

Uma Prova Geométrica da Versão Projetiva
do Teorema de Steiner

Leo Akio Yokoyama

Dissertação de Mestrado
em Matemática Aplicada - IM/UFRJ

Orientação:

Luiz Carlos Guimarães

Rio de Janeiro

Abril de 2002

UMA PROVA GEOMÉTRICA DA VERSÃO PROJETIVA DO TEOREMA DE STEINER

Leo Akio Yokoyama

Dissertação submetida ao corpo docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - IM/UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

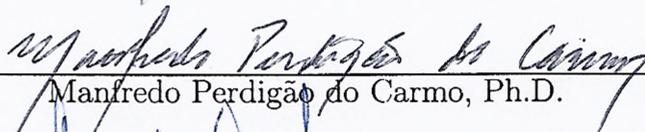


Luiz Carlos Guimarães, Ph.D.

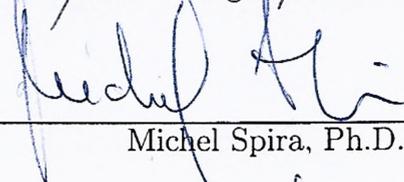
- Orientador



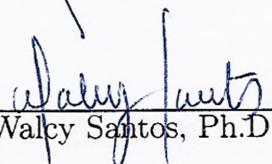
Elizabeth Belfort da Silva Moren, Ph.D.



Manoel Perdigão do Carmo, Ph.D.



Michel Spira, Ph.D.



Walcy Santos, Ph.D.

YOKOYAMA, LEO AKIO.

Uma prova geométrica da versão projetiva do Teorema de Steiner. Rio de Janeiro: UFRJ/CCMN/IM, 2002.

x, 100p.il.

Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM - Departamento de Matemática Aplicada.

1. Uma prova geométrica. 2. Versão projetiva do Teorema de Steiner. 3. Tese (Mestr.- UFRJ/ CCMN/ IM). I. Título.

*"Geometria Métrica é uma parte da Geometria
Projetiva, e Geometria Projetiva é toda a Ge-
ometria."*

Cayley.

Aos meus pais,

Tios,

e à Michelle.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer meu orientador Luiz Carlos Guimarães por todo apoio, confiança e atenção.

Aos colegas Francisco e Geraldo, pelas assistências computacionais e pelas horas de estudo (e muito café), pois iniciaram juntos comigo o estudo da Geometria Projetiva.

À tia Neguinha e tia Suelly pelo carinho materializado em maravilhosos almoços, ao tio Sidarta e ao Nando pela consideração e amizade tão generosas e incondicionais.

À Michelle que sempre me incentiva a lutar, a crescer, cada vez mais, profissionalmente e pessoalmente.

Aos meus pais que me deram tudo, sempre me apoiaram e me acompanharam em cada passo, fazendo-se presentes qualquer que fosse a distância entre nós.

Resumo

YOKOYAMA, Leo AKio. **Uma prova geométrica da versão projetiva do Teorema de Steiner.**

Orientador: Luiz Carlos Guimarães. Rio de Janeiro: IM/CCMN/UFRJ, 2002. Diss.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma nova demonstração do Teorema de Steiner completamente baseada em argumentos de geometria projetiva. Segundo este teorema, a envoltória das retas de Simson-Wallace é uma hipociclóide tricúspide que tornou-se conhecida por Deltóide de Steiner. Nós também apresentamos um resumo da História da Geometria Projetiva.

Abstract

YOKOYAMA, Leo Akio. **Uma prova geométrica da versão projetiva do Teorema de Steiner.**

Orientador: Luiz Carlos Guimarães. Rio de Janeiro: IM/CCMN/UFRJ, 2002. Diss.

Our goal is to give a new proof to Steiner Theorem on Projective plane completely based on projective geometric arguments. According to this theorem the envelope of Simson-Wallace lines is a tricuspids hypocycloid, which became known as Steiner's Deltoid. We also present a survey on Projective Geometry History.

Sumário

| | | |
|-------|---|----|
| 1 | Introdução | 1 |
| 2 | História da Geometria Projetiva | 3 |
| 3 | Idéias Intuitivas | 19 |
| 4 | Formalização da Geometria Projetiva | 25 |
| 4.1 | Projetividades | 28 |
| 4.2 | Perspectividades | 31 |
| 4.3 | Modelo Algébrico para a Geometria Projetiva | 34 |
| 4.3.1 | Definições | 36 |
| 4.3.2 | Incidência | 37 |
| 4.3.3 | Colinearidade | 38 |
| 4.3.4 | Feixes e pontilhadas | 39 |
| 4.4 | Axiomas do Plano Projetivo | 40 |
| 4.5 | Projetividades Uni-dimensionais | 47 |
| 4.5.1 | Involuções | 47 |
| 4.6 | Projetividades Bi-dimensionais | 50 |
| 4.6.1 | Colineações Projetivas | 50 |
| 4.6.2 | Correlações Projetivas | 54 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.6.3 | Polaridades | 56 |
| 4.7 | A Cônica | 58 |
| 4.8 | Transformação Projetiva entre cônicas | 60 |
| 4.9 | Curvas Projetivas | 62 |
| 4.9.1 | A curva projetiva determinada por uma curva plana | 63 |
| 4.9.2 | Seções afins de uma curva projetiva | 63 |
| 4.9.3 | Curvas planas como seções de uma curva projetiva | 64 |
| 4.9.4 | Equivalência de curvas | 65 |
| 4.10 | Paralelas e Perpendiculares Projetivas | 66 |
| 5 | A reta de Simson-Wallace na Geometria Euclideana | 69 |
| 5.1 | O teorema da reta SW na Geometria Euclideana | 71 |
| 5.2 | A deltóide | 74 |
| 5.2.1 | A envoltória | 78 |
| 5.2.2 | Translações de δ , F e do triângulo ABC | 84 |
| 6 | A reta SW na Geometria Projetiva | 91 |
| 6.1 | Teorema SWS algebricamente | 91 |
| 6.2 | Teorema SWS via projeção (Geometricamente) | 92 |

Capítulo 1

Introdução

No capítulo 2, apresentaremos brevemente a história da Geometria Projetiva. Todas as informações contidas nele são encontradas nas referências [1], [3], [5], [8] e [9].

O capítulo 3 pretende dar ao leitor o que poderia ser as primeiras idéias intuitivas que levaram ao desenvolvimento formal da Geometria Projetiva. Eu o escrevi baseado na referência [6] páginas 2, 3 e 4, (figura 3b). Com esta idéia, fui levado a pensar nas outras projeções (elipse e hipérbole).

A formalização teórica da Geometria Projetiva descrita no capítulo 4, tem como objetivo fornecer os requisitos necessários para a compreensão do Teorema Fundamental da Geometria Projetiva entre Cônicas (TFGPC) e do modelo algébrico para a Geometria Projetiva. Com isso, o leitor pode sentir falta de alguns teoremas. Ou seja, perguntas naturais que surgem podem não ser respondidas, já que não é o intuito deste trabalho fazer um livro didático sobre Geometria Projetiva. Ele foi baseado nas referências [4], [5] e [16].

Temos no capítulo 5, a descrição e a prova de um problema euclideano conhecido como teorema de Steiner (referência [11] e [12]).

Finalmente o capítulo 6 mostra, de uma maneira geométrica e simples, a generalização, dos teoremas provados no capítulo 5, na Geometria Projetiva. Este resultado não é original (referência [10]) e é provado usando geometria algébrica. Mas a prova que apresentaremos é original e foi inspirada na maneira natural de se pensar em projeção.

Todas as figuras com entes geométricos foram feitas no Software Cabri-Géomètre II.

Capítulo 2

História da Geometria Projetiva

A Geometria Projetiva começa a dar seus primeiros passos com o desejo dos pintores renascentistas de colocar em suas telas, da maneira mais fiel possível, seus objetos de pintura. Esse movimento começa quase simultaneamente na Itália e na Alemanha.



Leon Batista Alberti



1

Filippo Brunelleschi

¹Fotos encontradas em:

<http://easyweb.easynet.co.uk/giorgio.vasari/albert/alberti.htm>

<http://easyweb.easynet.co.uk/giorgio.vasari/brunell/brunell.htm>

Filippo Brunelleschi (1377-1446), um arquiteto florentino, foi um desses primeiros artistas. Leon Batista Alberti (1404-1472) em sua obra *Della pictura*, escreveu o primeiro tratado formal de uma nova técnica para representar um piso (fig.2a e fig.2b).

Observando as figuras abaixo temos que os pontos F, G, H, I, J, K são projeções dos pontos f, g, h, i, j, k.

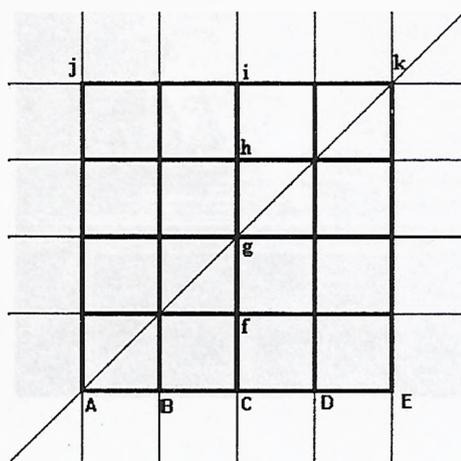


fig.2a

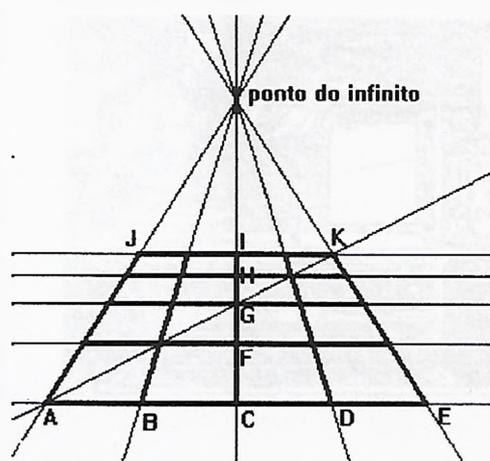


fig.2b

Ele já havia percebido que retas paralelas podem ser vistas como retas concorrentes que se cruzam na linha do horizonte.

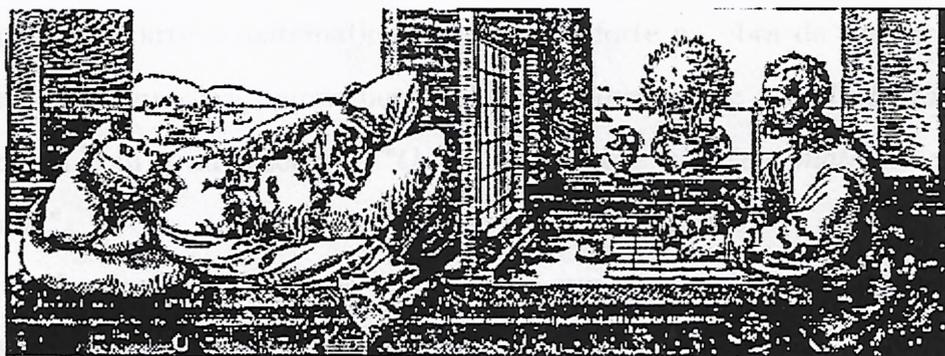
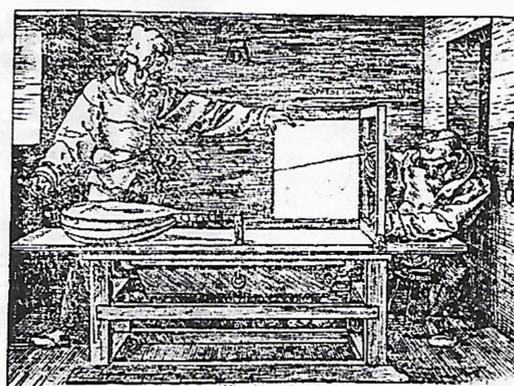
Muitos pintores dessa época usavam esta técnica para fazer obras como *Cidade Ideal*² de Piero della Francesca.



²<http://www.kfki.hu/~arthp/html/p/piero/francesc/>

A imagem feita por um pintor pode ser vista como uma projeção do original na tela, com o centro de projeção no olho do pintor, como faziam os primeiros artistas preocupados com a perspectiva.

Podemos ver nos quadros abaixo as primeiras tentativas de se pintar exatamente aquilo que se observava. Estas “engenhocas” são conhecidas como as máquinas de Dürer³.



O pintor italiano de afrescos, Piero della Francesca (1410?-1492), em *De prospectiva pingendi* (cerca de 1478), estudou o problema mais complicado de representar,

³<http://www.dartmouth.edu/~matc/math5.geometry/unit11/unit11.html>

<http://www.uh.edu/engines/epi138.htm>

<http://www.cybergnosis.com/cv11.html>

sobre o plano da pintura, objetos em três dimensões observados de um ponto de vista dado.



Piero della Francesca

A relação entre arte e matemática era também forte na obra de Leonardo da Vinci. Escreveu uma obra, agora perdida, sobre Perspectiva; seu *Trattado della pittura* começa com a advertência: “*Que ninguém que não seja matemático leia minhas obras*”.

O pintor alemão Albrecht Dürer (1471-1528), um contemporâneo de Leonardo, era considerado o melhor matemático dentre todos os artistas renascentistas. Seus livros mais importantes são: “Investigação sobre a medida com círculos e retas de figuras planas e sólidas” e “*Institutiones Geometricas*”. Chega à Itália para aprender com os mestres italianos. Segue as pegadas de Piero e se vale de suas regras, preocupando-se em melhorar o uso das projeções vertical e horizontal das figuras por ele aplicadas na construção das diversas seções do cone reto e para representar as seções da cabeça e do corpo humano.

⁴<http://easyweb.easynet.co.uk/giorgio.vasari/piero/piero.htm>

Infelizmente os matemáticos da época de Dürer não deram valor a essa ligação entre a matemática e a arte. Esse tipo de estudo foi esquecido por mais de um século.

Na época de Descartes e Fermat, eram os estudos da Geometria Analítica e do Cálculo Infinitesimal que estavam “em alta”. Com isso a Geometria Pura foi deixada um pouco de lado.

Surge então a figura de Girard Desargues, arquiteto e engenheiro militar francês que nasceu em Lyons em 1591 e morreu na mesma cidade em 1662. Ele se interessou muito pela obra de Apolônio intitulada *As Cônicas*, e com isso começa a desenvolver uma nova fase da Geometria.



Girard Desargues 5

Seu ponto de vista pouco ortodoxo sobre o papel da Perspectiva na Arquitetura e Geometria encontrou pouca simpatia, e ele voltou a Lyons para trabalhar em seu novo tipo de matemática quase sozinho. Surgiu em 1639 um dos grandes livros menos bem sucedidos de todos os tempos. O título revela talvez um autor inseguro ou então muito modesto - *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan*. Isso pode ser traduzido como “Esboço tosco de uma tentativa de tratar o resultado de um encontro entre um cone e um plano”.

⁵<http://scienceworld.wolfram.com/biography/Desargues.html>

Existem diversas razões para explicar a rejeição inicial por parte dos matemáticos da época à obra de Desargues. Ela ficou ofuscada pela Geometria Analítica introduzida dois anos antes por Descartes. Com isso os geômetras estavam preocupados em desenvolver esta nova e poderosa ferramenta, e tentando aplicar os infinitésimos a ela. Além disso, Desargues adotou um infeliz e excêntrico estilo de escrever. Ele introduziu cerca de setenta novos termos, muitos provenientes da Botânica. Por exemplo, quando através de vários pontos de uma reta l passam várias outras retas l é chamada de *tronco*. Os pontos no tronco, através dos quais passam outras retas, são chamados de *nós*. Qualquer outra reta que passa através dos nós é chamada de *galho* em relação ao tronco. *Árvore* é uma reta com três pares de pontos de uma involução (conceito que veremos na seção 4.5.1). O único termo que sobreviveu foi *involução*.

Uma hipótese para essa nova linguagem de Desargues sugere que tudo tenha derivado do termo “árvore” usado pelos engenheiros para descrever um eixo. Então seu vocabulário não convencional viria de seus conhecimentos como engenheiro.

Mas a idéia em que se baseia a obra de Desargues é a essência da simplicidade - derivada da Perspectiva na arte da Renascença e do *Princípio da Continuidade* de Kepler.

Sabemos que um círculo olhado obliquamente, aparece como uma elipse, ou que o contorno da sombra de um quebra-luz será um círculo ou uma hipérbole conforme esteja projetada no teto ou numa parede. As formas e tamanhos mudam conforme o plano de incidência que corta o cone de raios visuais ou raios de luz; mas certas propriedades permanecem as mesmas em todas essas mudanças, e foram essas propriedades que Desargues estudou. Primeiro, uma secção cônica continua sendo uma secção cônica, não importa quantas vezes é projetada. As cônicas continuam sendo uma única família de parentes próximos, como Kepler sugerira por razões um

tanto diferentes. Mas ao aceitar esse ponto de vista, Desargues tinha que supor, como Kepler, que a parábola tem um foco “no infinito” e que retas paralelas se encontram “num ponto no infinito”. Kepler (no seu *Paralipomena in Vitellionem*, 1604) declarou que uma parábola tem dois focos, um deles está infinitamente distante do outro, e que qualquer ponto na curva é “ligado” a este “foco cego” por uma reta paralela ao eixo. Desargues (no seu *Brouillon project ...*, 1639) declarou que retas paralelas “*sont entre elles d’une mesme ordonnance dont le but est à distance infinie.*” Isto é, retas paralelas têm um ponto final em comum numa distância infinita. E de novo, “*Quand en un plan, aucun des points d’une droit n’y est à distance finie, cette droit y est à distance infinie.*” (Quando nenhum ponto de uma reta está numa distância finita, a reta toda está numa distância infinita). Assim se poderia dizer que duas retas sempre se cruzam - seja num ponto ordinário, seja num ponto no infinito (no caso de paralelas), também chamado de ponto ideal.

A Teoria da Perspectiva torna plausíveis essas idéias, pois a luz do Sol é ordinariamente considerada como formada de raios paralelos - formando um cilindro ou feixe de raios paralelos - ao passo que os raios de uma fonte de luz terrestre são tratados como um cone ou feixe de um ponto. O cilindro é simplesmente um cone com vértice no infinito, e um feixe de retas paralelas é simplesmente uma família de retas que passam todas pelo mesmo ponto no infinito. De modo semelhante Desargues estudou um feixe de planos por um ponto.

Seu trabalho sobre seções cônicas foi a contribuição mais original para a Geometria Pura no século XVII.

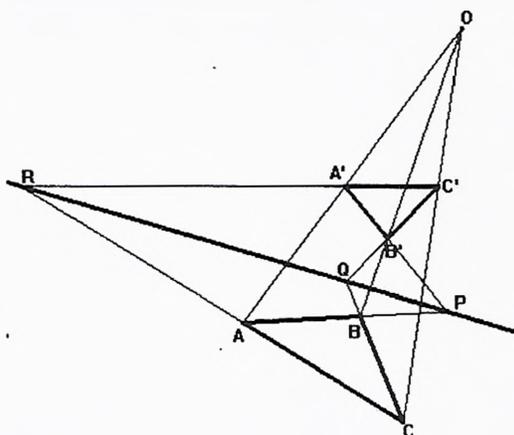
A grande vantagem da Geometria Projetiva sobre a Geometria de Apolônio, Descartes e Fermat é a generalização. Muitos casos especiais se juntam num enunciado geral. No entanto os matemáticos da época não aceitaram os métodos da nova geometria e se opuseram ativamente a eles, considerando-os perigosos e mal funda-

mentados. Eram tão raros os exemplares do *Brouillon projet* de Desargues que pelo fim do século todos haviam desaparecido, pois Desargues publicava suas obras não para vendê-las mas para dá-las aos amigos. A obra ficou completamente perdida até que em 1847 uma cópia à mão feita por Philippe de Lahire, um dos poucos admiradores de Desargues, foi encontrada numa biblioteca em Paris. Descartes, que conhecera Desargues em Paris em 1626, sempre teve alta estima por seu amigo. Mas até Descartes quando ouviu dizer que o *Brouillon projet* trataria de secções cônicas sem usar álgebra ficou desanimado. Não parecia possível dizer algo sobre cônicas que não fosse mais fácil de se exprimir com álgebra.

