

# FRACTAIS NO ENSINO FUNDAMENTAL: EXPLORANDO ESSA NOVA GEOMETRIA

Theodoro Becker de Almeida, PUCRS ([beckerdealmeida@yahoo.com.br](mailto:beckerdealmeida@yahoo.com.br))

Rodiane Ouriques Martinelli, PUCRS ([rodianemartinelli@yahoo.com.br](mailto:rodianemartinelli@yahoo.com.br))

Virgínia Maria Rodrigues, PUCRS ([virginia@pucls.br](mailto:virginia@pucls.br))

Ana Maria Marques da Silva, PUCRS ([ana.marques@pucls.br](mailto:ana.marques@pucls.br))

## INTRODUÇÃO

Durante séculos, os objetos e os conceitos da geometria euclidiana foram considerados aqueles que melhor descreviam o mundo em que vivemos. Cientistas conceberam uma visão da natureza a partir de conceitos e formas de figuras regulares e diferenciáveis.

Nos últimos quarenta anos, vem se desenvolvendo um novo ramo da geometria que modela as irregularidades da natureza, a geometria fractal. Figuras que no início do século passado eram vistas como “monstros matemáticos”, já que desafiavam as noções comuns de infinito e para as quais não havia uma explicação objetiva, têm hoje um papel notável na interpretação da realidade.

Através dos estudos realizados no final do século XIX e início do século XX, foi possível fundamentar esta nova ciência que, influenciou decisivamente para o rompimento do determinismo, ampliou a abrangência da geometria e possibilitou ao homem trabalhar com as complexidades da natureza.

Difundida pelo matemático polonês Benoit Mandelbrot (1986), a geometria dos fractais tem atraído interesse científico e educacional devido à sua potencialidade, versatilidade e fascínio oferecido por sua beleza e pelo grande poder de análise dos objetos da natureza. Por isso, seu uso tem ocorrido em diversas áreas da ciência, tecnologia e arte.

Este trabalho explora a geometria dos fractais, suas características e propriedades a partir da construção de cartões fractais tridimensionais, destacando aspectos fundamentais da geometria euclidiana.

As atividades com cortes e dobraduras são muito enriquecedoras, no que se refere às inúmeras possibilidades que elas oferecem-nos diversos ramos da matemática. Além de toda a exploração geométrica que é possível fazer, noções de proporcionalidade, frações, funções e álgebra são fortemente evidenciadas nesta prática.

Acreditamos que, por ser um trabalho diferente, uma “quebra” da rotina das aulas de matemática, motiva e envolve os alunos. Outras práticas importantes ocorrem, como o manuseio de instrumentos de medida (régua, compasso), a abstração das leis matemáticas e o uso da criatividade.

Segundo Navaz et al. (2006), apesar deste tipo de abordagem não ser considerado didático por muitos professores, pode se tornar um bom aliado para as descobertas, estudos e a construção do conhecimento interdisciplinar.

Ao dobrarmos o papel, executamos verdadeiros atos geométricos, pois construímos retas, ângulos, polígonos, figuras bidimensionais e tridimensionais (NAVAZ et al., 2006). Podemos ainda rever conceitos de geometria euclidiana plana e espacial durante a construção dos cartões.

Este trabalho apresenta *uma proposta de atividade que permite introduzir a geometria dos fractais para o Ensino Fundamental por meio da construção de cartões fractais em três dimensões, explorando as características que definem esse conjunto e a geometria euclidiana envolvida no processo de construção.*

## **O QUE SÃO OS FRACTAIS?**

Os fractais são conjuntos cuja forma é extremamente irregular ou fragmentada e que têm essencialmente a mesma estrutura em todas as escalas. A origem do termo *fractal*, nomeado por Mandelbrot, está no radical *fractus*, proveniente do verbo latino *frangere*, que quer dizer quebrar, produzir pedaços irregulares; vem da mesma raiz a palavra fragmentar, em português (MOREIRA, 2003).

As principais propriedades que caracterizam e que permitem definir os conjuntos fractais são:

- *Auto-similaridade*, que pode ser exata ou estatística, ou seja, mantém a mesma forma e estrutura sob uma transformação de escala (transformação que reduz ou amplia o objeto ou parte dele);
- *Complexidade infinita*, isto é, qualquer que seja o número de ampliações de um objeto fractal, nunca obteremos a “imagem final”, uma vez que ela poderá continuar a ser infinitamente ampliada.
- *Irregularidade*, no sentido de rugosidade (não-suavidade) ou fragmentação;
- Possuir em geral, *dimensão não-inteira*. A dimensão fractal quantifica, de certo modo, o grau de irregularidade ou fragmentação do conjunto considerado.

