

Um Estudo de Caso Sobre o Ensino-Aprendizagem dos Diferentes Significados de Frações em uma Escola de Educação Básica

Fabio Menezes¹
professorfabioms@gmail.com

Lucas Moraes²
moraesufrj91@gmail.com

Resumo

Este trabalho investigou, junto a 2 alunos do sétimo ano, 2 alunos do oitavo ano e 1 aluno do nono ano de escolaridade do Ensino Fundamental de uma Escola Municipal de Duque de Caxias, quais dos significados sobre frações que estes alunos demonstraram ter o maior domínio, ou não possuem, e quais os mais presentes dentre eles, considerando como significados: relação parte-todo, operador multiplicativo, quociente/número, razão e probabilidade. Foram analisados os livros didáticos usados por esses alunos, os resultados de tarefas propostas e as respostas verbais dadas em entrevistas sobre estas tarefas. Acreditamos que trouxemos contribuições para a formação de professores que ensinam Matemática e, possivelmente, para a produção de novos livros didáticos a fim de cooperar para a melhor compreensão, construção e desenvolvimento do conceito de fração e de número racional nas escolas.

Abstract

This work investigated, together with 2 students of the seventh grade, 2 students of the eighth grade and 1 student of the ninth grade of Elementary School in a Municipal School of Duque de Caxias, which of the meanings about fractions that these students demonstrated the greater domain, or demonstrated not to have knowledge about someone, and which are the most present among them, considering as meanings: part-whole relationship, multiplicative operator, quotient/number, reason and probability. The textbooks used by these students, the results of proposed tasks and the answers given in interviews about these tasks were analyzed. We believe that we contribute to the training of teachers who teach mathematics and, possibly, the production of new textbooks in order to cooperate for the better understanding, construction and development of the concept of fraction and rational number in schools.

¹ Doutorando do PEMAT-UFRJ em Ensino e História da Matemática e da Física, Mestre em Ensino da Matemática pelo PEMAT-UFRJ, Professor do Ensino Básico na SME-Duque de Caxias/RJ e SEEDUC-RJ/RJ.

² Professor do Ensino Fundamental e Médio.

REFLEXÕES COM VISTAS AO ENSINO SOBRE O CONCEITO DE FRAÇÃO

A motivação deste trabalho surge, durante o mestrado dos autores deste artigo no PEMAT-UFRJ nas aulas da Disciplina de Tendências no Ensino de Matemática, da percepção empírica da atuação profissional do primeiro autor em diálogo com a do segundo autor. Mesmo em momentos de desenvolvimento profissional e experiências bem distintas – o primeiro tem 20 anos e o segundo tem 4 anos de docência – há certo consenso de que os significados de fração ainda são pouco compreendidos por muitos alunos, alguns professores e pelas pessoas em geral agindo no mundo, apesar de ser bastante comum expressar e ver expressas algumas grandezas ou medidas na forma fracionária, por exemplo, quando ouvimos ou falamos “meio copo de leite” ou “ $\frac{3}{4}$ de polegada de um cano”. Mas, o que a experiência nos mostra é que o conceito de fração fica muitas vezes restrito à linguagem oral.

A preocupação com o ensino-aprendizagem de frações e, conseqüentemente, dos números racionais não é novidade. Há diversos autores brasileiros e estrangeiros que já comunicaram suas pesquisas nesse campo de estudo como Vasconcelos e Belfort (2006) e Magina (2001) que propõem o ensino-aprendizagem de frações através da exploração de 5 significados e outras como Cavalcanti e Guimarães (2007) que identificam a possibilidade de explorar 7 significados. É verdade que nem sempre os significados apresentados nessas pesquisas têm interseção total, porém, a maioria dos significados que são relatados são os mesmos.