Uma das idéias mais importantes de Desargues é justamente de ponto ideal ou ponto do infinito. Não estamos realmente trabalhando em Geometria Projetiva até que estejamos preparados para esquecer o *status* inferior de tais pontos extras e admiti-los dentro da “comunidade” como verdadeiros membros tendo os mesmos privilégios dos pontos ordinários. Esta emancipação foi feita pelo, K. G. C. von Staudt (1798-1867). O último vestígio de dependência da Geometria ordinária foi removida em 1871, com Felix Klein munido de fundamentos algébricos para Geometria Projetiva em termos de “coordenadas homogêneas”, que foram descobertas independentemente por K. W. Feuerbach e A. F. Möbius em 1827. Esse foi mais um dos motivos pelos quais a obra de Desargues não cativou os matemáticos da época: a dificuldade de se trabalhar com pontos do infinito, pois estavam acostumados com retas paralelas (aquelas que não têm nenhum ponto em comum).

O prestígio da Álgebra era tal que por quase dois séculos a beleza da Geometria Projetiva passou despercebida. Mesmo hoje o nome de Desargues é familiar não por ser o autor de *Brouillon projet* mas por uma proposição que não aparece no livro, o famoso teorema de Desargues:

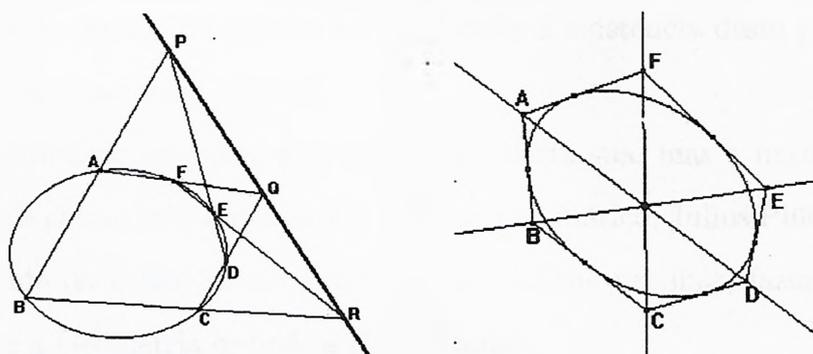
“Se dois triângulos estão colocados de tal maneira que as retas que unem os pares de vértices correspondentes (AA' , BB' , CC') são concorrentes em um ponto O , então os pontos de intersecção (P , Q , R) de pares de lados correspondentes (AB e $A'B'$, etc.) são colineares, e reciprocamente.”



Desargues foi o profeta da Geometria Projetiva. Esta nova geometria ficou adormecida até o começo do século XIX, quando homens como Gergonne, Poncelet, Brianchon, Dupin, Chasles, e Steiner obtiveram grandes avanços nessa área.

Dentre todos os ramos da matemática, a Geometria tem sido o mais sujeito a mudanças de gosto, de uma época para outra. Através dos esforços de Monge e Carnot houve alguns sintomas de reavivamento da Geometria Pura durante o período da Revolução Francesa, mas a redescoberta quase explosiva da Geometria como um ramo vivo da matemática veio principalmente no início do século dezenove. A École Polytechnique teve um papel nesse movimento, pois ali foi descoberto por um estudante o bem conhecido teorema de Brianchon, que foi publicado em 1806 no Journal de l'École Polytechnique. Charles Julien Brianchon (1758-1864) tinha entrado na escola um ano antes apenas, quando estudou com Monge e leu a *Géométrie*

de position de Carnot. O estudante de vinte e um anos, mais tarde oficial da artilharia e professor, primeiro retomou o teorema de Pascal, há muito esquecido, e exprimiu em forma moderna: “em todo hexágono inscrito numa seção cônica, os três pontos de interseção dos lados opostos sempre estão sobre uma reta.” Continuando com mais algumas demonstrações chegou à que tem seu nome: “em todo hexágono circunscrito a uma seção cônica as três diagonais se cortam num mesmo ponto”.



A determinação de um ponto por duas retas, sutilmente se compara com a determinação de uma reta por dois pontos. Mais genericamente, veremos que toda afirmação sobre pontos e retas (no plano) pode ser feita por uma afirmação *dual* sobre retas e pontos. A possibilidade de se fazer isto é conhecido como o “*princípio da dualidade*”.

O Princípio da Dualidade no plano afirma que toda definição continua tendo sentido e todo teorema permanece verdadeiro, quando trocamos as palavras *ponto* e *reta* e conseqüentemente outros certos pares de palavras tais como *colinear* e *concorrente*, *vértice* e *lado*, etc.

Os teoremas de Pascal e Brianchon são, na verdade, fundamentais no estudo projetivo das cônicas. Formam, além disso, o primeiro exemplo claro de um par de teoremas “*duais*” significativos na Geometria. Outro exemplo:

Dadas duas *retas* distintas existe um único *ponto* que *pertence* a ambas.

Dados dois *pontos* distintos, existe uma única *reta* que os *contém*.

O arranjo de algumas das definições, que veremos no capítulo 4, mostra o dual do quadrângulo com três *pontos* diagonais, o quadrilátero com três *retas* diagonais. Ainda mais simples é o dual do triângulo (consistindo de vértices e lados) que é o próprio triângulo (consistindo de lados e vértices); então o triângulo é dito uma figura *auto-dual*.

A existência de pontos do infinito é que permite a existência deste postulado e seu dual, como veremos mais adiante.

Poncelet reivindicou este princípio como descoberta sua, mas a natureza deste princípio foi mais claramente entendida por outro matemático, Julius Plücker (1801-1868). Dualidade dá à Geometria Projetiva um charme peculiar, fazendo-a mais sintética do que a Geometria ordinária (Euclideana).

Uma das mais atraentes características da Geometria Projetiva é a simetria e a economia que existe em torno do Princípio da Dualidade, como mostram os exemplos acima.

Tais relações entre pontos e retas sobre cônicas foram mais tarde exploradas eficazmente por outro graduado da École Polytechnique, o homem que se tornou o verdadeiro fundador da Geometria Projetiva. Jean Victor Poncelet (1788-1867), estudou também com Monge, entrou no corpo de engenheiros do exército bem a tempo para tomar parte na malfadada campanha de Napoleão na Rússia em 1812, e passou vários anos numa prisão em Moscou. Foi aí que se iniciou seu grande trabalho.



Jean Victor Poncelet 6

Durante os anos de 1813-1814, em condições precárias numa prisão militar russa em Saratow, Poncelet compusera um tratado de Geometria Analítica, *Applications d'analyse et de géométrie*. Essa obra, porém, só foi publicada cerca de meio século depois (2 volumes, 1862-1864), apesar de originalmente, na intenção do autor, ter servido de introdução ao seu muito mais célebre *Traité des propriétés des figures* de 1822. Essa última obra diferia muito da primeira pois tinha forma sintética em vez de analítica, e com ela iniciou-se o chamado “grande período” na história da Geometria Projetiva.

Em 1829 a justificação lógica do Princípio da Dualidade foi solidamente estabelecida por Julius Plücker (1801-1868) através de um novo e importante ponto de vista na Geometria Analítica. Plücker tornou-se o primeiro especialista moderno em Geometria Analítica. Redescobriu um novo sistema de coordenadas que já tinha sido inventado independentemente três vezes. Era o que chamamos coordenadas homogêneas. Um dos descobridores foi A. F. Möbius (1790-1860).

⁶<http://scienceworld.wolfram.com/biography/Poncelet.html>



Julius Plücker 7

As linhas de raciocínio dos inventores diferiam, mas todos tinham algo em comum - usavam três coordenadas em vez de duas para determinar um ponto no plano.

Finalmente se tinha conseguido ligar os elementos infinitos de Kepler, Desargues e Poncelet a um sistema de coordenadas de números ordinários. Esse novo sistema de coordenadas é o ideal para o estudo da Geometria Projetiva, que até então fora estudada quase exclusivamente do ponto de vista da Geometria Pura.

Plücker havia descoberto o correspondente analítico do princípio geométrico de dualidade, a respeito do qual Gergonne e Poncelet haviam brigado; ficou claro agora que a justificação que a Geometria Pura havia buscado em vão era aqui fornecida pelo ponto de vista algébrico.

Um dos problemas que Poncelet atacou foi o estudo das propriedades gráficas das figuras, que ele define como aquelas que não envolvem tamanho de segmentos ou de ângulos. A distância de dois pontos não é invariante projetivamente, mas procurando configurações invariantes projetivamente ele encontrou a relação harmônica (que não será desenvolvida neste trabalho) e com isso desenvolveu o comprimento na Geometria Projetiva.

O tratamento algébrico para essa configuração harmônica é chamado razão dupla ou cruzada, que foi a grande contribuição de Chasles para a Geometria Proje-

⁷<http://scienceworld.wolfram.com/biography/Pluecker.html>

va. Michael Chasles (1793-1880) foi também um excelente geômetra sintético. Ele tornou-se professor de Geometria e Matemática na École Polytechnique em 1841. Mostrou como trabalhar Geometria Métrica no contexto projetivo e também como obter a Geometria não-Euclideana, através de uma cônica invariante por uma projeção no plano. No final do século XIX e começo do século XX foi mostrado que adicionando e alterando postulados gradualmente, pode-se passar da Geometria Projetiva para a Euclideana, encontrando outras importantes geometrias pelo caminho, como a Geometria não-Euclideana e a Afim.



Michel Chasles ⁸

Muitas das idéias de Poncelet foram aperfeiçoadas pelo geômetra suíço Jacob Steiner, um dos maiores geômetras sintéticos que o mundo conheceu. Steiner nasceu em Utzensdorf em 1796 e não aprendeu a escrever até seus 14 anos. Aos 17 tornou-se um pupilo de Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827), o famoso educador suíço, que estimulou no garoto o amor pela matemática.

⁸<http://scienceworld.wolfram.com/biography/Chasles.html>



Jacob Steiner 9

A autor da referência [1], descreve Steiner como “o maior geômetra desde a época de Apolônio”. Ele tinha um incrível poder de tratamento sintético da Geometria. Contribuiu enormemente para o desenvolvimento da Geometria Projetiva escrevendo numerosos tratados do mais alto nível.



Von Staudt 10

Outro grande geômetra, a quem se deve grande parte da estruturação da Geometria Projetiva Sintética, foi Von Staudt. Ele marca também o final de um grande período na história da Geometria Projetiva.

Há claramente um corte no desenvolvimento do método geométrico; o trabalho de geômetras subseqüentes consistiu sobretudo em aperfeiçoamento. Por 15 anos os seguidores deste ramo da matemática foram numerosos e dedicados. Progressos

⁹<http://scienceworld.wolfram.com/biography/Steiner.html>

¹⁰<http://www.rsg-rothenburg.de/rsg/mathe/staudt/vonStaudt.htm>

existiram, entretanto, se mantiveram mais concentrados no surgimento de aplicações dos métodos já descobertos do que na descoberta de métodos novos.

Capítulo 3

Idéias Intuitivas

Considere um ponto de projeção O . Podemos pensar nele como se fosse uma fonte luminosa pontual. Considere o plano ε , euclideano, e outro plano π qualquer no espaço. A Geometria Projetiva estuda o que acontece no plano π quando projetamos nele o plano ε , através de O . Chamaremos essa transformação de T . Quais as semelhanças e as diferenças dos dois planos? Quais as propriedades geométricas que se alteram? E as que não sofrem mudanças? Quais são as regras dessa transformação T ?

Pensando intuitivamente percebemos que um ponto e uma reta em ε continuam sendo um ponto e uma reta em π . Se o ponto A está na reta a no plano ε , o ponto projetado A' (de A) estará na reta projetada a' (de a) no plano π . Se A estivesse em uma curva qualquer, pela projeção, A' continuaria na curva projetada em π . Ou seja, a **incidência se preserva**. O que já não acontece com o tamanho de segmentos e de ângulos.

Retas paralelas em ε nem sempre continuam paralelas em π . E retas concorrentes em ε podem se tornar retas paralelas em π , como mostram as figuras abaixo:

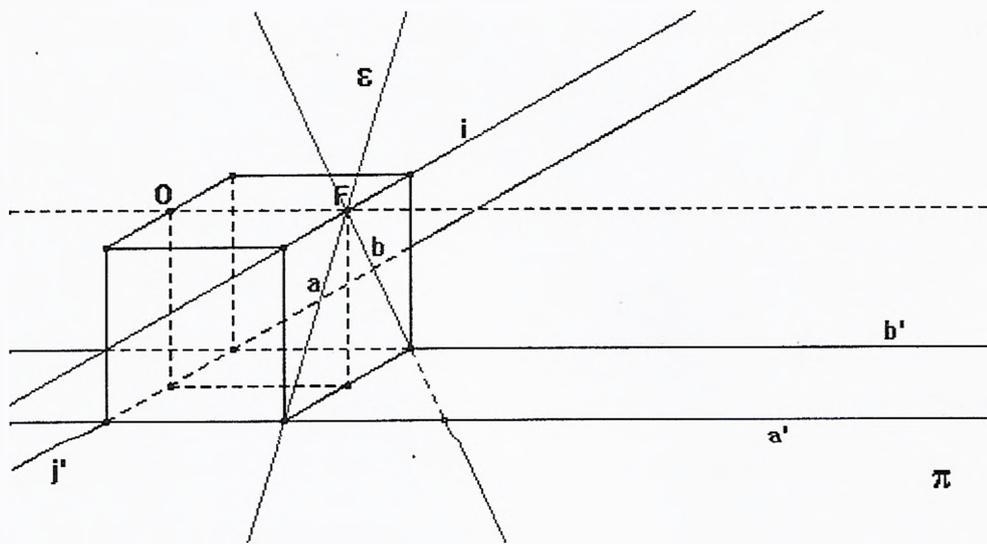


fig.3a

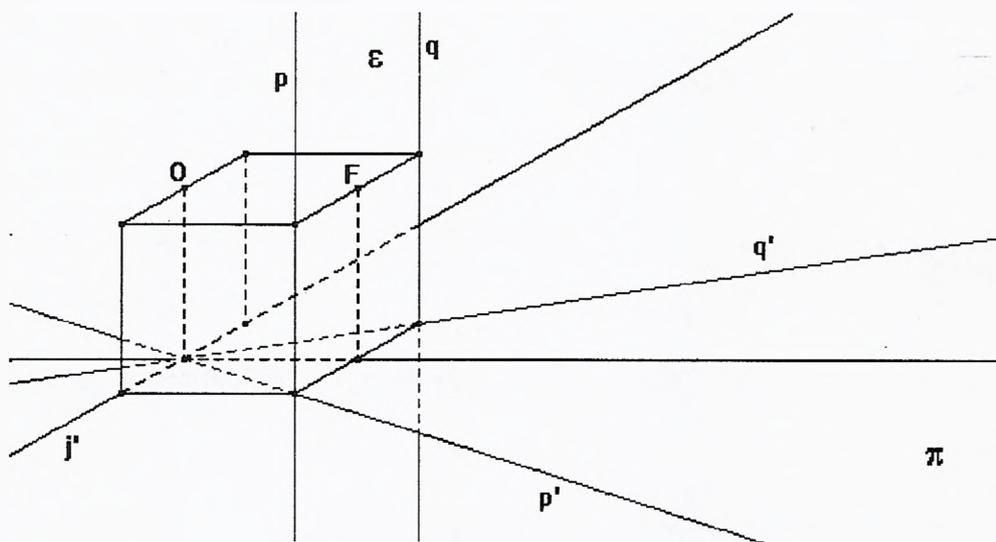


fig.3b

Sejam dois planos perpendiculares ϵ e π e um ponto O fora deles.

As duas retas p e q que eram paralelas em ϵ pela transformação T tornam-se duas retas concorrentes p' e q' em π . Já as retas a e b concorrentes em ϵ tornam-se paralelas em π .

Outra observação interessante é que a reta i em ε não é projetada em nenhuma reta do plano π . Podemos pensar como se ela fosse para o infinito (em relação ao plano π pela projeção T). Por outro lado, nenhuma reta do plano ε vai parar na reta ordinária j' (em π), assim como a reta i' vai para o infinito do plano π . Podemos pensar também que existe uma reta (do infinito) do plano ε que é projetada em j' . Para entendermos melhor esta última projeção, considere pares de retas paralelas em todas as direções em ε . Quando projetadas em π , o conjunto dos pontos de interseção dessas retas forma a reta j' . Na prática j' é a interseção do plano π com o plano paralelo ao plano ε que passa por O .

Juntando estas idéias podemos concluir que retas paralelas, quando são projetadas em outros planos, podem deixar de ser paralelas. E retas concorrentes podem vir a se tornar paralelas por uma projeção. Com isso, podemos considerar a existência de um ponto de interseção entre quaisquer duas retas.

Então podemos pensar que **duas retas distintas, quaisquer, se interceptam em um ponto** (ordinário ou ideal).

A projeção da circunferência é um caso interessante.

Considerando a figura 3c, a reta i em ε é tangente à circunferência C no ponto F , e pela projeção, do ponto O para o plano π , F iria para o infinito em π . Mas em π a circunferência se transforma em uma parábola k . Pois podemos imaginar ainda um cone de vértice O onde a seção dele com o plano ε é uma circunferência e com o plano π é uma parábola.

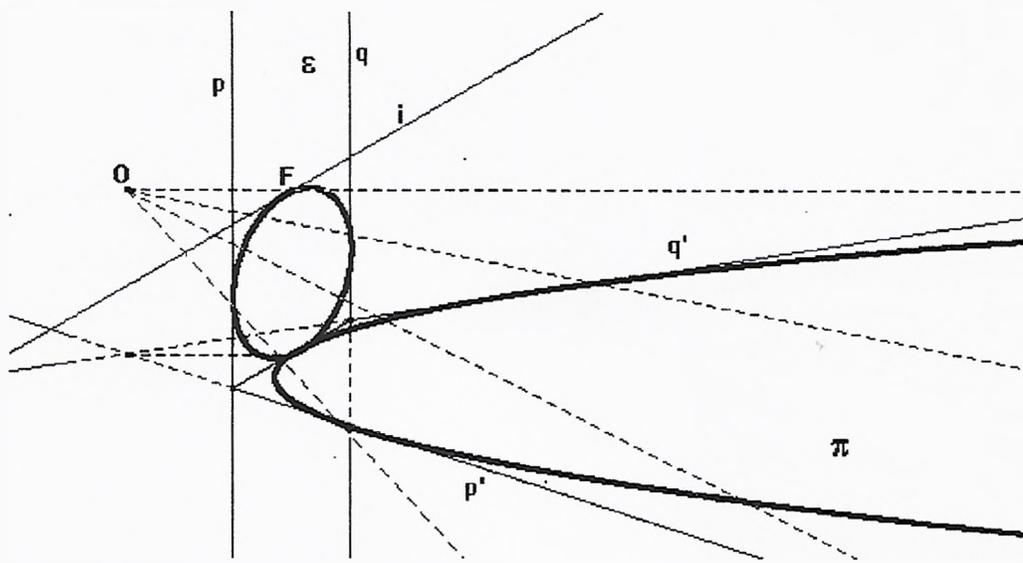


fig.3c

1

Ainda temos mais dois casos de projeção da circunferência.

Quando a reta i , que vai para o infinito, é secante à circunferência, a projeção é uma hipérbole. E quando a reta i é exterior à circunferência, a projeção de C é uma elipse.

Sempre podemos pensar em cones com vértice em O , onde as projeções são as seções do plano π com o cone, como mostram as figuras 3d e 3e:

¹Esta figura, junto com a 3a, é da referência [6]. Inspirado nelas, desenvolvi os demais casos como mostram as figuras 3d e 3e.