A auto-similaridade aproximada ou estatística refere-se principalmente a objetos da natureza que não são fractais exatos, mas podem ser muito bem descrito por eles, como por exemplo, a estrutura da couve-flor. No caso de determinadas plantas, pode-se encontrar uma certa semelhança entre as pequenas folhas que constituem um pequeno ramo com outros ramos maiores, e que assim sucessivamente irão gerar uma planta, que afinal não é muito diferente do pequeno ramo inicial, como mostra a figura 1.



Figura 1: Ramos de uma planta cuja auto-similaridade é aproximada.

Fonte: <http://www.mat.uc.pt/~mcag/FEA2003/GeometriaFractal.pdf>

A auto-similaridade exata é um conceito artificial, pois não é possível encontrar na natureza objetos rigorosamente iguais a si próprios. Formalmente, uma figura possui auto-similaridade exata se, para qualquer dos seus pontos, existe uma vizinhança que contém uma parte da figura semelhante a toda figura.

No final do século XIX e início do século XX, os processos recursivos e iterativos para obtenção de conjuntos chamaram a atenção de matemáticos como George Cantor, Waclav Sierpinski, Helge von Koch, Pierre Fatou e Gaston Julia. Mandelbrot (1986) afirma que o estudo desses matemáticos foi fundamental para o desenvolvimento dessa nova geometria e seus conjuntos são conhecidos como fractais clássicos (BARBOSA, 2002).

O conjunto de Cantor, criado pelo matemático alemão George Cantor em 1883, é construído da seguinte maneira: tomamos um segmento de reta e o partimos em três segmentos iguais. Em seguida, o pedaço intermediário é retirado. Os dois segmentos restantes são de novo repartidos em três segmentos iguais e os segmentos intermediários são retirados. O processo de repartir os segmentos e de retirar o pedaço intermediário prossegue ao infinito. A figura 2 mostra o processo iterativo de construção desse conjunto.

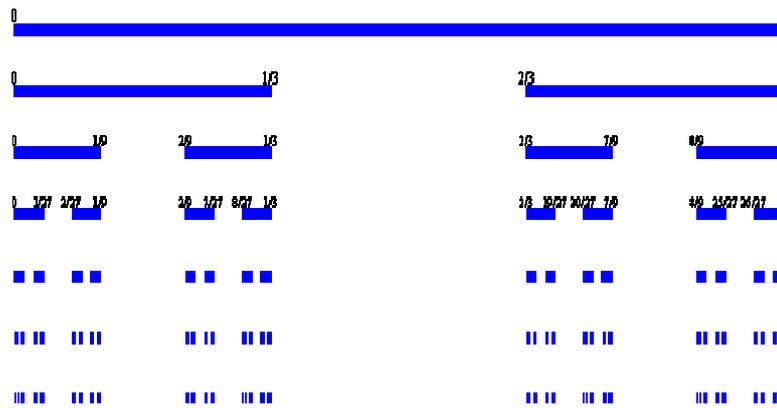


Figura 2: Conjunto de Cantor.

Fonte: <http://www.geocities.com/inthechaos/obj.htm>

O conjunto conhecido como Curva de Koch ou Floco de Neve de Koch foi criada pelo matemático sueco Helge von Koch em 1904. A construção dessa curva pode ser descrita pelo processo iterativo ilustrado na figura 3.

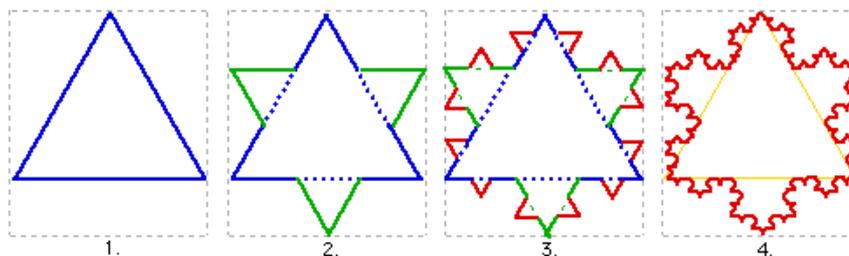


Figura 3: Floco de neve de Koch.