Um aspecto que consideramos importante é o fato de que a categorização dos significados não deve ser tomada *a priori* como um enclausurador dos significados, mas sim como um norteador de reflexões sobre “o quê?”, “por quê?” e, principalmente, “como?” ensinar frações de maneira significativa. Sendo assim, *ressignificamos* o conceito de frações situando-o em cada contexto e problema.

Neste trabalho consideramos importante a exploração também de 5 significados, baseado nos significados apresentados pelas pesquisas consultadas, que assim descreveremos e justificaremos nossas escolhas:

- **Relação parte-todo:** Entendemos ser um significado que necessita de um procedimento de dupla contagem. A partir de uma grandeza tomada como UNIDADE, devemos contar as partes totais e as partes tomadas para resolver um problema e representá-las como denominador e numerador, respectivamente. Esse é, segundo nossa experiência profissional, o significado mais abordado por professores quando se inicia o ensino de frações, talvez porque também tenha sido esse o mais abordado, ou o melhor abordado, à época de alunos, principalmente, em livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Percebemos que esse significado é o que permeia o ensino das operações e equivalência com/de frações, mostrando pedaços de mesmo tamanho e de tamanhos diferentes, também muito presentes nos livros dos alunos pesquisados.

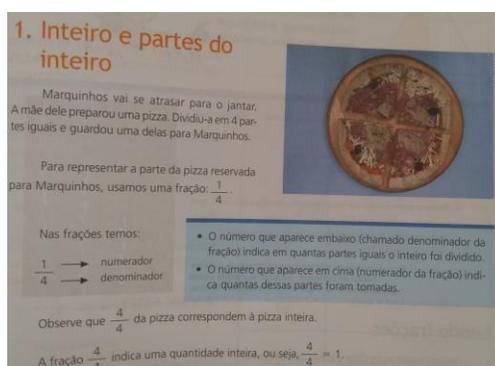


Figura 1- Livro do 6º ano

- **Operador multiplicativo:** Este significado de fração indica que, ao ser aplicado a uma grandeza, ela (a fração) passa a ser um valor escalar – que determina o tamanho final da grandeza –, ou seja, um *operador multiplicativo da grandeza* indicada, seja ela de natureza discreta ou contínua. Percebemos a abordagem desse significado, inicialmente, em subconjuntos discretos já nos anos iniciais, mas de maneira muito tímida e bem menor se comparada ao significado parte-todo. Contudo, percebemos que esse significado aparece timidamente no 6º ano e no 7º ano do Ensino Fundamental relacionados à

quantidades ou medidas de tempo, principalmente, nos livros didáticos utilizados pelos alunos desta pesquisa, ainda que os livros façam referências ao parte-todo para explicá-lo.

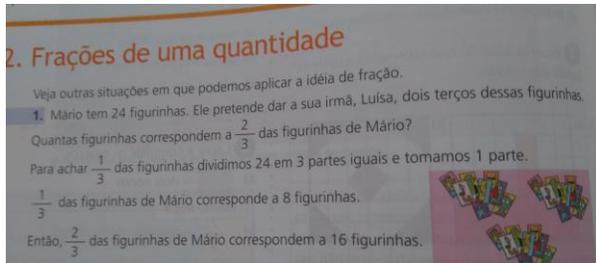


Figura 2- Livro do 6º ano

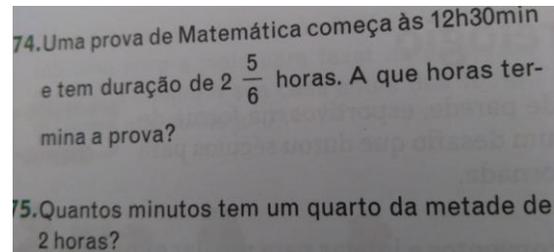


Figura 3- Livro do 6º ano

- **Quociente/Número:** Esse significado consiste em enxergar o símbolo de fração como a operação de dividir e assim resultando em um número, abstraindo a natureza da grandeza a qual a fração possa estar relacionada. Essa ideia possibilita a representação das frações também distribuídas em uma reta numérica e foi vista nos livros dos alunos inicialmente relacionando com números decimais bastante presente a partir do 6º e 7º anos, principalmente, neste último quando serve a resolução de equações do 1º grau. Ela também foi percebida bastante presente nos livros do 8º e 9º anos em expressões algébricas e outras equações.