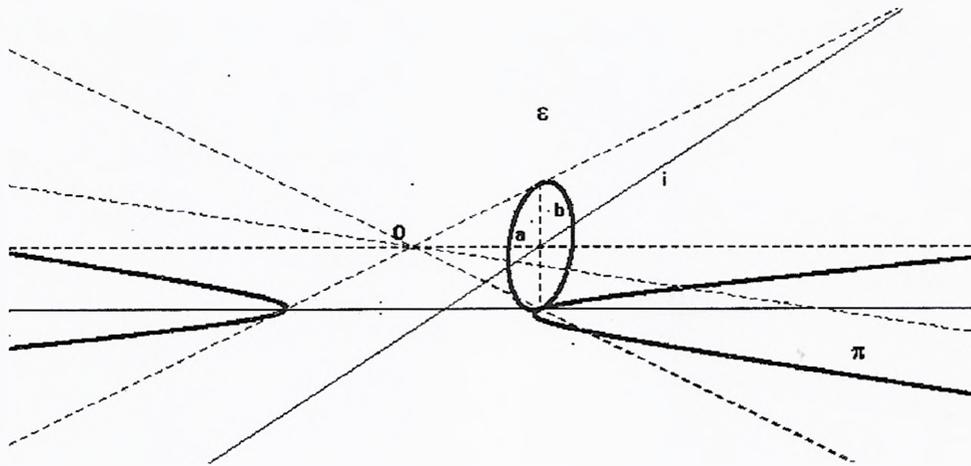


fig.3d

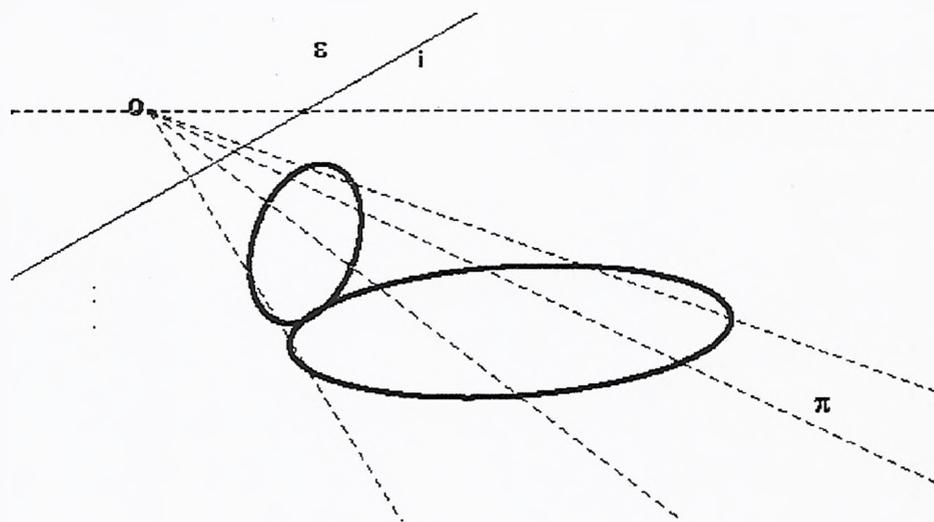


fig.3e

No plano projetivo, a distinção entre elipse, hipérbole e parábola, pode ser feita determinando uma posição especial para a reta do infinito. Mas essencialmente cônicas são o mesmo objeto geométrico.

Então podemos dizer que a parábola é uma cônica com apenas um de seus pontos no infinito, a hipérbole é uma cônica com apenas dois de seus pontos no infinito e a elipse é uma cônica com nenhum de seus pontos no infinito.

Podemos realizar esta transformação quantas vezes quisermos com quaisquer planos e quaisquer pontos de projeção. Dizemos então que temos uma projetividade do primeiro plano com o n -ésimo plano.

Estamos prontos para ver agora a formalização da Geometria Projetiva.

Capítulo 4

Formalização da Geometria Projetiva

Pensando na projeção de retas em retas e pontos em pontos surgem dois elementos importantes nesse contexto, o *quadrângulo* e o *quadrilátero*.

Usaremos três conceitos primitivos: *ponto*, *reta* e *incidência*.

Definição 1 *Se quatro pontos num plano são ligados aos pares por 6 retas distintas, eles são chamados vértices de um quadrângulo completo, e as retas são seus 6 lados. Dois lados são ditos opostos se seu ponto em comum não é um vértice. O ponto comum de dois lados opostos é um ponto diagonal.*

Na figura 4a, o quadrângulo é $PQRS$. Seus lados são PS , QS , RS , QR , RP , PQ , e seus pontos diagonais são A , B , C .

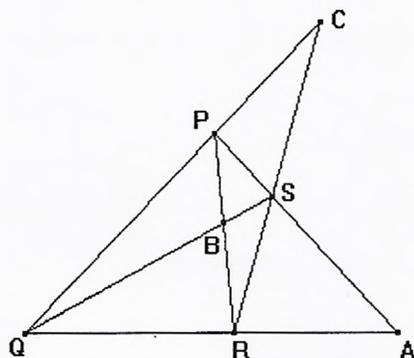


fig.4a

Definição 2 *Se quatro retas num plano encontram-se aos pares em 6 pontos distintos, elas são chamadas lados de um quadrilátero completo, e os pontos são seus 6 vértices. Dois vértices são ditos opostos se sua reta em comum não é um lado. A reta unindo dois vértices opostos é chamada de reta diagonal.*

Na figura 4a', o quadrilátero é $pqr s$ e seus vértices p, s, q, s, r, p, p, q . Suas retas diagonais são a, b, c .

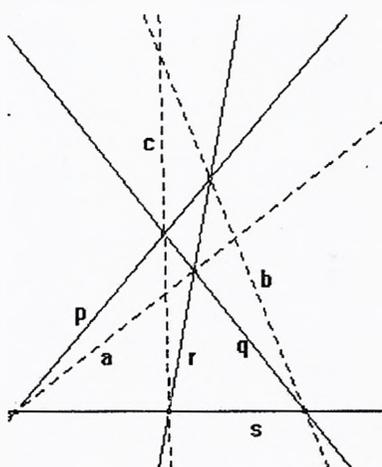


fig.4a'

Quando não existe possibilidade de engano, falaremos simplesmente quadriláteros e quadrângulos, omitindo a palavra “completo”. Esta designação foi introduzida para evitar confusão com um quadrilátero ordinário, que tem 4 vértices e 4 lados.

Um triângulo quando projetado continua sendo um triângulo. Mas um quadrado ou um retângulo, com suas diagonais, quando projetado, não necessariamente continuariam sendo quadrado ou retângulo. Como vimos na seção anterior, retas paralelas podem se tornar concorrentes. Então a imagem que se tem de um quadrilátero qualquer (euclideo) quando projetado é justamente o quadrângulo completo. Imagine um quadrado ou um retângulo de lados $P'Q'R'S'$ e suas diagonais $P'R'$ e $Q'S'$ se encontrando em B' . $P'Q'$ é paralelo a $R'S'$ e $P'S'$ é paralelo a $Q'R'$. Quando projetado, teríamos o quadrângulo da figura 4b onde C e A seriam os pontos do infinito. Por isso o quadrângulo e o quadrilátero são as primeiras figuras a serem consideradas no estudo da Geometria Projetiva.

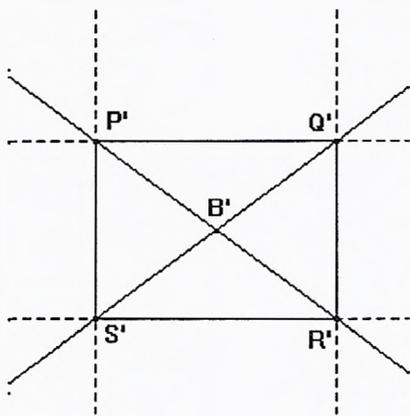


fig.4b'

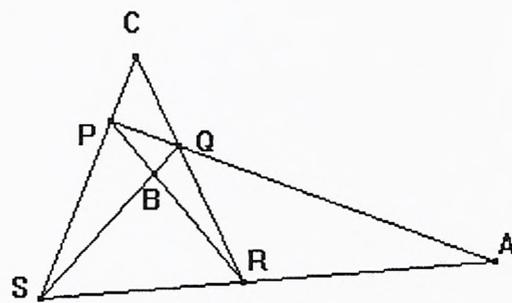


fig.4b

4.1 Projetividades

Até agora imaginamos a Geometria Projetiva como projeções de planos em planos. Mas começaremos o estudo pelas projeções unidimensionais, ou seja, pela projeção de pontos de uma reta em pontos de outra reta. A notação que adotaremos é a da referência [5].

Definição 3 Chamaremos de *pontilhada* o conjunto de todos os pontos em uma reta, e *feixe* o conjunto de todas as retas que estão no plano e passam através de um ponto.

A relação mais simples entre uma *pontilhada* e um *feixe* ocorre quando um ponto e a reta correspondentes são incidentes, como na figura 4.1a onde o *feixe* do ponto P (representado pelas retas variáveis x) corresponde à *pontilhada* da reta p (representado pelos pontos X correspondentes das retas x). Nesse caso a reta p não é incidente com o ponto P . A notação para esta relação elementar é:

$$X \bar{\wedge} x$$

Definição 4 *Correspondência elementar* é a correspondência entre um ponto e uma reta incidentes.

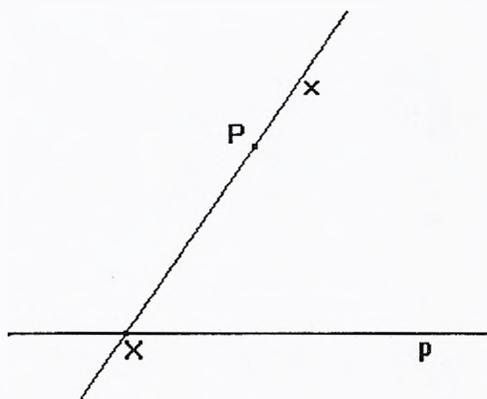


fig.4.1a

ou ainda

$$ABC... \bar{\wedge} abc...$$

onde A, B, C, \dots são posições particulares de X e a, b, c, \dots são as correspondentes posições de x .

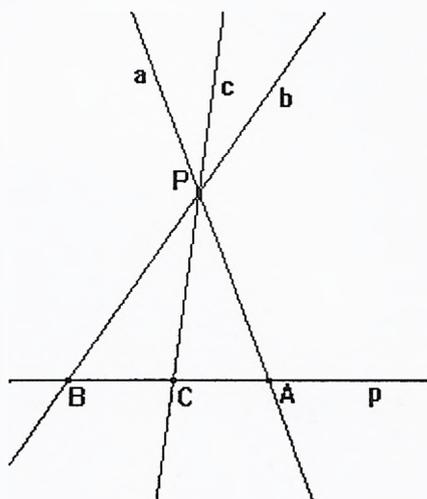


fig.4.1b

A correspondência $X \bar{\wedge} x$ transforma X em x , e a correspondência *inversa* $x \bar{\wedge} X$ transforma x em X . Podemos realizar uma seqüência finita dessas correspondências elementares.

O ponto X da *pontilhada* p (fig.4.1c) corresponde à reta x do *feixe* P , que por sua vez corresponde ao ponto X' da *pontilhada* p_1 , e assim por diante até terminar em um ponto ou uma reta.

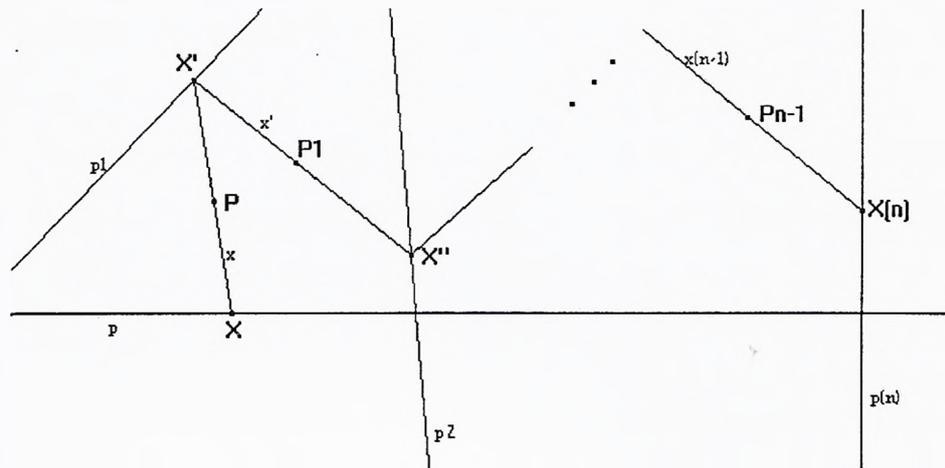


fig.4.1c

$$p, P, p_1, P_1, p_2, \dots, P_{n-1}, p_n, P_n.$$

Observe que o ponto P não poderia estar na reta p nem em p_1 (membros adjacentes). E também o ponto P e o ponto P_1 precisam ser distintos (membros alternados), assim como as retas p e p_1 .

Definição 5 *Uma projetividade é uma transformação de uma seqüência finita de correspondências elementares.*

Para simplificar

$$X \bar{\wedge} x \bar{\wedge} X' \bar{\wedge} x' \bar{\wedge} X'' \bar{\wedge} \dots \bar{\wedge} X^{(n)} \bar{\wedge} x^{(n)}$$

escreveremos

$$X \bar{\wedge} x^{(n)}$$

Em outras palavras, estendemos o significado do sinal $\bar{\wedge}$ de uma correspondência elementar para o *produto* de qualquer número de correspondências elementares.

Dois feixes são relacionados por uma perspectividade com *eixo* o' se eles projetam uma *pontilhada* (consistindo de todos os pontos em o') de dois pontos distintos P e P' ; isto é, se a interseção $x.x'$ de retas correspondentes estão na reta o' . Em símbolos:

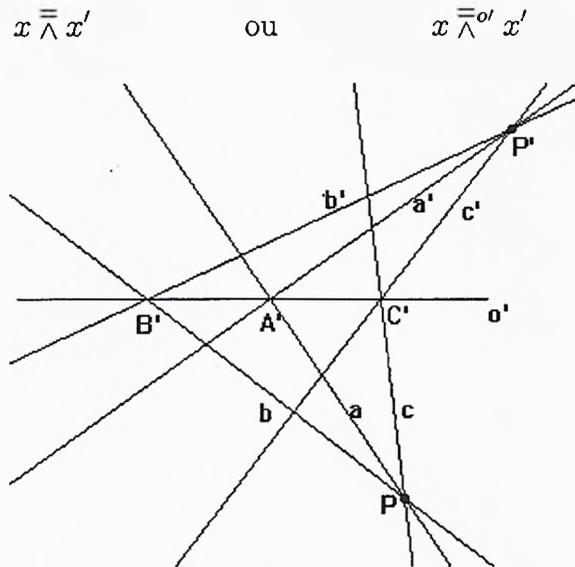


fig.4.2b

Por exemplo, na figura 4.2a (onde A, B, C são posições particulares do ponto variável X , e a, b, c da reta variável x), temos as perspectividades

$$ABC \bar{\bar{\wedge}}^P A'B'C',$$

$$abc \bar{\bar{\wedge}}^{P'} a'b'c'$$

que podem ser analisadas em termos de correspondências elementares:

$$ABC \bar{\wedge} abc \bar{\wedge} A'B'C',$$

$$abc \bar{\wedge} A'B'C' \bar{\wedge} a'b'c'$$

Definição 7 Duas figuras F_1, F_2 estão em correspondência um a um (1,1), se todo elemento de F_1 corresponde a um único ponto de F_2 de tal modo que todo elemento de

F_2 é o correspondente de um único elemento de F_1 . A figura está em correspondência (1,1) com ela mesma, se todo elemento da figura corresponde a um único elemento da mesma figura de modo que todo elemento da figura é o correspondente de um elemento. Dois elementos que são associados deste modo dizemos que são elementos homólogos.

4.3 Modelo Algébrico para a Geometria Projetiva

Devemos encontrar um sistema de coordenadas que descreva o Plano Projetivo (com pontos do infinito). O sistema da Geometria Analítica a que estamos acostumados não funciona pois não há como caracterizar os pontos do infinito, já que as retas paralelas não se encontram.

O modelo que usaremos foi introduzido por Julius Plücker (1801-1868).

Esta seção foi inspirada na referência [4] Nesta o autor define somente a primeira idéia (definição 8) de ponto no plano projetivo. Desenvolvendo-se essa idéia chegamos às outras conclusões desta seção.

Considere o sistema de coordenadas cartesianas de eixos ortogonais x, y, z .

Definição 8 *O nosso Plano Projetivo Π será o conjunto das retas em \mathbb{R}^3 que passam pela origem $(0,0,0)$. Um ponto de Π é uma reta passando pela origem de \mathbb{R}^3 .*

Um ponto P deste plano pode ser representado por um terno de números $P = (X_1, X_2, X_3)$ ou $P = (tX_1, tX_2, tX_3)$, com t real e diferente de 0.

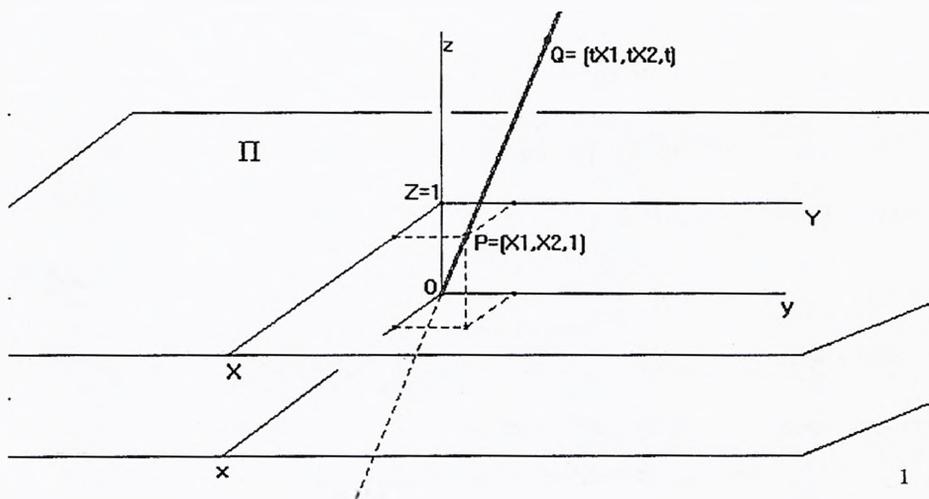


fig.4.3a

¹Figura encontrada na referência [4]. Baseado em sua idéia desenvolvi os outros conceitos, como

Sabemos que uma reta é determinada por dois pontos, então podemos definir uma reta r deste plano como um plano passando pela origem. Iremos representá-lo por um terno entre colchetes $[x_1, x_2, x_3]$, onde estes números são as coordenadas da reta que passa pela origem e é normal a esse plano.

Por exemplo, uma reta r , determinada pelos pontos $P = (P_1, P_2, P_3)$ e $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$, é o conjunto de todas as retas que estão no plano OPQ , e passam por O . Para representarmos numericamente esta reta em Π , tomaremos o produto vetorial determinado por \overrightarrow{OP} e \overrightarrow{OQ} . Para sabermos se um ponto está em $r = [r_1, r_2, r_3]$ basta ele ser perpendicular ao vetor normal (r_1, r_2, r_3) do plano OPQ .

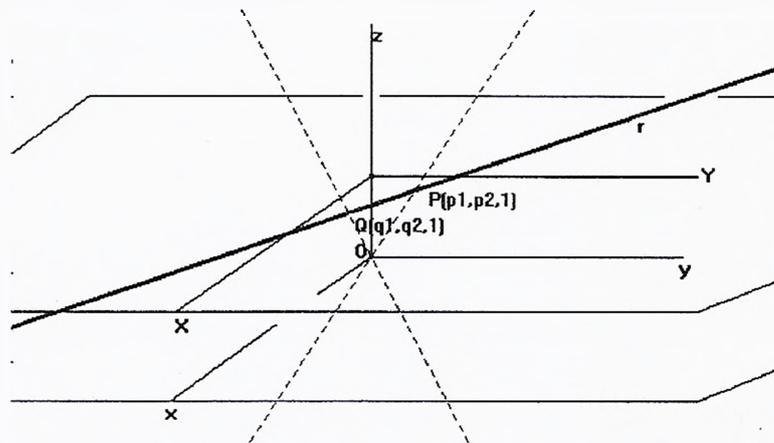


fig.4.3b

Os pontos do infinito são os pontos $(x, y, 0)$ com x ou y diferentes de zero.

A reta do infinito é formada pela união de todos os pontos do infinito, então ela é representada por $[0, 0, 1]$.

Para completar, dadas duas retas $r = [r_1, r_2, r_3]$ e $s = [s_1, s_2, s_3]$ (fig.4.3c), o ponto I de interseção delas é justamente representado pelo vetor \overrightarrow{OI} (produto vetorial de $[r_1, r_2, r_3]$ e $[s_1, s_2, s_3]$, vetores normais aos planos), ou seja, o vetor de interseção dos planos OPQ e OAB .

mostram as figuras 4.3b e 4.3c.

