\_



Imaginário chegou atrasado, mas trouxe doze prendas. Incluam o Imaginário no gráfico da atividade anterior.

Observando este novo gráfico, respondam:

a) Qual a nova média de prendas por aluno? \_\_\_\_\_

Deixem suas contas aqui!!!