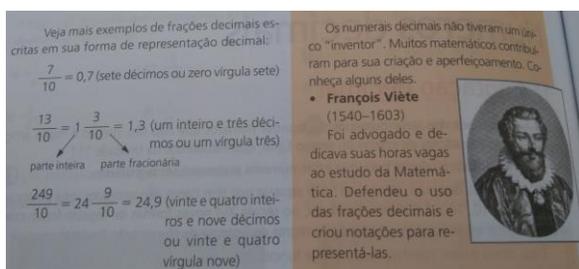


Figura 4- Livro do 6º ano

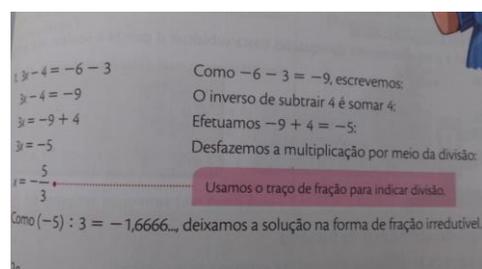


Figura 5- Livro do 7º ano

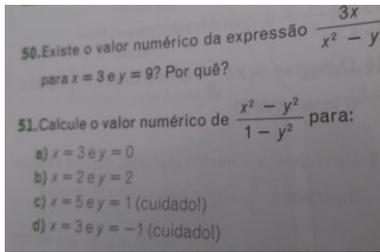


Figura 6- Livro do 8º ano

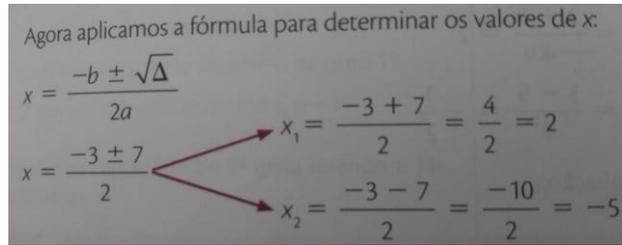


Figura 7- Livro do 9º ano

- **Razão ou Taxa de Variação:** É o significado que usa a representação de frações para comparar ou relacionar duas grandezas que não necessariamente são a parte e o todo de uma unidade. Consideramos um significado importante das frações, mas que percebemos ser pouco explorado, levando em consideração os outros significados, inclusive percebendo a existência nos livros didáticos explorados neste trabalho. Acreditamos que o significado de taxa, se explorado desde cedo, poderia trazer benefícios para a compreensão dos conceitos iniciais de porcentagem ou do Cálculo, por exemplo.