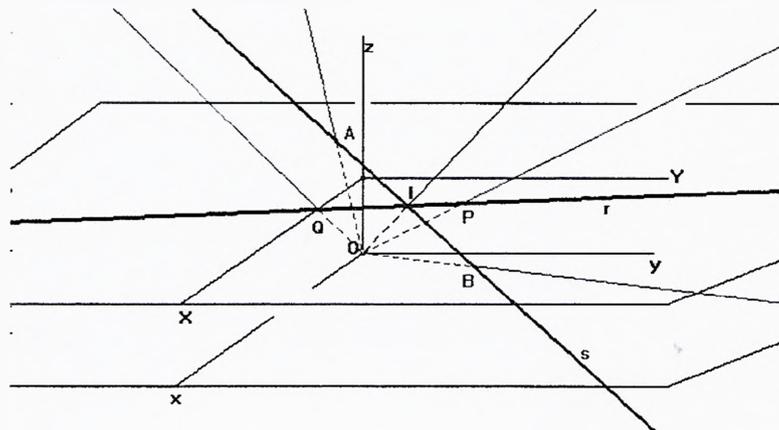


fig.4.3c

Fazendo uma comparação do Plano Euclideano com o Plano Projetivo, podemos pensar que aquele é formado apenas pelos pontos $(x, y, 1)$, com $x, y \in \mathfrak{R}$, do Plano Projetivo. Ou seja, o **Plano Euclideano é o Plano Projetivo menos os pontos do infinito**.

4.3.1 Definições

Agora que o modelo geométrico foi explicado, devemos dar a seguinte definição puramente analítica do plano estendido (plano euclideano mais os pontos do infinito).

Definição 9 Um ponto X é um terno de números (X_1, X_2, X_3) , não todos zero. Dois ternos (X_1, X_2, X_3) e (Y_1, Y_2, Y_3) , definem um mesmo ponto se para algum $t \neq 0$

$$(X_1, X_2, X_3) = (tY_1, tY_2, tY_3).$$

Em outras palavras, as coordenadas de qualquer ponto podem ser multiplicadas por qualquer escalar diferente de zero e o ponto continua o mesmo.

Um ponto (X_1, X_2, X_3) é um *ponto ordinário* se $X_3 \neq 0$; se $X_3 = 0$, ele será um *ponto do infinito*.

Definição 10 Uma reta em Π consiste de todos os pontos (X_1, X_2, X_3) que satisfazem uma equação linear da forma

$$a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 = 0 \quad (4.3.11)$$

onde a_1, a_2, a_3 são quaisquer três constantes não todas zero.

Em particular, os pontos do infinito em Π satisfazem a equação linear

$$x_3 = 0.$$

Esta é por definição uma reta, e é chamada de *reta do infinito* em Π . Como a reta é definida por uma equação da forma (4.3.11), chamamos o terno $[a_1, a_2, a_3]$ de *coordenadas homogêneas da reta* (4.3.11). Segue que $[ta_1, ta_2, ta_3]$, para qualquer $t \neq 0$, são também coordenadas da reta (4.3.11).

4.3.2 Incidência

Nessas definições observamos a perfeita simetria entre ponto e reta: cada um é especificado por três coordenadas homogêneas. A condição para um ponto X e uma reta a serem *incidentes* é

$$a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 = 0,$$

Geometricamente, se o vetor \vec{X} é ortogonal ao vetor \vec{a} , \vec{X} estará no plano perpendicular a \vec{a} (reta a) se

$$X \cdot a = 0 \quad (\text{produto interno de } X \text{ e } a \text{ é } 0)$$

e esta é também a condição para o ponto (a_1, a_2, a_3) estar na reta $[X_1, X_2, X_3]$.

Esta simetria é a **base da dualidade** na Geometria Projetiva plana entre ponto e reta, porque qualquer relação entre pontos e retas se torna uma relação entre retas e pontos quando as coordenadas são re-interpretadas.

Apenas por incluir os pontos e retas do infinito, o princípio da dualidade é perfeitamente estabelecido. Pois com os estes pontos pode-se postular os dois axiomas abaixo:

“Quaisquer duas *retas* distintas são *concorrentes* em apenas um *ponto*.” e

“Quaisquer dois *pontos* distintos são *incidentes* com apenas uma *reta*.”

4.3.3 Colinearidade

Sejam a reta $x = [x_1, x_2, x_3]$ e três pontos $X = (X_1, X_2, X_3)$, $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$, $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$. Queremos encontrar a condição para que estes pontos sejam colineares.

Eliminando x_1, x_2, x_3 das equações

$$X \cdot x = 0$$

$$Y \cdot x = 0$$

$$Z \cdot x = 0$$

de três pontos dados X, Y, Z , temos uma condição necessária e suficiente para que os três pontos sejam *colineares*

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.3.31)$$

Dualmente, a condição para que três retas sejam concorrentes é

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.3.32)$$

4.3.4 Feixes e pontilhadas

Se Y e Z são dois pontos distintos então uma representação algébrica conveniente para os pontos da reta YZ é $(\lambda Y + Z)$.

Os pontos Y e Z são chamados de *pontos base da representação paramétrica* dos elementos da *pontilhada* de pontos. Evidentemente, quaisquer dois pontos distintos podem ser escolhidos como pontos base. Nessa representação o ponto Y corresponde ao valor $\lambda = \infty$.

Observações similares e terminologia correspondente se aplicam também para a representação paramétrica de retas de um *feixe*. Para duas retas y e z podemos expressar qualquer reta concorrente com o ponto yz ou um *feixe* de retas do ponto de interseção de y e z como $[\lambda y + z]$.

4.4 Axiomas do Plano Projetivo

Vejam os axiomas que formam a Geometria Projetiva.

O primeiro axioma é igual ao da Geometria Euclideana.

Axioma 1 *Existem um ponto e uma reta que não são incidentes.*

O segundo já é um pouco diferente. Exige um mínimo de três pontos numa reta, pois com menos de três pontos não conseguiríamos formar um quadrângulo.

Axioma 2 *Toda reta é incidente com no mínimo três pontos distintos.*

O axioma 3 é como na Geometria Euclideana.

Axioma 3 *Quaisquer dois pontos distintos são incidentes com apenas uma reta.*

Já o quarto axioma é o que difere totalmente da Geometria Euclideana, onde existem retas que não têm ponto em comum (paralelas). Na Geometria Projetiva não existem retas paralelas.

Axioma 4 *Quaisquer duas retas distintas tem no mínimo um ponto em comum.*

Axioma 5 *Os três pontos diagonais de um quadrângulo completo nunca são colineares.*

Axioma 6 *Se uma projetividade deixa invariante três pontos distintos de uma reta, ela deixa invariante todo ponto dessa reta.*

Queremos mostrar que o modelo algébrico, apresentado na seção 4.3, é equivalente aos axiomas da Geometria Projetiva.

Esta seção é baseada na referência [5].

Axioma 1: *Existem um ponto e uma reta que não são incidentes.*

Prova. O ponto $(1, 0, 0)$ e a reta $[1, 0, 0]$ obviamente não são incidentes. ■

Axioma 2: *Toda reta é incidente com no mínimo três pontos distintos.*

Prova. A reta $x = [x_1, x_2, x_3]$ com $x_1 x_2 x_3 \neq 0$ é incidente com os três pontos

$$(0, x_3, -x_2) \quad (-x_3, 0, x_1) \quad (x_2, x_1, 0)$$

E a reta $[0, x_2, x_3]$ é incidente com

$$(0, x_3, -x_2) \quad (1, x_3, -x_2) \quad (1, 0, 0)$$

Axioma 3: *Quaisquer dois pontos distintos são incidentes com apenas uma reta.*

Prova. Dois pontos são incidentes com a reta

$$\left[\left[\begin{array}{c|c} Y_2 & Y_3 \\ \hline Z_2 & Z_3 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} Y_3 & Y_1 \\ \hline Z_3 & Z_1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} Y_1 & Y_2 \\ \hline Z_1 & Z_2 \end{array} \right] \right]$$

Axioma 4: *Quaisquer duas retas distintas tem no mínimo um ponto em comum.*

Prova. Duas retas y e z se encontram no ponto

$$\left(\left[\begin{array}{c|c} y_2 & y_3 \\ \hline z_2 & z_3 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} y_3 & y_1 \\ \hline z_3 & z_1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} y_1 & y_2 \\ \hline z_1 & z_2 \end{array} \right] \right)$$

Axioma 5: *Os três pontos diagonais de um quadrângulo completo nunca são colineares.*

Prova. Consideremos um quadrângulo $PQRS$ cujos três primeiros vértices P , Q , R satisfaçam

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Como o lado PS liga P ao ponto diagonal $A = QR \cdot PS$, podemos representar A (em QR , mas distinto de Q e R) como $(Q + R)$, e S (em PA , mas distinto de P e A) como $(P + Q + R)$, ou seja, $(P_1 + Q_1 + R_1, P_2 + Q_2 + R_2, P_3 + Q_3 + R_3)$.

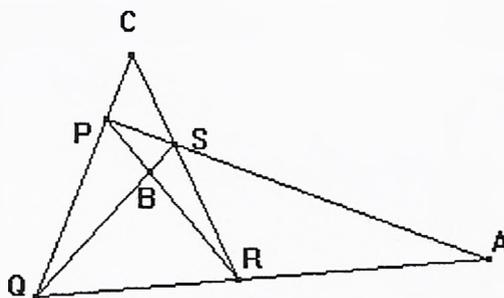


fig.4.4a

Então B , em ambos RP e QS , deve ser $(R + P)$, e C , em PQ e RS , deve ser $(P + Q)$. Os três pontos diagonais A, B, C são não colineares já que

$$\begin{vmatrix} Q_1 + R_1 & Q_2 + R_2 & Q_3 + R_3 \\ R_1 + P_1 & R_2 + P_2 & R_3 + P_3 \\ P_1 + Q_1 & P_2 + Q_2 & P_3 + Q_3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

■

Axioma 6: *Se uma projetividade deixa invariante três pontos distintos de uma reta, ela deixa invariante todo ponto dessa reta.*

Prova. Quando uma *pontilhada* de pontos P se relaciona com uma seção de um feixe de retas p , a correspondência elementar $P \bar{\wedge} p$ pode ser descrita relacionando três posições do ponto P , digamos

$$Y, \quad Z, \quad Y + Z$$

para três posições da reta p ,

$$y, \quad z, \quad y + z$$

Da informação de que P e p são incidentes nesses três casos, podemos deduzir que, quando P é $(\lambda Y + Z)$, p é $[\lambda y + z]$ com o mesmo λ ? Sim! Como

$$(Y + Z)(y + z) = Yy + Yz + Zy + Zz,$$

e como as três incidências dadas implicam

$$Yy = 0, \quad Zz = 0, \quad Yz + Zy = 0,$$

então

$$(\lambda Y + Z)(\lambda y + z) = \lambda^2 Yy + \lambda(Yz + Zy) + Zz = 0,$$

mostrando que a reta $[\lambda y + z]$ é incidente com o ponto $(\lambda Y + Z)$.

A aplicação repetida deste resultado mostra que a relação

$$(y)(z)(y + z)(\lambda y + z) \bar{\wedge} [Y][Z][Y + Z][\lambda Y + Z]$$

vale não apenas para uma correspondência elementar mas para qualquer projetividade de uma *pontilhada* para um *feixe*; é claro que temos também

$$(y)(z)(y+z)(\lambda y+z) \bar{\wedge} (y')(z')(y'+z')(\lambda y'+z')$$

$$[Y][Z][Y+Z][\lambda Y+Z] \bar{\wedge} [Y'] [Z'] [Y'+Z'] [\lambda Y'+Z']$$

■

Esta é a versão algébrica para o Teorema Fundamental da Geometria Projetiva (na reta), do qual o axioma 6 é um caso especial.

Teorema Fundamental da Geometria Projetiva na reta: *Uma projetividade é determinada quando três pontos colineares e seus correspondentes três pontos colineares são dados.*

Vejamos a demonstração geométrica deste teorema.

Prova. Dados quatro pontos distintos A, B, C, X em uma reta, e três pontos distintos A', B', C' , na mesma reta ou em outra, existem muitos modos para construirmos um ponto X' (em $A'B'$) tal que

$$ABCX \bar{\wedge} A'B'C'X'$$

Por exemplo, se duas retas são distintas, uma maneira possível é indicada pelas figuras 4.4b com a notação

$$ABCX \bar{\wedge}^{A'} GNMQ \bar{\wedge}^A A'B'C'X'$$

Neste caso tomamos A e A' com centros de duas perspectividades, mas poderíamos tomar B e B' ou C e C' .

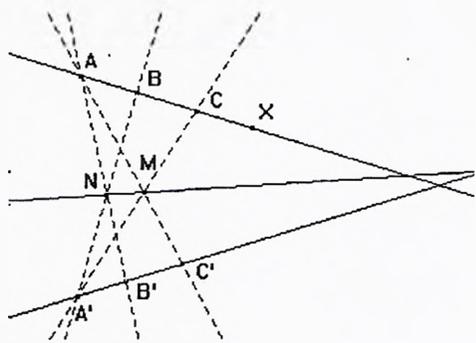


fig.4.4b

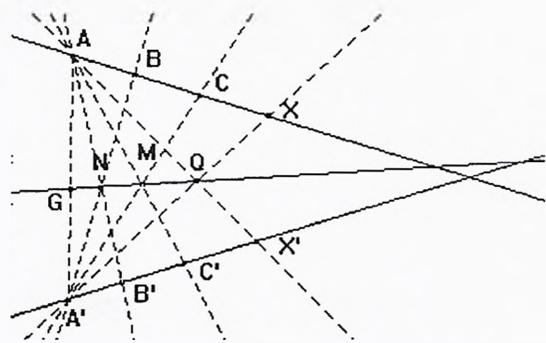


fig.4.4c

Se os pontos dados estiverem na mesma reta, podemos usar arbitrariamente uma perspectividade $ABCX \bar{\bar{A}}_1 B_1 C_1 X_1$ para obtermos uma outra reta e então relacionar $A_1 B_1 C_1 X_1 \bar{\bar{A}}' B' C' X'$, como mostra a figura 4.4d. Ficamos então com

$$ABCX \bar{\bar{A}}^O A_1 B_1 C_1 X_1 \bar{\bar{A}}' G N M Q \bar{\bar{A}}_1 A' B' C' X'.$$

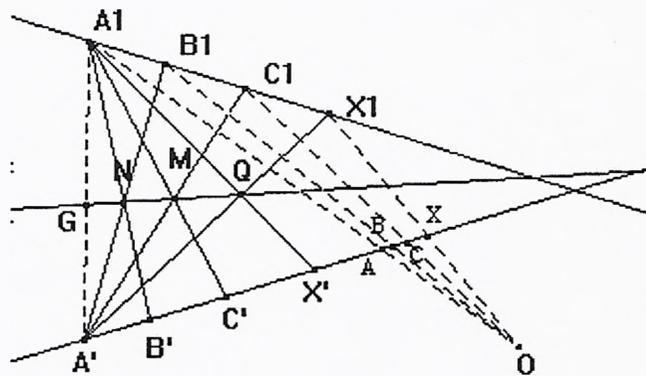


fig.4.4d

Suponhamos agora que exista outro ponto X'' tal que

$$ABCX \bar{A}' B' C' X' \text{ e } ABCX \bar{A}' B' C' X''$$

onde $X' \neq X''$. Invertendo a primeira projetividade e seguindo com a segunda, obtemos

$$A'B'C'X' \bar{\wedge} A'B'C'X'',$$

que contradiz o axioma 6. ■

4.5 Projetividades Uni-dimensionais

O axioma 6 nos diz que uma projetividade relacionando duas *pontilhadas* numa reta (isto é, uma transformação projetiva da reta nela mesma) não pode ter mais que dois pontos invariantes sem ser meramente a *identidade*, que relaciona cada ponto a ele mesmo. Veremos então um tipo especial de projetividade: as involuções.

4.5.1 Involuções

Uma involução é uma projetividade de período dois, ou seja, uma projetividade que *troca* pares de pontos. Em símbolos: $XX' \bar{\wedge} X'X$, para todos as posições de X .

Veja o exemplo da figura 4.5.1a: $ABB'A' \bar{\wedge}^O A_1B_1B'_1A'_1 \bar{\wedge} A'B'BA$

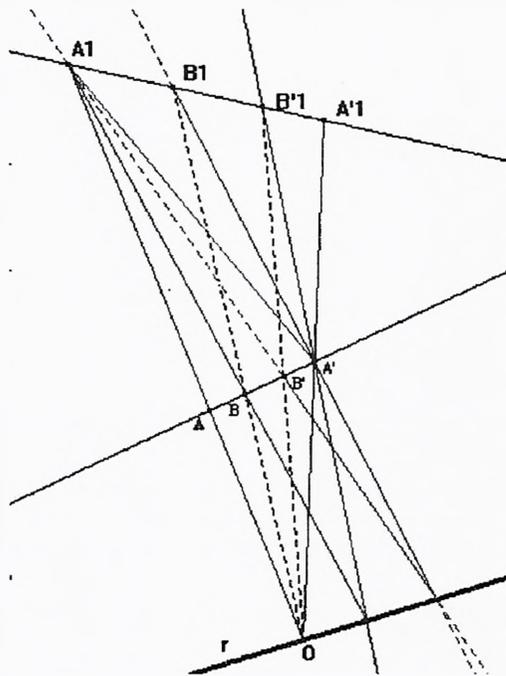


fig.4.5.1a

Proposição 1 *Quaisquer quatro pontos colineares podem ser trocados em pares por uma projetividade.*

Prova. A, B, C, D são quatro pontos colineares (figura 4.5.1a), R é um ponto fora dessa reta, T, Q, W são estão em RA, RB, RC por uma reta arbitrária através de D , e Z é o ponto $AQ \cdot RC$, nesse caso

$$ABCD \bar{\bar{Q}} ZRCW \bar{\bar{A}} QTDW \bar{\bar{R}} BADC.$$

Então $ABCD \bar{BADC}$. ■

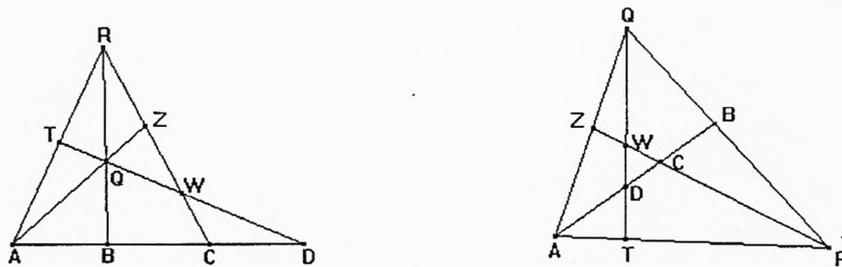


fig.4.5.1a

Teorema 1 *Qualquer projetividade que permuta dois pontos distintos é uma involução.*

Prova. Seja $X \bar{X}'$ uma projetividade que troca dois pontos distintos A e A' , então $AA'X \bar{A'AX'}$ onde X é um ponto arbitrário na reta AA' . Pela proposição 1, existe uma projetividade tal que $AA'XX' \bar{A'AX'X}$. Pelo teorema fundamental esta projetividade, que troca X e X' , é a mesma projetividade dada. Como X é arbitrário, essa projetividade é uma involução. ■

Teorema 2 *Uma involução é determinada por quaisquer dois de seus pares.*

Prova. Quaisquer 4 pontos colineares A, A', B, B' determinam uma projetividade $AA'B \bar{\wedge} A'AB'$, que conhecemos como uma involução.

Em símbolos:

$$(AA')(BB')$$



4.6 Projetividades Bi-dimensionais

Chegamos finalmente à formalização das idéias intuitivas que iniciaram o desenvolvimento da Geometria Projetiva (projeção de um plano projetivo em outro).

Veremos que projetividades bi-dimensionais existem duas: uma relacionando pontos com pontos e retas com retas, e outra relacionando pontos com retas e retas com pontos. Os nomes *colineação* e *correlação* foram introduzidos por Möbius em 1827.

4.6.1 Colineações Projetivas

Por uma *transformação ponto/ponto* $X \rightarrow X'$ entendemos uma regra para associar todo ponto X com todo ponto X' tal que existe exatamente um X' para cada X e exatamente um X para cada X' . Uma *transformação reta/reta* $x \rightarrow x'$ é definida similarmente.