Fonte: <http://scidiv.bcc.ctc.edu/Math/Snowflake.html>

O conjunto conhecido como Triângulo de Sierpinski foi criado pelo matemático polonês Waclav Sierpinski em 1916 e possui, além de características e propriedades fractais, relação com o triângulo aritmético de Pascal (MARTINELLI, 2005). A figura 4 mostra o conjunto obtido pelo processo iterativo.



Figura 4: Triângulo de Sierpinski obtido através de processos iterativos.

Fonte: <http://www.educ.fc.ul.pt/semtsem/semtem99/sem21/framegeral.htm>

O conjunto conhecido por Conjunto de Julia foi criado pelos matemáticos Pierre Fatou e Gaston Julia em 1919. Esse conjunto, obtido por iterações no plano complexo, resultou da curiosidade de determinar o que aconteceria com um número

complexo  $z$  quando a este fosse aplicado iterativamente a função  $f(t) = z^2 + c$ , onde  $c$  é um número complexo. Apenas com os modernos computadores foi possível visualizar a beleza dos gráficos de tais funções (Figura 5).

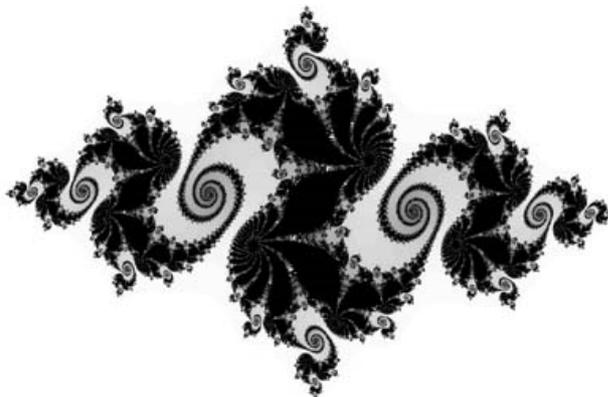


Figura 5: Conjunto de Julia.

Fonte: <http://www.matcuere.unam.mx/~aubin/vista/img/julia.jpg>

O fractal que tem o nome de Conjunto de Mandelbrot, também obtido no plano complexo, é considerada uma expansão do Conjunto de Julia, pois cada ponto no plano complexo corresponde a um conjunto de Julia diferente. Os pontos que pertencem ao conjunto de Mandelbrot correspondem precisamente aos conjuntos de Julia conexos e os pontos fora do conjunto de Mandelbrot correspondem aos conjuntos de Julia desconexos. Este conjunto, talvez seja o mais complexo objeto conhecido pelos matemáticos, como revelam as imagens geradas por computador (Figura 6). À medida que ela é examinada em níveis cada vez mais altos de ampliação, o observador vê-se diante de um desfile interminável de voltas, rendilhados e formas que se assemelham à totalidade do conjunto.

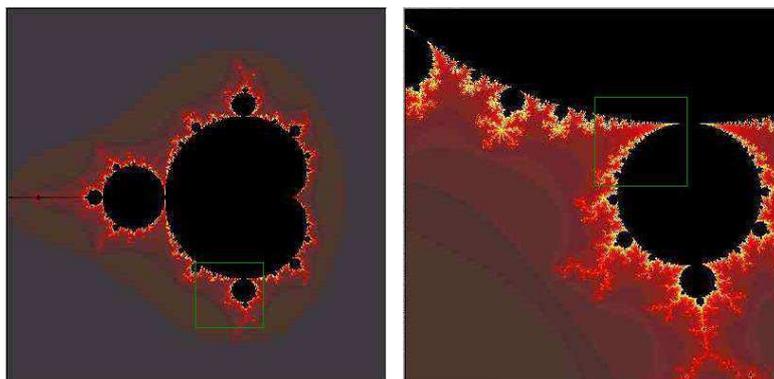


Figura 6: Conjunto de Mandelbrot.

Fonte: <http://www.lactamme.polytechnique.fr/Mosaic/images/TOUR.C.11.0032.D/image.jpg>

Note que, todos esses conjuntos possuem as duas características fundamentais que definem um fractal: a auto-similaridade e a complexidade infinita. As explorações desses conjuntos podem ser muito enriquecedoras para as aulas de matemática. Por exemplo, através da construção do Conjunto de Cantor podemos explorar, usando uma tabela, o número de segmentos a cada nova iteração, o que nos permite chegar a uma fórmula geral, onde é possível obter com total precisão o número de segmentos que o conjunto terá para uma iteração qualquer. O interessante é que o número de segmentos tende ao infinito, porém o comprimento do segmento tende a zero. No Triângulo de Sierpinski, a área tende a zero. Na Curva de Koch, a área tende a um limite, porém, seu perímetro tende ao infinito.