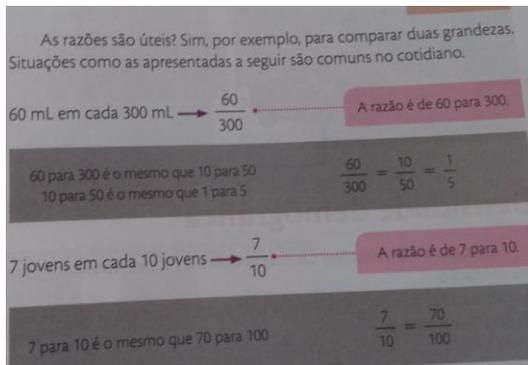


Figura 8- Livro do 7º ano

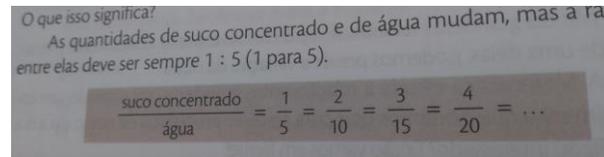


Figura 9- Livro do 8º ano

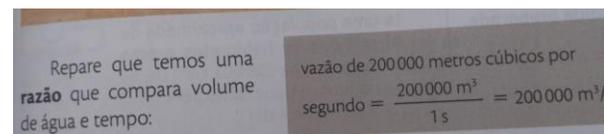


Figura 10- Livro do 9º ano

- **Probabilidade:** É um significado que representa a chance de um evento acontecer. Relaciona a cardinalidade de um subconjunto com seu conjunto principal e os números são representantes da mesma grandeza. Escolhemos como importante por poder ser interpretado através de um resultado de divisão, ou como a relação entre o numerador e denominador de forma comparativa, ajudando à reflexão sobre ordem de grandezas numéricas,

por exemplo. E, ainda, também pode servir como ideia inicial sobre o conceito da porcentagem na estatística, por exemplo. Mas, percebemos a importância apenas nos livros de 9º ano, bem como na exploração desse conceito ao conversarmos com os alunos desta pesquisa.

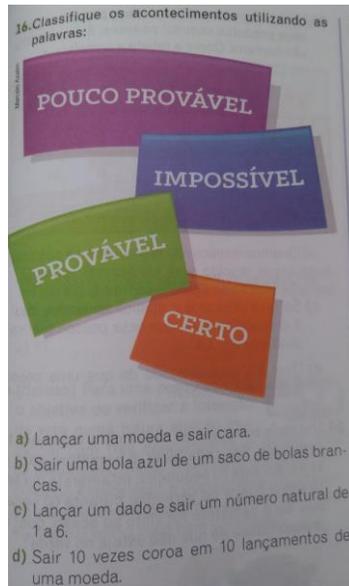


Figura 11- Livro do 9º ano

O que foi apresentado até aqui tem o objetivo de ajudar nas reflexões sobre o ensino de frações, corroborando com o que Shulman (1986) destaca como *conhecimento pedagógico de conteúdo* (PCK). A tentativa de colaborar com estudos de como tornar esse conhecimento compreensível a outros, não reduzindo os saberes profissionais docentes ao conhecimento do conteúdo *per se*. No caso específico das frações, a grande quantidade de trabalhos de conclusão de curso de graduação e pós-graduação deste campo nos deixa pistas de uma inquietação que permeia a formação inicial e continuada de professores que ensinam Matemática. Ball (1988) traz suposições sobre a que podem ajudar interpretar tais inquietações. Segundo esta pesquisadora, na formação inicial dos professores de Matemática, os conteúdos da matemática escolar como frações (aqueles que são vistos na posição de alunos) são vistos como simples e comumente entendidos, assim, não “precisam” ser reaprendidos no curso universitário e as disciplinas de matemática universitária são consideradas saberes suficientes para futuros professores.

Neste sentido, a primeira parte desse artigo, para além das reflexões sobre o conceito de frações com vistas ao ensino, trouxe o olhar de um posicionamento político-pedagógico sobre a formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática. A seguir apresentaremos a pesquisa em si trazendo os objetivos e as análises feitas, bem como nossas considerações acerca da mesma.

IMAGENS DO ESTUDO DE CASO

Para efeito de análise de pesquisa, foram considerados cinco alunos: 2 do sétimo, 2 do oitavo e 1 do nono ano de escolaridade do Ensino Fundamental de uma escola municipal de Duque de Caxias - RJ. Entre os meses de junho e agosto de 2015 todos fizeram as mesmas tarefas, ou seja, responderam às mesmas tarefas no papel, considerando a importância que demos aos cinco significados envolvendo frações, segundo nossas interpretações sobre os referenciais teóricos escolhidos, e responderam às mesmas perguntas semiestruturadas sobre estas tarefas verbalmente. Buscamos, assim, perceber quais desses significados, que interpretamos e julgamos importantes, estão mais presentes ou possuem domínio por parte dos alunos que foram objetos da pesquisa.