Definição 11 *Uma colineação é uma transformação ponto/ponto e reta/reta que preserva as relações de incidência.*

Então ela transforma *pontilhadas* em *pontilhadas*, *feixes* em *feixes*, quadrângulos em quadrângulos e assim por diante. A inversa de uma colineação é uma colineação, e o produto de duas colineações é de novo uma colineação.

Definição 12 *Uma colineação projetiva é uma colineação que transforma toda forma unidimensional (pontilhada ou feixe) projetivamente, isto é, se transforma os pontos Y de uma reta b em pontos Y' da correspondente reta b' , a relação entre Y e Y' é uma projetividade $Y \bar{\wedge} Y'$.*

Eis a versão do teorema fundamental da Geometria Projetiva para o plano, que não será demonstrado pois exigiria muitos outros teoremas dispensáveis neste trabalho.

Teorema Fundamental para Colineações no plano: *Uma colineação projetiva entre dois planos (ou no mesmo plano) é unicamente determinada quando quatro pares de pontos homólogos são dados, sendo três pontos não colineares.*

Queremos encontrar a forma algébrica para descrever essas transformações chamadas colineações.

Nos concentraremos agora nas propriedades geométricas da transformação linear

$$\rho x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \quad (4.6.11)$$

$$\rho x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$

$$\rho x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3.$$

Tal transformação leva qualquer ponto $X = (x_1, x_2, x_3)$ de um plano em um único ponto $X' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ do plano. Reciprocamente, para todo ponto X' corresponde um único ponto X , desde que o determinante da transformação

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

não seja 0.

Para que possamos resolver as equações (4.6.11) para x_1, x_2, x_3 em termos de x'_1, x'_2, x'_3 segue:

$$\rho' x_1 = A_{11}x'_1 + A_{21}x'_2 + A_{31}x'_3, \quad (4.6.12)$$

$$\rho' x_2 = A_{12}x'_1 + A_{22}x'_2 + A_{32}x'_3,$$

$$\rho' x_3 = A_{13}x'_1 + A_{23}x'_2 + A_{33}x'_3.$$

Aqui os coeficientes A_{ij} são os cofatores dos elementos a_{ij} do determinante A .

Então, as equações (4.6.11) transformam toda reta no plano em uma única reta. De fato, os pontos x que satisfazem a equação

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

são transformados em pontos x' satisfazendo a equação

$$(A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3)x'_1 + (A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3)x'_2 + (A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_3)x'_3 = 0$$

que é a equação de uma reta. Denotando as coordenadas dessa nova reta por $[u_1, u_2, u_3]$, teríamos as seguintes relações entre as coordenadas $[u_1, u_2, u_3]$ de qualquer reta e as coordenadas $[u'_1, u'_2, u'_3]$ da reta transformada por (4.6.11):

$$\begin{aligned}\sigma u'_1 &= A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3, \\ \sigma u'_2 &= A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3, \\ \sigma u'_3 &= A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_3.\end{aligned}\tag{4.6.13}$$

Vimos então que (4.6.11) representa uma colineação no plano em coordenadas de pontos. As equações (4.6.13) representam a mesma colineação em coordenadas de retas.

Estamos prontos para ver que a colineação é projetiva. Para tal é necessário apenas mostrar que (4.6.11) transforma qualquer *feixe* de retas projetivamente em um outro *feixe* de retas. Mas é claro que se $m = 0$ e $n = 0$ são equações de quaisquer duas retas, e se (4.6.11) as transforma respectivamente em duas retas cujas equações são $m' = 0$ e $n' = 0$, qualquer reta $m + \lambda n = 0$ é transformada em $m' + \lambda n' = 0$, e a correspondência, então estabelecida entre as retas de *feixes*, se mostra ser projetiva (Prova do Axioma 6).

Tendo mostrado que toda transformação (4.6.11) representa uma colineação projetiva, mostraremos que toda colineação projetiva no plano pode ser representada por equações da forma (4.6.11). Para fazê-lo, lembremos do teorema fundamental da Geometria Projetiva para o plano. Se pudermos mostrar que existe uma e apenas uma transformação da forma (4.6.11) levando um dado quadrângulo em outro quadrângulo dado, seguirá que, como a transformação linear é uma colineação projetiva, ela é a colineação projetiva dada.

Dada qualquer colineação no plano, tome os pontos fundamentais $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$ do plano (que formam um quadrângulo) e transforme-os respectivamente nos pontos $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$ e $D = (d_1, d_2, d_3)$, formando um quadrângulo. Claramente, se $(0, 0, 1)$ é transformado em (a_1, a_2, a_3) , temos

$$a_{13} = \lambda a_1, \quad a_{23} = \lambda a_2, \quad a_{33} = \lambda a_3,$$

sendo λ um fator arbitrário ($\neq 0$) de proporcionalidade. Similarmente obtemos

$$\begin{aligned} a_{12} &= \mu b_1, & a_{22} &= \mu b_2, & a_{32} &= \mu b_3 \\ a_{11} &= \nu c_1, & a_{21} &= \nu c_2, & a_{31} &= \nu c_3 \end{aligned}$$

Como por hipótese os três pontos A, B, C são não colineares, segue destas equações e da condição de colinearidade, que o determinante A da transformação determinada desse modo não é 0. Substituindo os valores obtidos em (4.6.11), e visto que $(1, 1, 1)$ se transforma em (d_1, d_2, d_3) , temos:

$$\begin{aligned} \rho d_1 &= c_1 \nu + b_1 \mu + a_1 \lambda \\ \rho d_2 &= c_2 \nu + b_2 \mu + a_2 \lambda \\ \rho d_3 &= c_3 \nu + b_3 \mu + a_3 \lambda \end{aligned}$$

Colocando $\rho = 1$ e resolvendo este sistema de equações para ν, μ, λ , obtemos os coeficientes a_{ij} da transformação. Esta solução é única, já que o determinante do sistema não é zero. E mais, nenhum dos valores ν, μ, λ será zero; pois se $\nu = 0$, por exemplo, o determinante

$$\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & a_1 \\ d_2 & b_2 & a_2 \\ d_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

iria se anular, o que implicaria os três pontos D, B, A serem colineares, contradizendo a hipótese.

Temos então o seguinte resultado:

Teorema 3 *Qualquer colinação projetiva no plano pode ser representada em coordenadas de pontos por equações da forma (4.6.11) ou em coordenadas de retas por equações da forma (4.6.13), e em cada caso o determinante da transformação é diferente de 0; reciprocamente, qualquer transformação de uma dessas formas cujo determinante é diferente de 0 representa uma colinação projetiva no plano.*

4.6.2 Correlações Projetivas

Consideramos anteriormente um caso simples de transformação ponto/reta: a correspondência elementar que relaciona uma *pontilhada* a um *feixe* quando o primeiro é uma seção do último. Devemos agora estender isto para uma transformação $X \rightarrow x'$ relacionando todos os pontos do plano a todas as retas do mesmo plano, e seu dual $x \rightarrow X'$ que relaciona todas as retas a todos os pontos.

Definição 13 *Uma correlação é uma transformação ponto/reta e reta/ponto que preserva a relação de incidência de acordo com o princípio da dualidade.*

Então ela transforma *pontilhadas* em *feixes*, *feixes* em *pontilhadas*, quadriláteros em quadrângulos, e assim por diante. A inversa de uma correlação é uma correlação e o produto de duas correlações é uma colineação.

Definição 14 *Uma correlação projetiva é uma correlação que transforma toda forma unidimensional projetivamente.*

Então se ela transforma o ponto Y , na reta b , em retas y' que passam pelo ponto B' , a relação entre Y e y' é uma projetividade $Y \bar{\wedge} y'$

Teorema 4 *A resultante de duas correlações projetivas é uma colineação projetiva, e o resultante de uma correlação projetiva e uma colineação projetiva é uma correlação.*

A prova deste teorema é uma consequência imediata da definição e o fato de que a resultante de quaisquer duas correspondências projetivas é uma correspondência projetiva.

Segue o teorema análogo ao fundamental, para correlações:

Teorema Fundamental para Correlações no plano: *Um quadrângulo e um quadrilátero, com os quatro vértices do primeiro associados numa ordem definida com os quatro lados do último, são relacionados por apenas uma correlação projetiva.*

Teorema 5 *Qualquer correlação no plano é dado como uma transformação de pontos em retas por equações da forma*

$$\rho u'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$

$$\rho u'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$

$$\rho u'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3,$$

onde o determinante A dos coeficientes a_{ij} é diferente de zero. Reciprocamente, toda transformação dessa forma cujo determinante é diferente de zero representa uma correlação.

A prova deste teorema é completamente análoga à prova do teorema 3.

4.6.3 Polaridades

A *polaridade* é a transformação análoga à involução no plano.

Definição 15 *Uma polaridade é uma correlação projetiva de período 2.*

Pela definição, ela relaciona o ponto A com a reta a e vice-versa. Seguindo J. D. Gergonne (1771-1859), chamaremos a reta a o *polar* do ponto A , e A o *pólo* da reta a . Como polaridades são correlações projetivas, os polares de todos os pontos em a formam projetivamente um *feixe* de retas através de A .

Uma polaridade dualiza incidência (definição de correlação).

Definição 16 *Dizemos que A e B são pontos conjugados e que a e b são retas conjugadas, se A está em b (pólo de B) e o polar a passa através de B (pólo da reta b).*

Definição 17 *Pode ocorrer de A e a serem incidentes, então cada um deles é chamado de auto-conjugado: A no seu próprio polar e a através de seu pólo.*

Teorema 6 *A reta a que passa por dois pontos auto-conjugados não pode ser uma reta auto-conjugada.*

Prova. Se a reta a de dois pontos auto-conjugados fosse uma reta auto-conjugada, esta conteria seu próprio pólo A e no mínimo outro ponto auto-conjugado, digamos B . A reta polar de B , contendo ambos A e B , coincidiria com a : dois pontos distintos teriam a mesma reta polar. Isto é impossível, já que a polaridade é uma correspondência um a um entre pontos e retas.

■

4.7 A Cônica

Mostraremos duas formas diferentes de definirmos uma cônica.

Uma delas é extraordinariamente natural e simétrica, e foi dada por von Staudt no seu *Geometrie der Lage* (1847).

Polaridades podem ser de dois tipos possíveis. Podemos chamar uma polaridade de hiperbólica ou elíptica caso ela admita ou não pontos auto-conjugados. Trabalharemos com polaridades que admitem pontos auto-conjugados (hiperbólica).

Um ponto P auto-conjugado, cuja existência é suficiente para fazer uma polaridade hiperbólica, não é de maneira nenhuma o único ponto auto-conjugado. Existe outro em toda reta através de P , exceto seu polar p . Para chegarmos a esta afirmação precisaríamos de uma formalização muito extensa, o que não é o intuito deste trabalho (ver referência [5]).

Definição 18 *Uma cônica é definida como o Lugar Geométrico dos pontos auto-conjugados, e suas retas polares são suas tangentes. Esta simples definição exhibe a cônica como uma figura auto-dual: o lugar geométrico dos pontos auto conjugados e também a envoltória das retas auto-conjugadas.*

Como curiosidade, segue uma outra definição:

Definição 19 *O conjunto de todos os pontos de interseção de retas homólogas de dois feixes projetivos e não perspectivos, que estão no mesmo plano mas não no mesmo ponto, é chamado de cônica.*

Teorema 7 *O polar de um ponto P com respeito a uma cônica passa através dos pontos de contato das tangentes à cônica através de P , se tais tangentes existirem.*

Prova. Sejam A e B pontos de contato das tangentes através de P .

$AP = a$ e $BP = b$ são as retas auto-conjugadas dos pontos auto-conjugados A e B , respectivamente. Como P pertence às retas a e b , a reta polar de $a \cdot b = P$ necessariamente precisa passar pelos pontos A e B . Portanto $a \cdot b = P$ é pólo de $AB = p$.

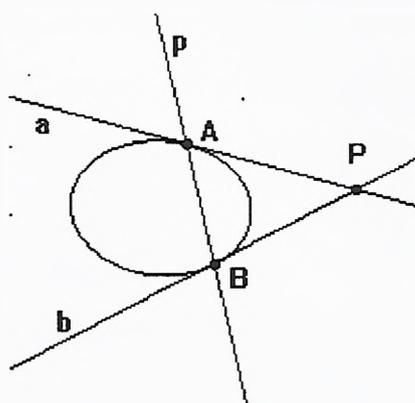


fig.4.7a

Todo ponto X de uma cônica corresponde, numa polaridade qualquer, à tangente à cônica em X . Porque se não, um ponto A da cônica seria o pólo de uma reta a através de A e encontraria a cônica também em um ponto B . B seria então pólo de uma reta b através de B , e então a reta $a = AB$ seria, por definição de polaridade, o polar de $ab = B$. Isto exigiria que a correspondesse a A e B , o que não é possível.

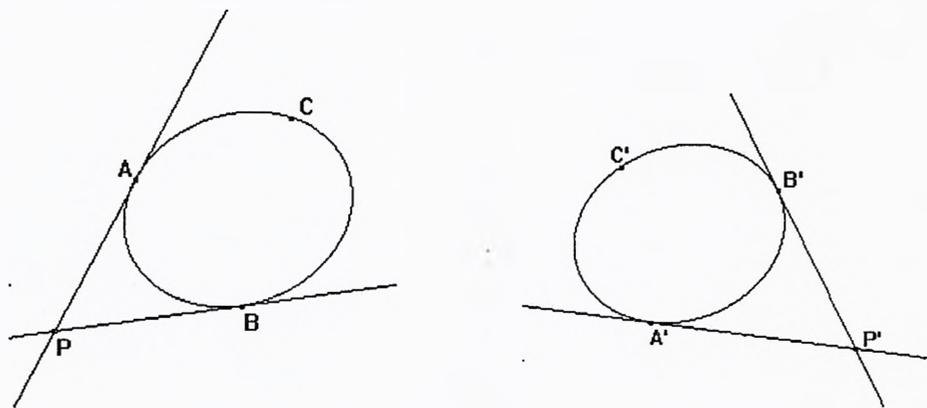
4.8 Transformação Projetiva entre cônicas

Veremos agora que projetividades existem também entre formas uni-dimensionais de segundo grau (referência[16]). Como exemplo típico, a cônica.

Definição 20 *Duas cônicas são ditas projetivas se, a todo ponto de uma, corresponde um ponto da outra, e a toda tangente de uma corresponde uma tangente da outra, de tal modo que esta correspondência pode ser feita por uma colinação projetiva entre os planos das cônicas. A colinação é então a projetividade entre as cônicas.*

Chegamos, então, a um dos objetivos deste capítulo, o Teorema Fundamental da Geometria Projetiva entre Cônicas:

Teorema 8 *Uma projetividade entre duas cônicas é unicamente determinada se três pontos distintos (ou tangentes) de uma se correspondem a três pontos distintos (ou tangentes) da outra.*



Prova. Sejam K, K' duas cônicas, e sejam A, B, C três pontos de K , e A', B', C' os pontos correspondentes de K' . Sejam P e P' os pólos de AB e $A'B'$ com respeito

a K e K' respectivamente. Se a colineação F é definida pela relação $F(ABCP) = A'B'C'P'$ (Teorema Fundamental), é claro que a cônica é transformada por F em uma cônica através dos pontos A', B', C' , com as tangentes $A'P'$ e $B'P'$. Esta cônica é unicamente determinada por essas especificações (três pontos e as tangentes em dois deles - referência [16]). A colineação F transforma então K em K' de tal modo que os pontos A, B, C são transformados em A', B', C' , respectivamente. Suponha agora F' outra colineação que transforma K em K' do modo especificado. Então $F'^{-1}F$ seria uma colineação levando A, B, C, P em A, B, C, P , isto é, $F = F'$.

■

No capítulo 6 veremos uma aplicação muito interessante deste último teorema.

4.9 Curvas Projetivas

Definição 21 Chamaremos de função homogênea de grau n uma função $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n F(x, y, z)$$

para todo número real λ e todo terno (x, y, z) .

Esse polinômio homogêneo tem a forma

$$F(x, y, z) = \sum a_{ij} x^i y^j z^{n-(i+j)}.$$

Observe que cada monômio tem grau n

Definição 22 Definiremos uma curva projetiva (no plano projetivo Π), de grau $n \geq 1$ como o conjunto de pontos $(x, y, z) \in \Pi$ tal que $F(x, y, z) = 0$, onde $F(x, y, z)$ é um polinômio homogêneo de grau n . Em particular, uma reta projetiva em Π é uma curva de grau um.

Definição 23 Uma curva algébrica é uma curva determinada por uma equação polinomial

$$f(x, y) = \sum a_{ij} x^i y^j = 0$$

em x e y .

4.9.1 A curva projetiva determinada por uma curva plana

Dada uma curva algébrica plana de grau n $f(x, y) = 0$, definimos um polinômio homogêneo $F(x, y, z)$ de grau n que determina uma curva projetiva

$$F(x, y, z) = 0.$$

Formalmente

$$F(x, y, z) = z^n f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$$

Exemplo 1 Para encontrar a equação da curva projetiva determinada pela curva plana $y^2 = x^3 + x$, basta determinarmos o grau dessa curva (no caso, 3) e multiplicarmos cada monômio por uma potência de z de forma que cada um deles tenha grau 3. A curva projetiva é então $y^2z = x^3 + xz^2$.

4.9.2 Seções afins de uma curva projetiva

Dada uma curva projetiva γ em Π com equação $F(x, y, z) = 0$, os pontos de γ são $\{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0\}$. Considere o plano afim em \mathbb{R}^3 dado por $\{(x, y, z) \mid ax + by + cz = d\}$, onde $d \neq 0$. Então uma seção afim da curva projetiva γ é a interseção do plano $ax + by + cz = d$ e a superfície $F(x, y, z) = 0$, o que resulta na curva afim α

$$\{(x, y, z) \mid ax + by + cz = d \text{ e } F(x, y, z) = 0\}.$$

A curva projetiva pode ser vista como a união de uma seção afim com o conjunto dos pontos do infinito para essa curva afim. O conjunto dos pontos do infinito para α no plano $ax + by + cz = d$ é

$$\{(x, y, z) \mid ax + by + cz = 0 \text{ e } F(x, y, z) = 0\}.$$

Definição 24 A seção afim da curva projetiva $\{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0\}$ para o plano $ax + by + cz = d$ ($d \neq 0$) é uma curva afim em \mathbb{R}^3 : $\{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0$ e $ax + by + cz = d\}$.

4.9.3 Curvas planas como seções de uma curva projetiva

Um caso muito importante de seção afim ocorre quando o plano afim é $z = 1$. Então uma curva projetiva $F(x, y, z) = 0$ seria a curva plana $F(x, y, 1) = 0$ em \mathbb{R}^2 .

Observe que não podemos considerar essa curva plana se colocarmos $z = 0$ em $F(x, y, z) = 0$.

Os pontos do infinito da curva plana são portanto $\{(x, y, z) \mid z = 0 \text{ e } F(x, y, 0) = 0\}$ em Π .

Teorema 9 Seja $F(x, y, z) = 0$ a curva projetiva determinada pela curva plana $f(x, y) = 0$. Então a seção afim para $z = 1$ de $F(x, y, z) = 0$ é $f(x, y) = 0$. Reciprocamente, seja $f(x, y) = 0$ a seção afim para $z = 1$ da curva projetiva $F(x, y, z) = 0$, para o qual z não é um fator de $F(x, y, z) = 0$, então a curva projetiva determinada por $f(x, y) = 0$ é $F(x, y, z) = 0$.

Prova. (\Rightarrow) Temos formalmente que

$$F(x, y, z) = z^n f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$$

A seção afim para $z = 1$ é

$$F(x, y, 1) = f(x, y)$$

(\Leftarrow) Temos que $f(x, y) = F(x, y, 1)$. Isto determina a curva projetiva

$$z^n f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = z^n F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right) = F(x, y, z)$$

■

4.9.4 Equivalência de curvas

Definição 25 Duas curvas projetivas φ e γ dadas respectivamente por $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$ são equivalentes se $F(x, y, z) = G(u, v, w)$, onde

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

para alguma matriz não-singular M .

Definição 26 Duas curvas planas $f(x, y) = 0$ e $g(x, y) = 0$ são projetivamente equivalentes se as curvas projetivas por elas determinadas são equivalentes.

4.10 Paralelas e Perpendiculares Projetivas

Esta seção tem como objetivo ajudar a entender o lema 6, o principal lema deste trabalho, que estará na seção 6.2.