Uma sugestão de exploração consiste em apresentar a lei de construção dos conjuntos fractais aos alunos e fazer com que eles façam conjecturas e, através da construção do fractal busquem, por meio de gráficos, tabelas ou algoritmos, explicações que permitam corroborar ou refutar suas hipóteses.

## **CONSTRUINDO CARTÕES FRACTAIS TRIDIMENSIONAIS**

A atividade de construção de cartões fractais tridimensionais é uma forma motivadora e interessante de apresentar a geometria dos fractais para os estudantes de Ensino Fundamental, pois, devido ao apelo estético e aos conteúdos matemáticos, envolve e captura a atenção dos alunos.

Segundo Simmt e Davis (1998), além das idéias de recursividade, iteração, auto-similaridade e dimensão fracionária, é possível abordar tópicos como: sistemas numéricos, séries, seqüências, limite, simbologia e introduzir a matemática discreta.

A elaboração deste trabalho foi inspirada no livro *Fractal Cuts* de Diego Uribe (2004), o qual contém as figuras e planificações dos cartões explorados. Para fundamentar nosso trabalho, fizemos uma pesquisa detalhada sobre o tema e descobrimos as leis que definem como devem ser feitos os cortes e as dobraduras a partir das planificações dos cartões.

Neste artigo, descreveremos as atividades de construção dos cartões *Degraus Centrais*, *Triângulo de Sierpinski* e *Trisecções*, pois eles possuem características diferenciadas. Para construção são necessários: folha de ofício, régua, tesoura, lápis, borracha e muita criatividade.

### **Construindo o cartão *Degraus Centrais***

Os cartões resultam de uma seqüência de cortes (linhas cheias) e dobraduras (linhas pontilhadas). Tomando-se como ponto de partida a planificação do cartão *Degraus Centrais* (Figura 7), as etapas a seguir mostram sua construção.

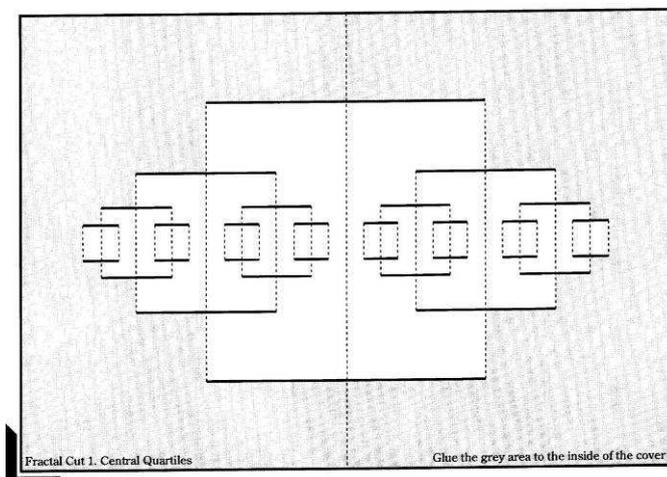


Figura 7: Planificação do cartão *Degraus Centrais* [URIBE, 2004, p.19].

1. Pegue uma folha de tamanho A4.
2. Dobre a folha ao meio, ao longo de sua altura, como mostra a figura 8.

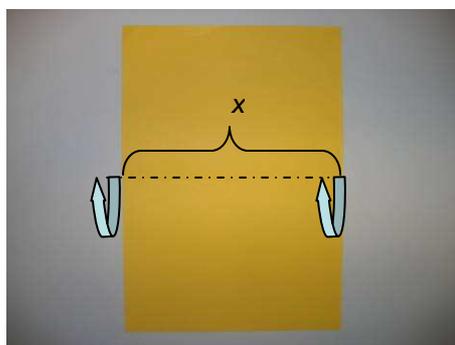


Figura 8: Dobradura inicial (Passo 2).

3. Com a folha dobrada ao meio, faça dois cortes verticais simétricos a uma distância  $\frac{x}{4}$  das extremidades da folha, de altura  $\frac{a}{2}$ , como mostra a figura 9.

Note que  $a = 2 \times \frac{x}{4} = \frac{x}{2}$ .