Nesse estudo buscamos relacionar a construção do conceito de frações com as ideias de Tall e Vinner (1981) que, resumidamente, definem imagem conceitual como todas as imagens mentais que servem para descrever a estrutura cognitiva total de que está associada com o conceito, incluindo as propriedades associadas e os processos que levam a definição do conceito. Isto é, entendemos que o entendimento do conceito de frações depende das imagens conceituais como sendo seus diversos significados e é construído ao longo dos anos através de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. Contudo, entendemos que essa teoria deve ser vista situada socialmente no tempo e no espaço das experiências.

Assumimos como base de nossas tarefas as perguntas feitas pelo trabalho de Cavalcanti e Guimarães (2007)³, assim, sobre o significado **parte-todo**, a tarefa continha a pergunta: “Uma jarra de suco foi distribuída em cinco copos igualmente cheios. João bebeu um deles, Joana bebeu outro e José bebeu outro. Que fração foi bebida e que fração sobrou deste suco na jarra?”. Três das respostas foram consideradas corretas, tanto na forma verbal quanto na escrita, com a colocação correta do numerador e do denominador: $\frac{3}{5}$ foi bebido e $\frac{2}{5}$ sobrou. Mas, em duas respostas – de um aluno do 7º ano e outro do 8º ano –, apesar de uma imagem conceitual (significado) bem respondida verbalmente sobre a relação parte-todo, houve uma confusão na representação com a inversão entre o numerador e denominador.

Sobre o significado de fração como **operador multiplicativo**, na tarefa foi feita seguinte pergunta: “Uma jarra continha 900 mL de suco. Pedro bebeu $\frac{2}{3}$ desta quantidade. Que quantidade ele bebeu?”. Um aluno do 7º ano não soube responder, porém, todos os outros responderam com correção 600 mL. Contudo, aquele que não sabia responder, também verbalmente, disse não saber como pensar sobre o problema, mas, os outros responderam de duas formas: (1) que como fração é um pedaço, era só dividir por três e pegar duas dessas partes ou (2) que era só multiplicar por $\frac{2}{3}$, realizando primeiro a multiplicação por 2 e depois a divisão por 3. Aparentemente, esta imagem conceitual está bem consolidada – ainda que voltem a pensar no significado parte-todo –, ou a operação relacionada a ela.⁴

Entendemos que o significado de fração como **quociente/número** estaria diretamente relacionado a relacionar sua posição na reta numérica, então, foi pedido na tarefa que *localizassem o número $\frac{2}{3}$ numa reta numérica dada*. Todos os alunos que participaram desta pesquisa responderam a tarefa incorretamente. Os dois do 7º ano e os dois do 8º ano a localizaram entre o número 2 e o número 3. O Aluno do 9º ano deixou a tarefa em branco. Verbalmente, ao serem perguntados sobre a possibilidade de uma fração ter um

³ Adaptamos as perguntas que haviam sido sugeridas neste trabalho de Cavalcanti e Guimarães.

⁴ Poderíamos escolher fazer com conjuntos discretos essa mesma tarefa, por exemplo, 900 bolinhas.

valor numérico, apenas um aluno do 8º ano disse que sabia, mas não lembrava como fazer. Já os outros quatro - dois do 7º ano, um do 8º e outro do 9º ano - responderam que não sabiam que fração poderia ser vista como um número. Este resultado nos surpreendeu e nos deu pistas claras de que esta imagem conceitual se mostra deficiente no ensino-aprendizagem sobre frações neste estudo.