Observação 1 Quando falarmos em *circunferência*, considere como sendo uma *cônica particular no plano projetivo*, ou seja, uma *circunferência no plano euclideo* mais a *reta do infinito* $[0, 0, 1]$.

Precisamos entender o que seriam as “paralelas” e as “perpendiculares” no plano projetivo, que chamaremos de *paralelas e perpendiculares projetivas*. Esta nomenclatura não é usual, e a estamos introduzindo aqui por conveniência de exposição.

Dada uma reta ordinária l , como traçamos, por um ponto P fora dela, o que corresponderia uma reta “paralela” a l no plano projetivo?

Se elas são “paralelas”, só podem se encontrar no mesmo ponto do infinito, como mostra a figura 4.10a.

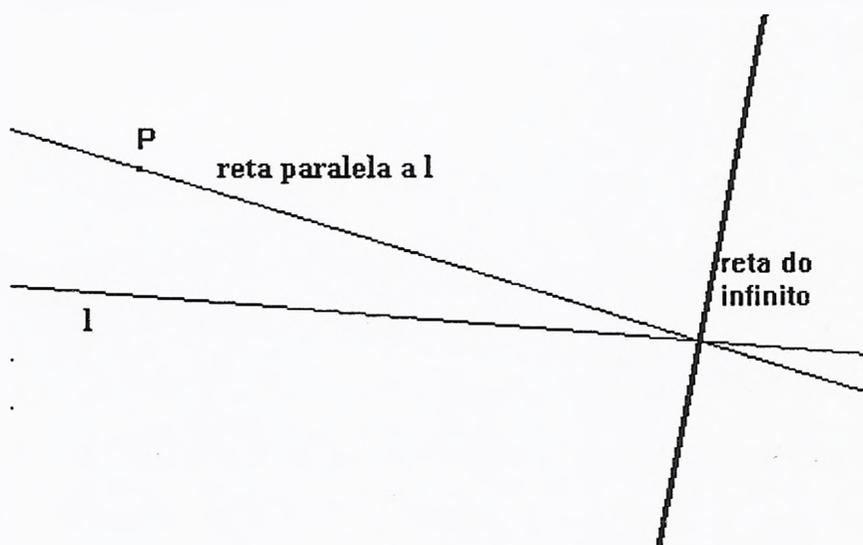


fig.4.10a

Algebricamente duas retas “paralelas” têm coordenadas da forma $[x_0, y_0, z]$ e $[x_0, y_0, w]$, com z e w diferentes de zero.

E como seria, no plano projetivo, o equivalente a uma reta perpendicular a uma outra reta l ?

Considere uma projetividade que leva a circunferência K' e a reta $[0, 0, 1]$ em uma cônica K e uma reta f (projeção de $[0, 0, 1]$).

Seja uma reta l secante ou tangente a K (fig.4.10b e fig.4.10b'). Então a reta polar d do ponto do infinito D da reta l será chamada de *perpendicular projetiva* a l em relação à cônica K .

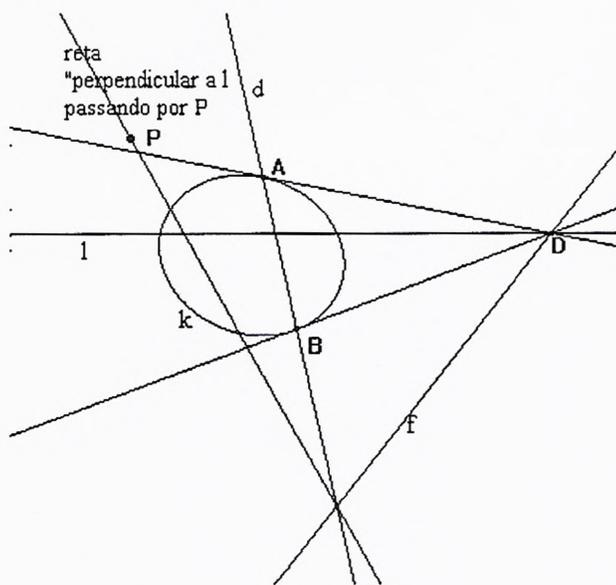


fig.4.10b

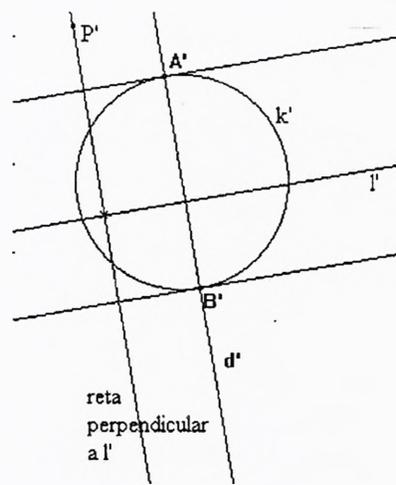


fig.4.10b'

Necessariamente precisa-se considerar a reta l em relação à cônica K (podemos pensar nesta como a imagem da circunferência K').

Isso equivale, no plano euclidiano, a uma circunferência K' , uma reta l' secante ou tangente à K' , e a reta polar d' do ponto do infinito de l' , que é perpendicular à reta l' .

Obtemos as retas polares de um ponto (L) fora da cônica, ligando os pontos A e B de interseção entre K e suas tangentes passando por L (ponto do infinito de l). No plano euclideo, como os pontos A' e B' (diametralmente opostos) são a interseção de K' com as retas tangentes a K' e paralelas a l' , então a reta $A'B'$ é perpendicular a l' .

Uma reta p perpendicular projetiva a l , passando por um ponto P , é a reta paralela à reta AB que passa por P . O ponto do infinito de AB é o mesmo ponto do infinito de p .

Capítulo 5

A reta de Simson-Wallace na Geometria Euclideana

A idéia de fazer projetividades de figuras sem alterar algumas de suas características sugere que procuremos resultados em Geometria Euclideana que envolvam tais características, para que possamos comprová-los na Geometria Projetiva.

Um destes resultados envolve o teorema da reta de Simson-Wallace (SW) com a deltóide de Steiner e o círculo de Feuerbach (círculo dos nove pontos). Escolhemos este, conhecido como teorema de Steiner, pois ele envolve tangência, perpendicularidade, incidência, paralelismo e colinearidade.

O *Círculo de Feuerbach* (fig.5a) é o círculo de passa por *nove pontos* especiais de qualquer triângulo ABC . São eles: os pontos médios M_1, M_2, M_3 de cada lado, os pés das perpendiculares a cada lado e os pontos médios do segmentos formados pelos vértices e o ortocentro H .

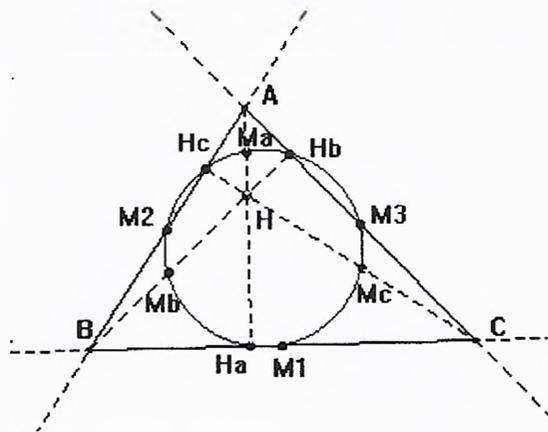


fig.5a

O teorema da reta SW tem o nome do matemático escocês Robert Simson (1687-1768). Por sugestão de Edmond Halley, Simson devotou-se à restauração do trabalho dos geômetras gregos, tais como Euclides e Apolônio. Embora Simson tenha realizado numerosas descobertas na geometria e pudesse ter encontrado uma prova do teorema, não há nenhum registro que ele tenha conseguido prová-lo.

O crédito pertence, provavelmente, a William Wallace¹ (1768-1843), também escocês, e um auto-didata em matemática. Ele publicou o teorema em 1799.



William Wallace

¹<http://scienceworld.wolfram.com/biography/Wallace.html>

Em 1856 Jacob Steiner publicou um artigo provando que a envoltória das retas SW de um triângulo qualquer era uma curva especial de quarto grau chamada hipociclóide tricúspide e hoje é também conhecida como *deltóide de Steiner*.

Nesse capítulo, provaremos de uma maneira simples, baseado no tratamento dado nos artigos [11] e [12], os resultados nomeados acima.

Apresentaremos o resultado no Plano Euclideano e no próximo capítulo faremos uma generalização (original) ao Plano Projetivo.

O teorema da reta SW foi bastante estudado por muitos geômetras nos dois últimos séculos (referência [12]).

5.1 O teorema da reta SW na Geometria Euclideana

Teorema 10 *Dado um triângulo ABC , o lugar geométrico dos pontos X do plano definido por ABC tal que as projeções ortogonais $P \in AB$, $Q \in BC$, $R \in AC$ de X nos três lados (prolongados ou não) do triângulo são colineares é a circunferência K que circunscreve o triângulo ABC . Essa reta PR é chamada de reta SW de X em relação ao triângulo ABC (fig.5.1a).*

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow A\widehat{X}R = 90^\circ - X\widehat{A}R = \\
&= 90^\circ - (180^\circ - X\widehat{A}C) = \\
&= X\widehat{A}C - 90^\circ
\end{aligned}$$

Mas $X\widehat{A}C + X\widehat{B}C = 180^\circ$ se, e somente se, $X \in K$ (pela propriedade do quadrilátero $XACB$) \Rightarrow

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow X\widehat{A}C - 90^\circ = \\
&= (180^\circ - X\widehat{B}C) - 90^\circ = \\
&= 90^\circ - X\widehat{B}C.
\end{aligned}$$

Temos então

$$A\widehat{P}R = 90^\circ - X\widehat{B}C \quad (2)$$

Portanto, usando (1) e (2),

$$A\widehat{P}R = B\widehat{P}Q$$

O que completa a prova do teorema. ■

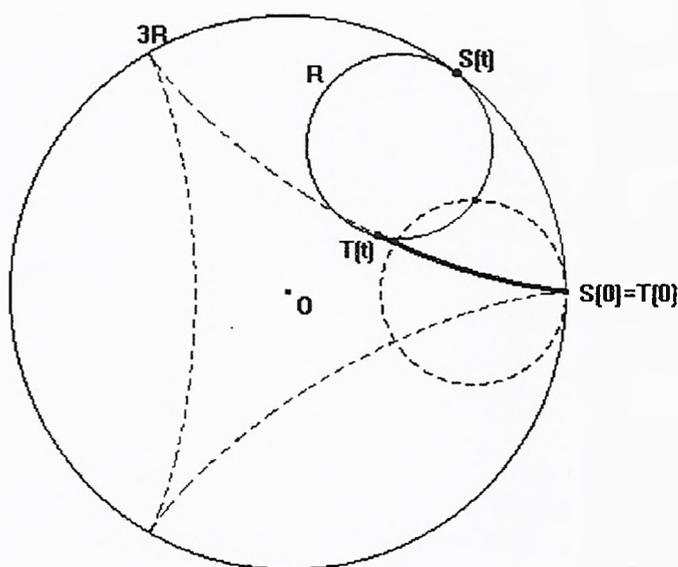
A seguir queremos esclarecer alguns conceitos e definições para então provarmos o teorema de Steiner com os lemas 3, 4 e 5.

Teorema 11 *Seja ABC um triângulo qualquer. Então a envoltória das retas SW do triângulo ABC é uma deltóide δ (hipociclóide tricúspide) tangente ao círculo de Feuerbach F .*

5.2 A deltóide

Considere o sistema composto por uma moeda que se move rolando sem deslizar dentro de uma argola cujo raio é o triplo daquele da moeda. Suponha ainda que colocamos tinta na moeda exatamente no ponto $T_{(0)}$ em que ela faz contato com a argola no instante inicial $t = 0$, de forma que este ponto deixará um rastro por onde passa. Esta situação está ilustrada na figura abaixo. O ponto de contato entre a argola e a moeda no instante t é chamado de $S_{(t)}$, e o lugar onde encontramos o ponto marcado na moeda no instante t chamaremos de $T_{(t)}$. Na figura vemos em pontilhado o caminho a ser percorrido por este ponto.

Definição 27 *Tal figura geométrica é chamada hipociclóide tricúspide ou deltóide.*



deltóide

Quando a moeda rola por fora da argola, a curva é chamada *epiciclóide* e quando rola por dentro é uma *hipociclóide*.

A deltóide é uma curva contínua que toca o círculo maior em três pontos que são vértices de um triângulo equilátero inscrito. Isso ocorre porque o comprimento da circunferência maior é exatamente o triplo do comprimento da circunferência interna.

Considere a deltóide δ construída abaixo:

Seja uma circunferência ($3R$) de raio $3r$ fixa (fig.5.2a), com o centro O na origem dos eixos coordenados x, y , e um disco que rola (R) de raio r , de centro variável X a uma distância $2r$ de O , que parte do ponto fixo $S_{(0)} = (3r, 0)$. O ponto marcado T em (R) descreverá uma deltóide.

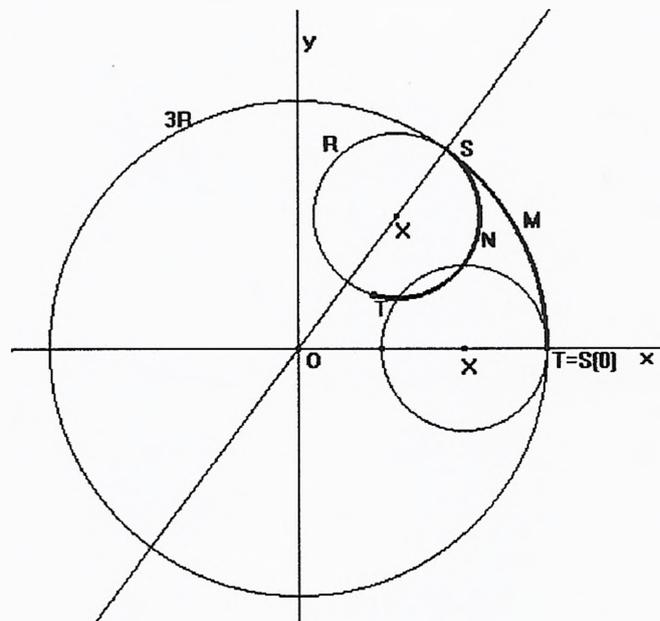


fig.5.2a

Observe que quando a circunferência (R) rola, o arco \widehat{SNT} , no círculo (R) é igual ao arco $\widehat{SM}S_0$, no círculo ($3R$). Então, a relação entre os respectivos ângulos é

$$\widehat{SXT}.r = \widehat{SOS_0}.3r$$

e se definirmos $\widehat{SOS}_0 = \theta$, então temos (fig.5.2b)

$$S\widehat{X}T = 3\theta$$

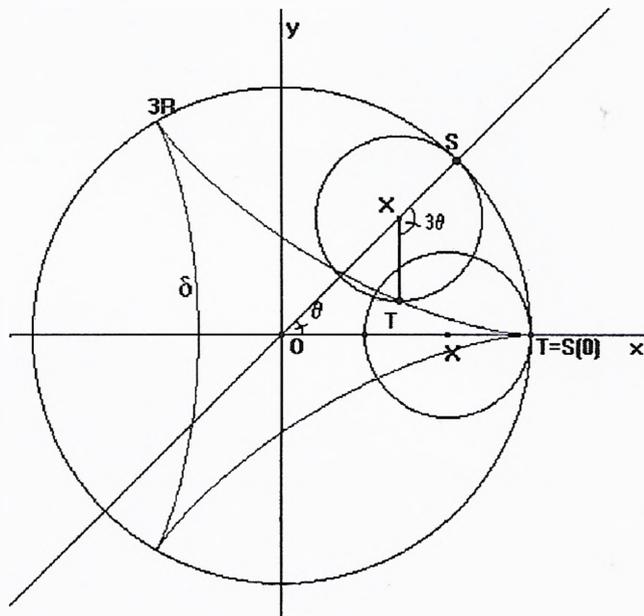


fig.5.2b

A equação da deltóide $\delta(\theta)$ (em função de θ) se dá pelas coordenadas do ponto T , que é a soma dos vetores \overrightarrow{OX} e \overrightarrow{XT} :

$$\delta(\theta) = (2r \cos \theta, 2r \sin \theta) + (r \cos(-2\theta), r \sin(-2\theta)) =$$

$$= r(2 \cos \theta + \cos 2\theta, 2 \sin \theta - \sin 2\theta)$$

E os vetores tangentes à deltóide são

$$\delta'(\theta) = 2r(-\sin \theta - \sin 2\theta, \cos \theta - \cos 2\theta)$$

Lema 1 *As retas tangentes à deltóide δ são as retas perpendiculares à reta ST no ponto T .*

Prova. O ângulo do vetor \overrightarrow{ST} com o eixo x é $\frac{3\theta}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\theta + \pi}{2}$ (fig.5.2c)

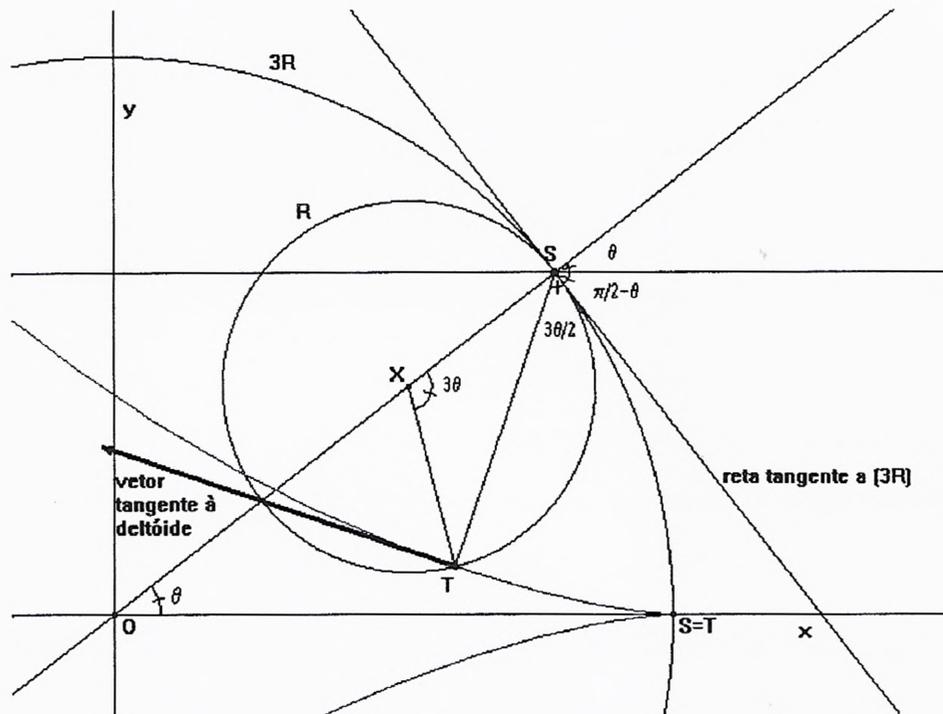


fig.5.2c

Então a direção do vetor

$$\overrightarrow{ST} = \left(\cos \frac{-(\theta + \pi)}{2}, \sin \frac{-(\theta + \pi)}{2} \right) = \left(-\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2} \right)$$

Fazendo o produto escalar entre \overrightarrow{ST} e $\delta'(\theta)$ temos:

$$\begin{aligned} & \left(-\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot (-\sin \theta - \sin 2\theta, \cos \theta - \cos 2\theta) = \\ & = \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta + \sin \frac{\theta}{2} \sin 2\theta - \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta + \cos \frac{\theta}{2} \cos 2\theta = \\ & = - \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \theta - \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \right) + \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos 2\theta + \sin \frac{\theta}{2} \sin 2\theta \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\cos\left(\theta + \frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{2} - 2\theta\right) = \\
&= -\cos\frac{3\theta}{2} + \cos\frac{-3\theta}{2} = -\cos\frac{3\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2} = 0
\end{aligned}$$

Portanto ST é sempre perpendicular às retas tangentes à deltóide δ . ■

5.2.1 A envoltória

Uma família (diferenciável) de retas a um parâmetro em R^2 é uma correspondência que a cada $t \in I$ (intervalo em R) associa um ponto $g(t) \in R^2$ e um vetor unitário $v(t) \in T_{g(t)}(R^2)$, que são funções diferenciáveis de t ; a reta $R_t = \{g(t), v(t)\}$ que passa pelo ponto $g(t)$ e é paralela ao vetor $v(t)$ é chamada a reta da família em $t \in I$.