Mas, como juntamos nosso entendimento dos significados de fração enquanto **quociente** com o de **número**, nós propusemos a seguinte pergunta na tarefa: *“Jonas quer encher uma grande jarra com 15L de suco. Mas, ele só pode fazê-lo usando um copo que cabe $\frac{1}{3}$ do litro. Quantos copos serão necessários?”*. E, apenas um aluno do 9º ano respondeu à tarefa com correção: 45 copos, mas sem mostrar os cálculos. Contudo, verbalizou com bastante desenvoltura o seu pensamento, onde disse ter separado cada litro em três partes iguais e multiplicado por 15. Um aluno do 7º ano, apesar da pergunta se referir ao número de copos como pergunta, deu a resposta $\frac{3}{5}$ para o que seria uma quantidade. A curiosidade é que, verbalmente, a resposta até foi até bem coerente, ele disse que: *“a cada três copos faria um litro e multiplicando três litros por cinco ele chegaria a 15L”*. Ou seja, entendemos que houve uma confusão entre o conceito e a representação, conseqüentemente, prejudicando a resposta escrita mais coerente.

Os dois alunos do 8º resolveram apenas estimar a quantidade e nos revelaram também uma deficiência sobre o conceito de ordem de grandeza, pois um respondeu 5 copos e outro respondeu 10 copos. O outro aluno do 7º ano, também respondeu 5, mas verbalizou que, *“por se tratar de fração, sabia que deveria dividir”*. Acabou dividindo apenas por 3 também chegando ao valor de 5, mostrando também que o conceito sobre ordem de grandeza também se mostra deficiente, pois não percebeu a inconsistência da resposta.

Sobre o significado de fração como **razão**, a tarefa a ser respondida foi: *“Para fazer um refresco, a garrafa de concentrado de fruta traz a seguinte recomendação: misturar 1 copo do concentrado a cada 2 copos de água. Então,*

qual será a fração de concentrado numa jarra desse refresco?”. Todos responderam $\frac{1}{2}$. Mas, quando confrontados verbalmente, relacionaram suas respostas ao significado parte-todo e aí responderam $\frac{1}{3}$.

A imagem da fração como **probabilidade** foi verificado na tarefa através da pergunta: “*Qual é a chance de sair os números 3 ou 4 no lançamento de um dado?*”. Todos os alunos deixaram essa tarefa por fazer. Mas, verbalmente, chegaram a expressar – todos eles – que era de duas em seis, ainda que nem primeiro momento os alunos do oitavo ano tivessem estimado valores de 40% e 20%, indicando o uso desse último conceito neste tipo de problema. Ou seja, não lhes foi apresentada a possibilidade de representar esse significado através do uso de frações, ou não lhes foi apresentada esta imagem.

CONSIDERAÇÕES

Primeiramente, destacamos a importância de deixar claro que a experimento aqui descrita ocorreu incidentalmente, a partir de inquietações de dois professores-alunos de mestrado do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da UFRJ considerando suas experiências e sua convivência nas aulas da disciplina de Tendências do Ensino de Matemática. Por isso não nos prendemos a um modelo metodológico rigoroso e nem houve um planejamento mais extenso para este fim.

A escolha desses significados como base exploratória para a análise sobre o ensino-aprendizagem de frações parte da percepção de que o conceito de **medida** precede todos eles. Saber quantas unidades de uma medida cabem em outra medida, seja ela discreta ou contínua, é a origem desses significados. Observamos esse conceito no significado de **parte-todo** quando pensamos, por exemplo, quantos $\frac{1}{4}$ da unidade cabem na unidade. No **operador multiplicativo** quando pensamos a que parte da grandeza nós estamos nos referindo em comparação com ela mesma, no de **quociente/número** quando interpretamos a divisão em partes iguais como o número de partes que uma coisa cabe na outra, no de **razão** quando estamos comparando as partes (e o que é medir **senão** um

ato de comparar?) e no de **probabilidade** quando somos levados a pensar na ordem de grandeza, que também é um tipo de comparação.