Definição 28 Uma envoltória de uma família de retas a um parâmetro é uma curva parametrizada $f : I \rightarrow R^2$, satisfazendo às seguintes condições:

- i) o ponto $f(t)$ pertence à reta R_t ;
- ii) se o vetor $f'(t) \neq 0$ que parte do ponto T , então a reta que o contém coincide com R_t .

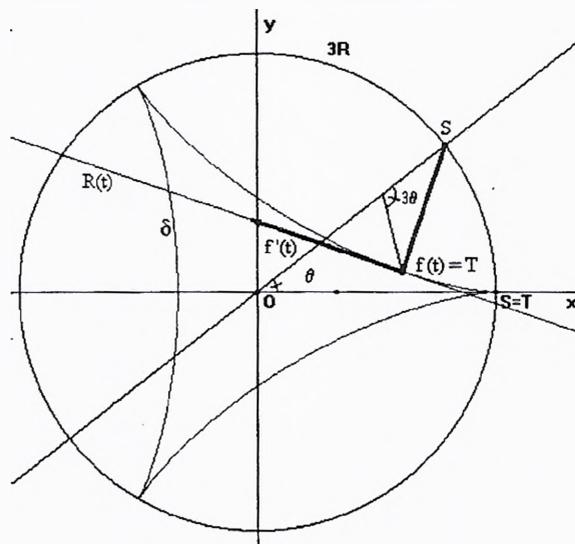


fig.5.2.1a

Então a envoltória das retas perpendiculares às retas ST (os pontos S e T variam) no ponto T é a deltóide $\delta(\theta) = r(2 \cos \theta + \cos 2\theta, 2 \sin \theta - \sin 2\theta)$, onde

$$\begin{aligned} t &= \theta, \\ I &= [0, 2\pi], \\ g(t) &= f(t) = T = \delta(\theta_t), \\ v(t) &= \delta'(\theta)/2r. \end{aligned}$$

Agora queremos ver que

Lema 2 *A envoltória das retas SW para um triângulo equilátero ABC é uma deltóide, tangente ao círculo de Feuerbach F .*

Prova. Basta provarmos que as retas perpendiculares à reta ST (do lema anterior) no ponto T são as retas SW dos pontos X em relação ao triângulo ABC .

Considere a circunferência $(2R)$ com centro em $O = (0, 0)$ de raio $2r$, o triângulo ABC equilátero e inscrito em $(2R)$ de forma que $A = (2r, 0)$, $B = (-r, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $C = (-r, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

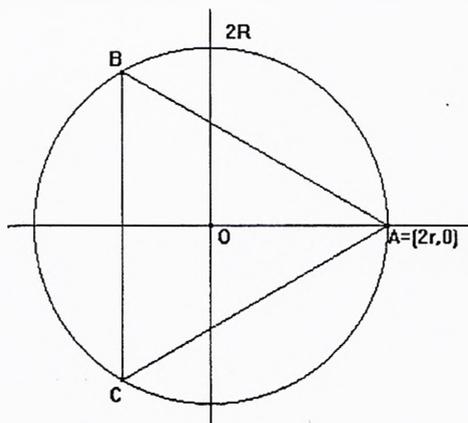


fig.5.2.1a

Quando o ponto variável X na circunferência ($2R$) estiver em A , a reta SW de X em relação ao triângulo ABC obviamente será a reta OA .

Se $X \neq A$, onde o ângulo $X\hat{O}A = \theta$, considere Q ponto em BC de forma que XQ seja perpendicular a BC (fig.5.2.1b).

Então as coordenadas de Q são $(-r, 2r \operatorname{sen} \theta)$

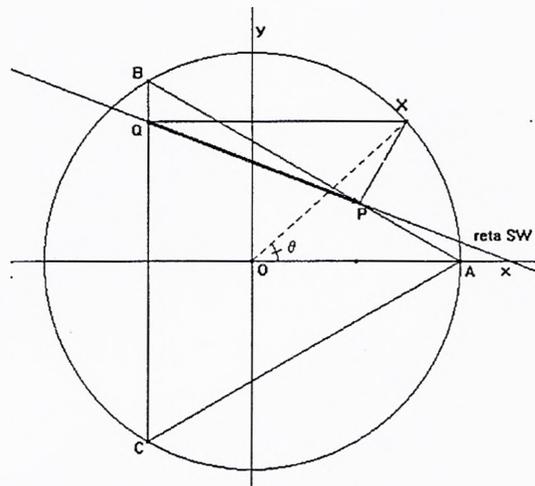


fig.5.2.1b

O coeficiente angular da reta AB é $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

A equação da reta que passa por X e é perpendicular à reta AB em P é

$$y - 2r \operatorname{sen} \theta = \sqrt{3}(x - 2r \cos \theta)$$

A equação de AB é

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2r)$$

Então as coordenadas do ponto P (projeção ortogonal do ponto X na reta AB) são:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}\sqrt{3}r \operatorname{sen} \theta + \frac{3}{2}r \cos \theta \\ y &= \frac{1}{2}\sqrt{3}r + \frac{1}{2}r \operatorname{sen} \theta - \frac{1}{2}\sqrt{3}r \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3(\cos \theta - \cos 2\theta + \cos^2 \theta - \cos \theta \cos 2\theta - \sin^2 \theta - \sin \theta \sin 2\theta) + \\
&+ \sqrt{3}(-\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos 2\theta + \sin \theta + \sin 2\theta - \cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin 2\theta) \\
&= 3(-\cos 2\theta + \cos 2\theta + \cos \theta - \cos \theta(2\cos^2 \theta - 1) - 2\sin^2 \theta \cos \theta) \\
&+ \sqrt{3}(-\sin 2\theta + \sin 2\theta + \sin \theta(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \sin \theta - 2\cos^2 \theta \sin \theta) \\
&= 3(-\cos 2\theta + \cos 2\theta + \cos \theta - \cos \theta(2\cos^2 \theta - 1) - 2(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta) \\
&+ \sqrt{3}(-\sin 2\theta + \sin 2\theta + \sin \theta(1 - 2\sin^2 \theta) + \sin \theta - 2(1 - \sin^2 \theta) \sin \theta) \\
&= 3(0) + \sqrt{3}(0) = 0
\end{aligned}$$

Então todas as retas SW são tangentes à δ . Esta é portanto a deltóide que procurávamos.

Para sabermos quais são os pontos comuns entre a deltóide de equação

$\delta = (2r \cos \theta + r \cos 2\theta, 2r \sin \theta - r \sin 2\theta)$ e o círculo de Feuerbach

$F = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ basta resolvermos o sistema:

$$2r \cos \theta + r \cos 2\theta = r \cos \theta$$

$$2r \sin \theta - r \sin 2\theta = r \sin \theta$$

$$\cos \theta + \cos 2\theta = 0$$

$$\sin \theta - \sin 2\theta = 0$$

$$2 \cos^2 \theta - \cos \theta - 1 = 0 \tag{1}$$

$$\sin \theta(1 - 2 \cos \theta) = 0 \tag{2}$$

de (1) temos:

$$\theta = \pm \frac{\pi}{3} \quad \text{ou}$$

$$\theta = \pi$$

e de (2) temos:

$$\theta = \pm \frac{\pi}{3} \quad \text{ou}$$

$$\theta = \pi \quad \text{ou}$$

$$\theta = 0$$

Então as soluções do sistema são $\theta = \frac{\pi}{3}$, ou $\theta = -\frac{\pi}{3}$, ou $\theta = \pi$

Portanto, os pontos de contato entre δ e F são os pontos médios dos lados do triângulo ABC .

Queremos ver agora que a deltóide é tangente ao círculo F .

Quando o ponto X está numa posição tal que $Q = B$ (fig.5.2.1d) a reta SW é o lado AB . O ângulo $\widehat{ABX} = 30^\circ$ (inscrito) $\Rightarrow \widehat{AOX} = 60^\circ$ (ângulo central) $\Rightarrow \widehat{SXT} = 180^\circ \Rightarrow$ os pontos S, X, T, O estão alinhados. Como $\widehat{XAB} = 30^\circ$, o triângulo ABX é isósceles, e como $\widehat{XTA} = 90^\circ$, $T = C_m$ (ponto médio de AB), exatamente onde F (círculo de Feuerbach) é tangente com AB . Analogamente para os outros lados. Portanto δ é tangente a F .

■

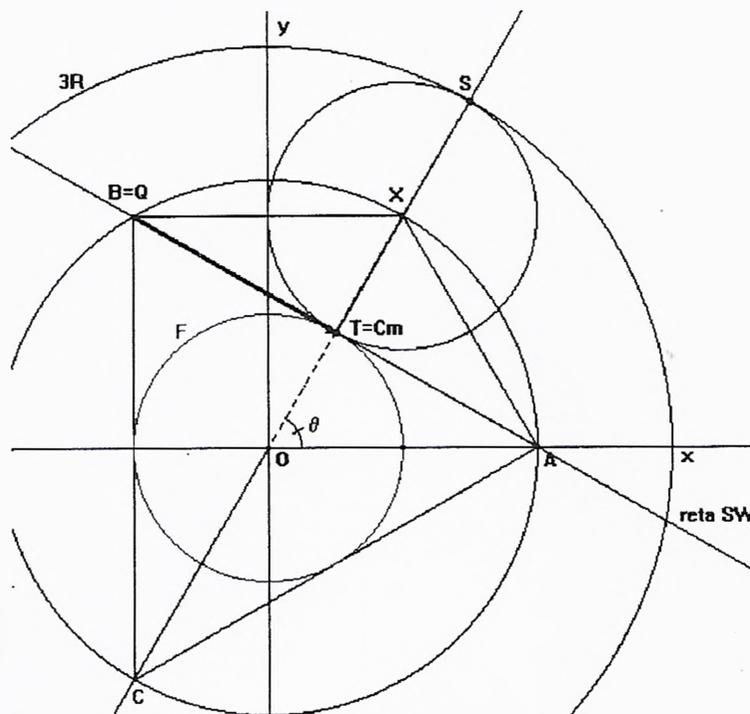


fig.5.2.1d

Com isso demonstramos o teorema 11 para um triângulo equilátero. Vamos agora estender o teorema para um triângulo qualquer, reduzindo-o ao caso que acabamos de demonstrar.

5.2.2 Translações de δ , F e do triângulo ABC

Para os lemas que se seguem, precisamos da seguinte notação.

Sejam um triângulo ABC qualquer e K sua circunferência circunscrita (fig.5.2.2a). Tome um triângulo $A'B'C'$ também inscrito em K de modo que a reta $B'C'$ seja paralela à reta BC e $A = A'$. Seja v , vetor perpendicular ao lado BC de tal forma que a translação paralela determinada por v transforma a reta BC na reta $B'C'$. Chamaremos esta transformação de $f(A, v)$.

Este lema inicia as idéias para provarmos o teorema 11, finalizando no lema 5.

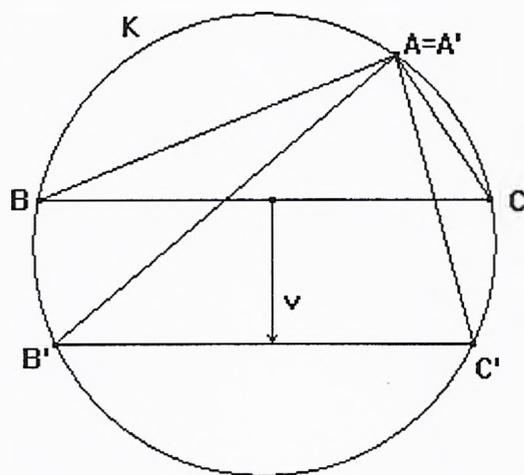


fig.5.2.2a

Lema 3 Cada reta de SW t' de um ponto X qualquer de K em relação ao triângulo $A'B'C'$ se obtém por uma aplicação do vetor v sobre a reta de SW t do mesmo ponto X em relação ao triângulo ABC . Portanto a envoltória das retas SW do triângulo $A'B'C'$ também se obtém pela translação da envoltória das retas SW do triângulo ABC determinada por v .

Prova. Na figura 5.2.2b as retas t e t' de SW de X com respeito aos triângulos ABC e $A'B'C'$ são respectivamente PQ e $P'Q'$. Como o quadrilátero $XPQB$ é inscrito (círculo de diâmetro XB), o ângulo $X\widehat{Q}P$ é igual ao ângulo $X\widehat{B}P$. Assim como o ângulo $X\widehat{Q}'P' = X\widehat{B}'P' = X\widehat{B}P$ (ângulo inscrito do mesmo arco), portanto $X\widehat{Q}P = X\widehat{Q}'P'$ e t é paralelo a t' . Então t' se obtém de t por uma translação determinada por v correspondente a QQ' .

■

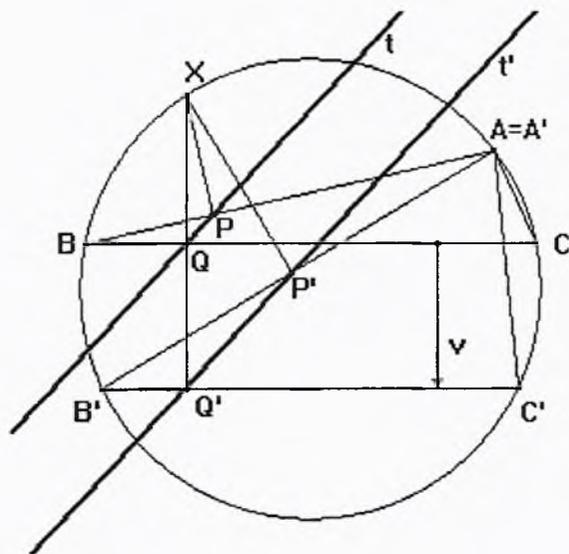


fig.5.2.2b

Lema 4 O círculo de Feuerbach F' do triângulo $A'B'C'$ também se obtém pela translação do círculo de Feuerbach F do triângulo ABC pelo vetor v .

Prova. Considere os triângulos ABC e $A'B'C'$ e os pontos médios de seus lados $A_m \in BC$, $B_m \in AC$, $C_m \in AB$, $A'_m \in B'C'$, $B'_m \in A'C'$, $C'_m \in A'B'$. Os raios de F e F' são iguais e sempre medem a metade do raio de K , pois F (analogamente para F') circunscreve o triângulo $A_mB_mC_m$ (fig.5.2.2c) que tem os lados com a metade da medida dos lados do triângulo ABC (circunscrito por K).

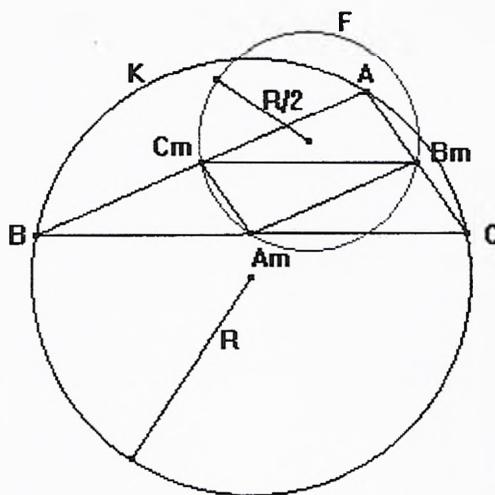


fig.5.2.2c

Como F passa pelo ponto A_m e pela projeção ortogonal H de A em BC (fig.5.2.2d), o centro O de F está na mediatriz m do segmento A_mH . Mas o centro O' de F' também está em m , pois F' passa por A'_m e H' (projeção ortogonal de A sobre $B'C'$) e $A_mA'_m$ é paralelo a HH' . Como os raios são iguais, a distância de O ao lado BC é igual à distância de O' ao lado $B'C'$. Portanto F' é obtido pela translação de F por v .



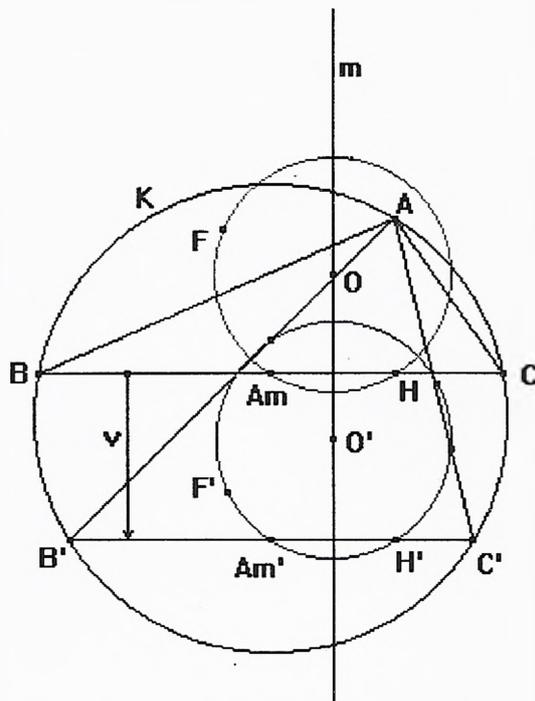


fig.5.2.2d

Seja $f(A, v)$ a transformação do triângulo ABC no triângulo $A'B'C'$, pelo vetor v , mantendo fixo o vértice $A = A'$ e substituindo o lado BC pelo lado $B'C'$ como indicado nos lemas anteriores.

Lema 5 *Seja ABC um triângulo qualquer e sua circunferência circunscrita K . Então existe uma transformação $f(A, v_1)$ que leva o triângulo ABC no triângulo $AB'C'$ e outra $f(B', v_2)$ que transforma o triângulo $B'A'C'$ no triângulo equilátero $A''B'C''$, inscrito no mesmo círculo K .*

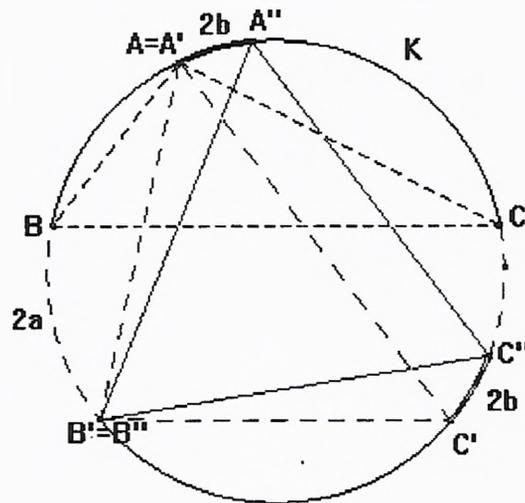


fig.5.2.2e

Prova. Sejam $2a$ e $2b$ os arcos correspondentes às transformações $f(A)$ e $f(B')$. Observando na figura 5.2.2e os valores dos ângulos dos triângulos sucessivos ABC , $A'B'C'$, $A''B''C''$ temos:

$$\widehat{A'} = \widehat{A} - 2a, \quad \widehat{B'} = \widehat{B} + a, \quad \widehat{C'} = \widehat{C} + a$$

$$\widehat{A''} = \widehat{A} - 2a + b, \quad \widehat{B''} = \widehat{B} + a - 2b, \quad \widehat{C''} = \widehat{C} + a + b$$

Para que tenhamos $\widehat{A''} = \widehat{B''} = \widehat{C''} = 60^\circ$, basta resolver o sistema para a e b :

$$\widehat{A} - 2a + b = 60$$

$$\widehat{B} + a - 2b = 60$$

$$\widehat{C} + a + b = 60$$

E temos:

$$a = \frac{180 - \widehat{B} - 2\widehat{C}}{3}$$

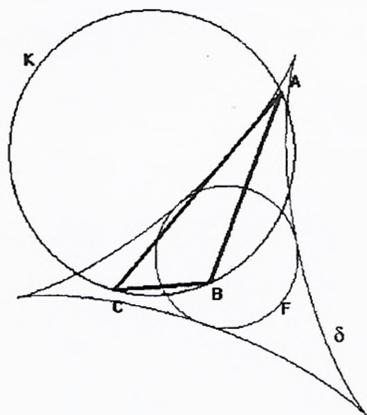
$$b = \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{3}$$

■

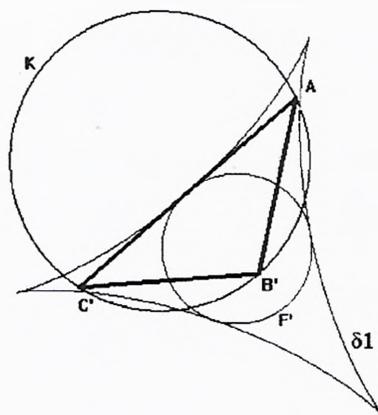
Agora provaremos o teorema 11:

Seja ABC um triângulo qualquer. Então a envoltória das retas SW do triângulo ABC é uma deltóide δ (hipociclóide tricúspide) tangente ao círculo de Feuerbach F .