Para fazer a análise da questão de pesquisa também levamos em conta, duas variáveis: a característica das quantidades (poderíamos usar quantidades contínuas ou discretas) e a forma de apresentação do problema (sem representações icônicas), para observar como os alunos pesquisados resolveriam as tarefas e percebemos que a presença do ícone⁵ ainda facilita a sua compreensão.

Nossas observações neste trabalho corroboram com nossas referências e mostram que alguns significados de fração estão mais fortemente construídos por parte dos alunos, dando pistas da importância dada a outros significados por parte dos professores, seja por insegurança, desconhecimento, desleixo, currículo ou qualquer outro motivo. O que nos ficou claro é que privilegiar alguns significados (algumas imagens conceituais) não necessariamente garante a construção de outros.

Percebemos em nossa pesquisa que o significado parte-todo, que é o mais explorado mesmo que os outros significados estivessem presentes nos livros usados nesta unidade escolar, conseguiu ser atingido ainda que houvesse alguma confusão na representação. Todavia, a imagem conceitual de fração como número numa reta numérica, além de pouco explorada e entendida pelos alunos, também foi percebida timidamente construída nos livros didáticos, talvez por isso os professores deem a mesma atenção a esse significado. Já os outros significados de fração percebemos que ainda estão em construção, mesmo nos últimos anos do ensino fundamental. E, ainda, alguns deles também dependem de uma analogia, experiência ou qualquer outra abordagem que envolva **outros** conceitos, por exemplo, de ordem de grandeza, que notamos um baixo entendimento e quem sabe uma lacuna no ensino-aprendizagem.

Ressaltamos ainda que as reflexões sobre o ensino-aprendizagem de frações, os dados produzidos, as análises e nossas considerações referem-se à

⁵ Imagens ou coisas concretas.

nossa amostra situada em nosso universo de estudo. Logo, não pretendemos inferir nada para além deste. Entretanto, podem servir de motivação para o estudo com/em outros universos socioculturais. Entendemos que todo o procedimento operatório e de representações usando frações quando não é adequadamente conceituado, construído e compreendido acaba se transformando apenas em regras desconexas, sem sentido e as consequências acompanham o estudante durante toda vida escolar, acadêmica e, por que não, cotidiana. Assim, acreditamos que este trabalho venha a somar a outros que enxergam a docência como uma atividade profissional que tem suas especificidades e precisam ser reconhecidas e estudadas tanto na formação inicial ou continuada, ou para a confecção e utilização de livros didáticos. Neste caso, levantamos a bandeira sobre o ensino-aprendizagem de frações.

Referências

BALL, D.L. **The subject matter preparation of prospective mathematics teachers: Challenging the myths**. National Center for Research on Teacher Education, College of Education, Michigan State University. 1988.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CAVALCANTI, Érica & GUIMARÃES, Gilda. **Diferentes significados de fração: análise dos livros didáticos das séries iniciais**. NUTES, 2007. Acesso em 20 de junho de 2015: < <http://www.nutes.ufrj.br/abrapec/viiiienpec/resumos/R0212-2.pdf>>

MAGINA, S.; CAMPOS, T; NUNES, T., GITIRANA, V. **Repensando Adição e Subtração: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais**. Ed. PROEM Ltda, São Paulo, 2001.

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. Coleção **Praticando Matemática**. Ed. do Brasil, São Paulo, 2014.

SHULMAN, L. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, p.4-14, 1986.

SCHUBRING, G. A Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior: Felix Klein e a sua Atualidade. In: ROQUE, T.; GIRALDO, V. (Eds.). **O Saber do Professor de Matemática: Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014, p. 39-54.

TALL, David & VINNER, Shlomo. **Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity**. Educational Studies in Mathematics. 1981.

VASCONCELOS, Cleiton Batista; BELFORT, Elizabeth. **Diferentes significados de um mesmo conceito: o caso das frações**. In: Discutindo práticas em Matemática. Boletim 13, Agosto de 2006. p. 38-48