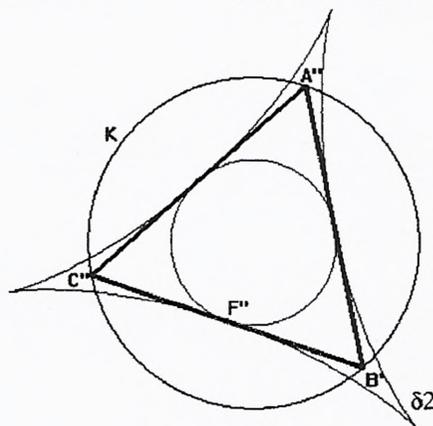
Com efeito, dado um triângulo ABC qualquer, sua circunferência circunscrita K , sua deltóide δ e seu círculo de Feuerbach F , existem transformações $f(A, v_1)$ e $f(B', v_2)$, tal que $T = f(B', v_2) \cdot f(A, v_1)$ leva o triângulo ABC num triângulo equilátero $A''B''C''$. Temos a deltóide δ_2 e o círculo F'' do triângulo $A''B''C''$. Então por T^{-1} , a deltóide δ_2 e o círculo de Feuerbach F'' se transformam na deltóide δ e no círculo F do triângulo ABC .



triângulo ABC qualquer



$f(A, v_1)$ aplicado em ABC



$f(B'v_2)$ aplicado em $AB'C'$

Capítulo 6

A reta SW na Geometria Projetiva

Queremos provar que os teoremas 10 e 11 valem na Geometria Projetiva. Uniremos estes em um único teorema que chamaremos de Simson-Wallace-Steiner (SWS).

Existe uma versão algébrica deste resultado, que foi demonstrado em 1997 por Giering, Oswald [10]. Mas nosso intuito é prová-lo de uma maneira geométrica utilizando o (TFGPC). A nossa prova é mais simples, e com ela obtemos imediatamente informações mais fortes do que em [10].

6.1 Teorema SWS algebricamente

A prova algébrica do resultado citado acima pode ser encontrado na referência [10].

Nela, o autor considera um “ortocentro projetivo” Z e um eixo f (reta do infinito). Com isso traça as “paralelas” às alturas para obter perpendiculares aos lados e então os pontos P, Q, R da reta SW. Mas nessa prova o autor exclui o caso em que o ortocentro se encontra em um dos vértices, que é coberto pela nossa demonstração.

6.2 Teorema SWS via projeção (Geometricamente)

Provaremos que sempre existe uma projetividade Ψ do espaço projetivo no espaço euclideo.

Conseqüentemente temos a inversa Ψ^{-1} que leva o caso euclideo, onde sabemos que o teorema vale, no caso projetivo (uma cônica qualquer e uma reta do infinito). Então tudo o que vale para o Plano Euclideo, em termos de incidência, tangência e colinearidade, valerá no Plano Projetivo.

Observe que no caso euclideo a reta do infinito $[0, 0, 1]$ é externa à circunferência. Portanto no caso projetivo a reta do infinito sempre estará externa à cônica.

A reta do infinito no plano projetivo a que nos referimos é simplesmente a projeção da reta $[0, 0, 1]$ do caso euclideo, já que no plano projetivo não temos a distinção das retas.

Nossa prova depende de um lema inicial, que é um corolário do TFGPC (ver capítulo 1) e das idéias da seção 4.10.

Lema 6 *Dadas uma circunferência K' , uma cônica K e uma reta f no plano projetivo, com f exterior a K ($f \cap K = \emptyset$), existe uma projetividade tal que a imagem da cônica K é a circunferência K' , e a imagem de f é a reta $[0, 0, 1]$.*

Prova. Tome um ponto $S \in f$ e sua reta polar s em relação a K (fig.6.2a). Sejam G e H os pontos de interseção de s e K (existem já que f é exterior a K) e $T = f \cap s$. Tome a reta polar t do ponto T . Seja I um dos dois pontos de interseção de t com K e seja $O = s \cap t$.

Então a projetividade Ψ que estamos procurando é $GHI \bar{\wedge} G'H'I'$. Com isso, garantimos que os pontos S' e T' (projeções de S e T , respectivamente) estão na reta $[0, 0, 1]$, conseqüentemente, a reta f será levada na reta $[0, 0, 1]$, e a cônica K é projetada na circunferência K' .

■

Teorema 12 *Dadas, no plano projetivo, uma cônica K e um triângulo ABC com seus vértices em K traçamos de um ponto X as perpendiculares projetivas aos lados AB, BC, CA . Então os pés dessas perpendiculares $P \in AB, Q \in BC, R \in AC$ estão numa reta.- a reta Simson-Wallace de X - se, e somente se, X está em K . A envoltória das retas SW de todos os pontos de K em relação ao triângulo ABC é uma curva projetiva Λ equivalente à deltóide (ver definição 26), e tangente à cônica projetiva F equivalente ao círculo de Feuerbach.*

Prova. Com o resultado do lema, projetamos um caso geral no caso particular, que se encontra no plano euclídeano mais a reta $[0, 0, 1]$. E tudo o que vale para o Plano Euclídeano, em termos de incidência e colinearidade, vale no Plano Projetivo, via transformação Ψ^{-1} (citada no lema 6 - fig.6.2c e fig.6.2d). A circunferência se transforma numa cônica, o triângulo $A'B'C'$ continua sendo um triângulo ABC , a reta $[0, 0, 1]$ vai numa reta externa à K , os pés das perpendiculares vão na reta SW projetiva, o círculo de Feuerbach F' vai na cônica F .

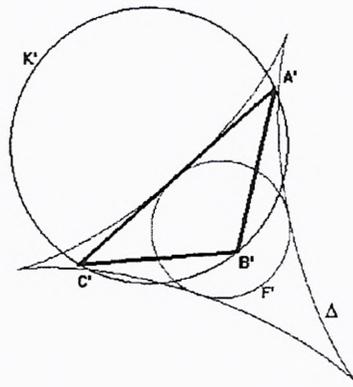


fig.6.2c

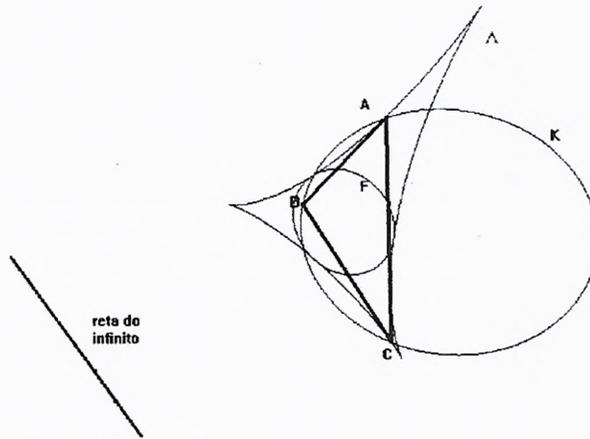


fig.6.2d

A deltóide δ no plano euclideo é uma curva de quarto grau de equação cartesiana:

$$\delta(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 8ax(x^2 - 3y^2) + 18a^2(x^2 + y^2) - 27a^4 = 0,$$
 segundo referência [14], onde a é o raio do círculo interno que rola internamente à circunferência externa de raio $3a$ (ver deltóide, seção 5.2). Então sua curva projetiva Δ terá equação $\Delta(x, y, z) = z^4 \delta\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ - conforme seção de curvas projetivas. A curva Δ será projetada em uma outra curva projetiva Λ de quarto grau (por Ψ^{-1}) que claramente será uma *curva projetiva equivalente* a Δ , pois Ψ^{-1} é representada algebricamente por uma matriz não-singular (ver teorema 3).

Com isso provamos o teorema 12.

Observações sobre a projeção do círculo de Feuerbach:

Temos que Ψ define a projetividade entre os planos de ABC e de $A'B'C'$.

O ponto médio M'_a de $B'C'$ é a interseção das diagonais do paralelogramo $A'B'C'D'_a$, onde as diagonais são $B'C'$ e $A'D'_a$, como mostra a figura 6.2e.

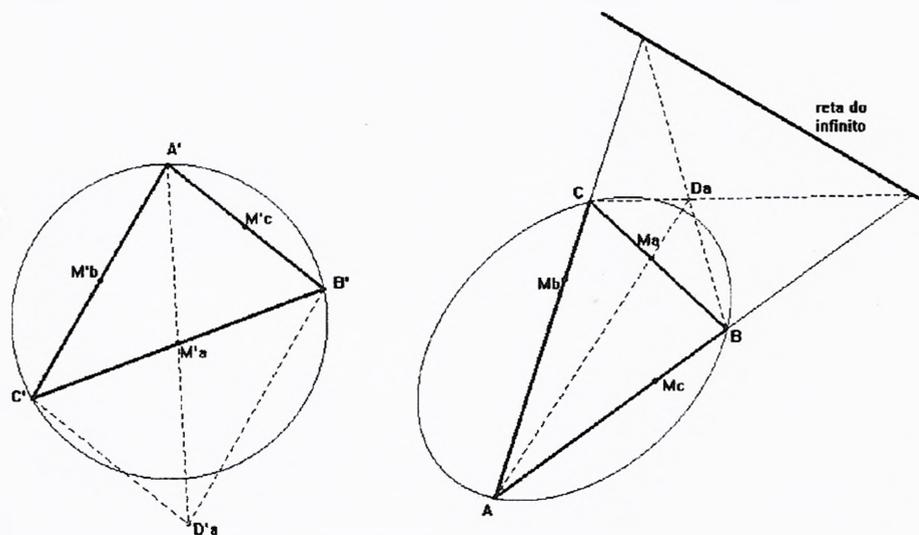


fig.6.2e

Então o *ponto médio projetivo* do lado BC é o ponto diagonal M_a do quadrângulo $ABCD_a$. A reta BD_a é a *paralela projetiva* do lado AC passando por B , assim como CD_a é a paralela projetiva ao lado AB passando por C . As retas BC e AD_a são as diagonais do quadrângulo $ABCD_a$. Analogamente obtemos os outros pontos médios projetivos M_b, M_c .

Os pontos H'_a, H'_b, H'_c são as projeções perpendiculares dos pontos A', B', C' nos lados $B'C', C'A', A'B'$ respectivamente. E seus pontos projetivos, com relação à cônica K , são H_a, H_b, H_c que foram obtidos conforme explica a seção 4.10 (fig.6.2f).

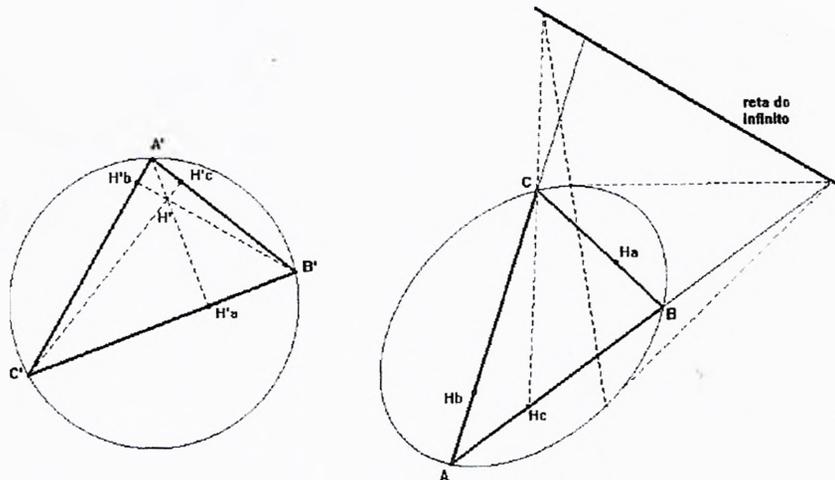


fig.6.2f

O ortocentro projetivo H é a interseção de H_bB com H_cC .

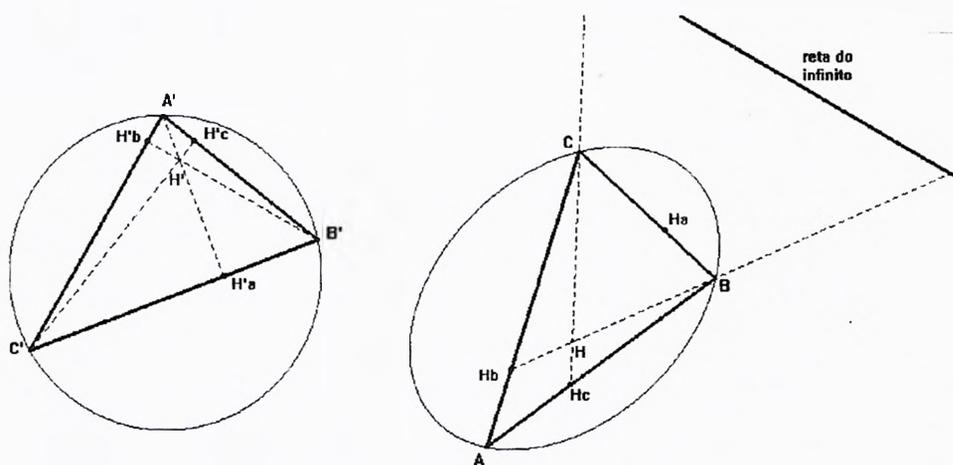


fig.6.2g

Os pontos médios entre o ortocentro H' e os pontos A' , B' , C' são N'_a , N'_b , N'_c (fig.6.2h). E suas projeções são N_a , N_b , N_c , obtidos como os pontos M_a , M_b , M_c .

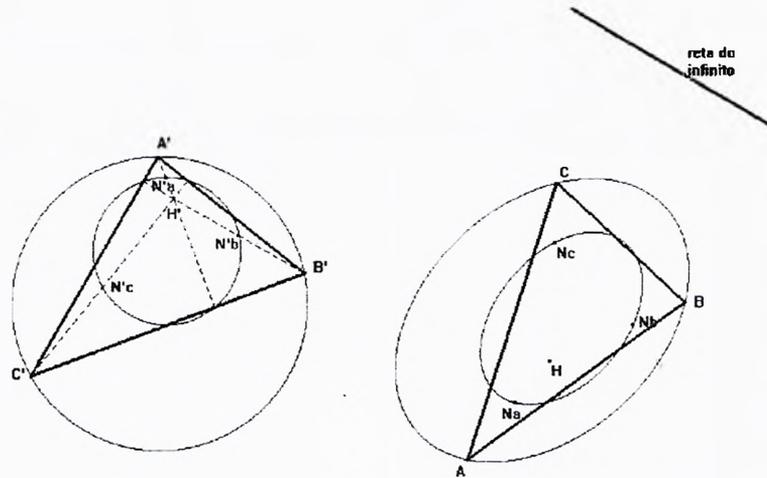


fig.6.2h

A cônica definida por quaisquer 5 desses 9 pontos é exatamente a cônica F , projetada do círculo de Feuerbach. Pois sabemos que F passa por esses 9 pontos e uma cônica é definida unicamente por 5 pontos, conforme a referência [16].

Como uma cônica é definida por cinco pontos, F só pode ser a curva projetiva do círculo de Feuerbach F' (fig.6.2i).

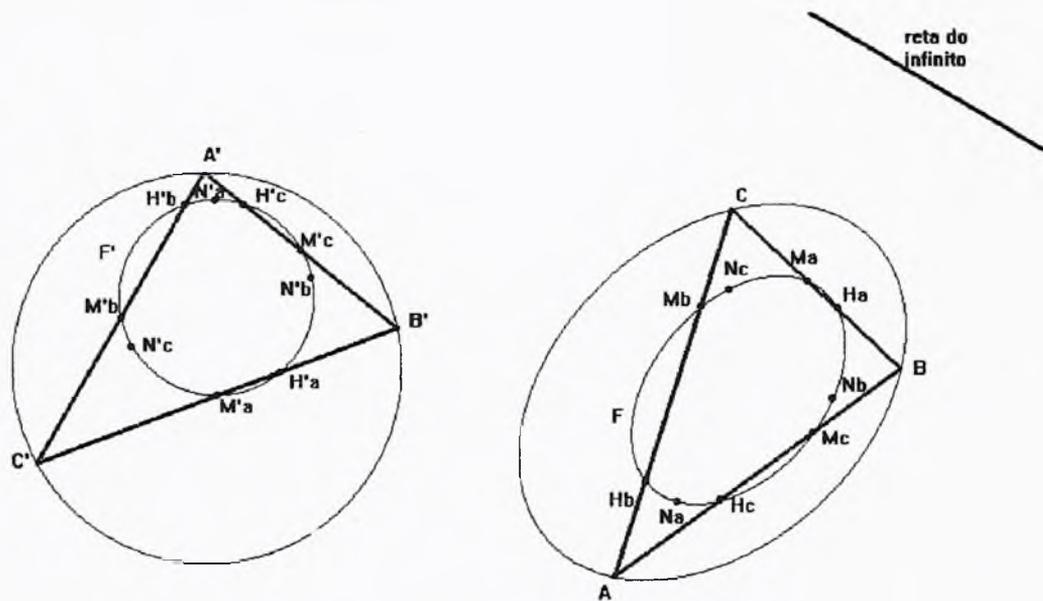


fig.6.2i

Referências Bibliográficas

- [1] BOYER, CARL B., **História da Matemática**, tradução Elza F. Gomide, editora Edgard Blucher Ltda. São Paulo, 1968.
- [2] CARMO, M. do, **Elementos de Geometria Diferencial**, Rio de Janeiro, 1971.
- [3] COOLIDGE, J. LOWELL, **A History of Geometrical Methods**, Dover Publications Inc. New York, 1963.
- [4] COURANT, RICHARD and ROBBINS, HERBERT, **What is Mathematics**, revisado por Ian Stewart, Oxford University Press, 1996.
- [5] COXETER, H.S.M., **Projective Geometry**, Blaisdell Publishing Company, University of Toronto, 1964.
- [6] COXETER, H.S.M, **The Real Projective Geometry Plane**, second edition by Cambridge University Press, 1955.
- [7] DÖRRIE, HEINRICH, **100 Great Problems of Elementary Mathematics - their history and solution**, Dover Publications, Inc., New York, 1965, traduzido por David Antin; originalmente publicado na Alemanha sob o título *Triumph der Mathematik*, 1958, por Physica-Verlag, Würzburg.
- [8] EVES, J. HOWARD, **An Introduction to the History of Mathematics**, Saunders College Publishing, a division of Holt, Rinehart and Winston Inc., Orlando, Flórida, 1990.
- [9] FIELD, J. V. & GRAY J. J., **The Geometrical Work of Girard Desargues**, Springer-Verlag New York, 1987.

- [10] GIERING, OSWALD, **Affine and Projective Generalization of Wallace Lines**, *Journal for Geometry and Graphics - Vol. 1 No.2, 119-133*, Center of Mathematical Sciences, Munich University of Technology, 1997.
- [11] GUZMÁN, MIGUEL de, **The envelope of the Wallace-Simson lines of a triangle**, (Preliminary version, December 1998), Universidad Complutense de Madrid, <http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/deltoide121298/00delten.htm>.
- [12] GUZMÁN, MIGUEL de, **A simple proof of the Steiner theorem on the deltoid**, (Preliminary version, December 1998), Universidad Complutense de Madrid, <http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/deltoide121298/00delten.htm>.
- [13] J.W. ARCHBOLD, M.A., **Introduction to the Algebraic Geometry of a Plane**, Edward Arnold & CO., London, 1948.
- [14] LAWRENCE, J.DENNIS, **A Catalog of Special Plane Curves**, Dover Publications, Inc., New York, 1972, pg. 132.
- [15] RUTTER, JOHN W., **Geometry of Curves**, Chapman & Hall mathematics series, New York, 1935.
- [16] VEBLER, OSWALD and YOUNG, JOHN WESLEY, **Projective Geometry - Vol.1**, Ginn and Company, New York, 1910.