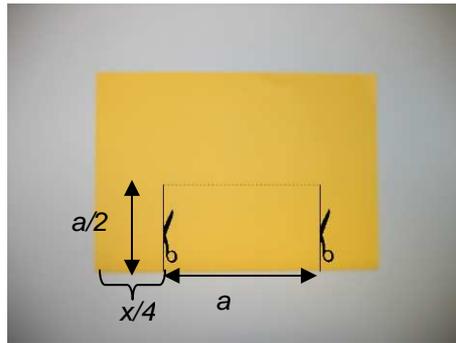


Figura 9: Passo 3.

4. Dobre o retângulo formado para cima, fazendo um vinco na dobra.

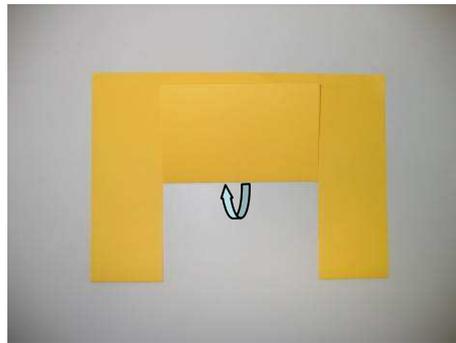


Figura 10: Passo 4.

5. Volte o retângulo dobrado para a posição inicial e puxe o centro da figura em relevo. Podemos dizer que esta é a primeira geração do cartão fractal.

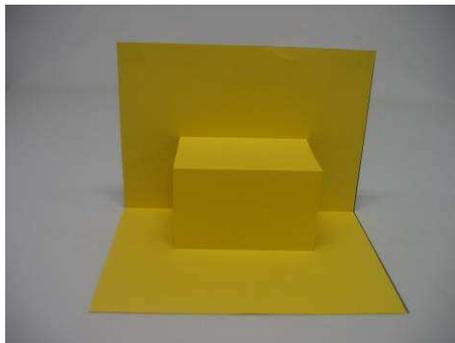


Figura 11: Primeira geração do cartão fractal.

6. Dobre a folha novamente, conforme a figura 10, pois as gerações seguintes serão obtidas seguindo os mesmos passos de 3 a 5, porém em uma escala menor, apenas na região dobrada. A segunda geração do cartão fractal é obtida com o corte mostrado na figura 12.

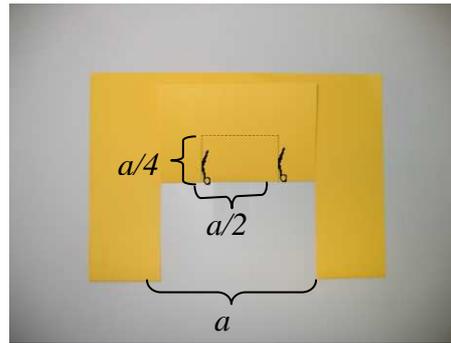


Figura 12: Passo 6.

7. Dobre o retângulo para cima, fazendo um vinco na dobra.

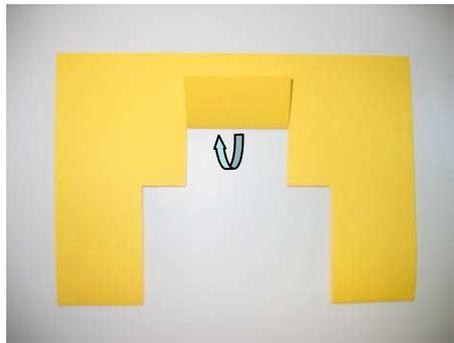


Figura 13: Passo 7.

8. Volte o retângulo dobrado para a posição inicial e puxe a figura em relevo. Neste momento, temos a primeira e a segunda geração do cartão fractal.

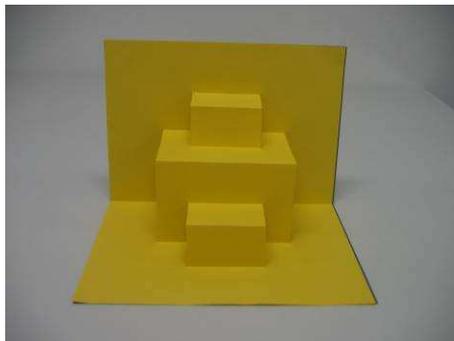


Figura 14: Primeira e segunda geração do cartão fractal.

9. Para obter mais gerações, repita esse processo enquanto for possível realizar os cortes e as dobraduras no papel, sempre usando a regra de corte estabelecida no passo 3. Por fim, desdobre todos os recortes e puxe as figuras em relevo. A figura 15 mostra um cartão de quatro gerações obtido pelo processo descrito.

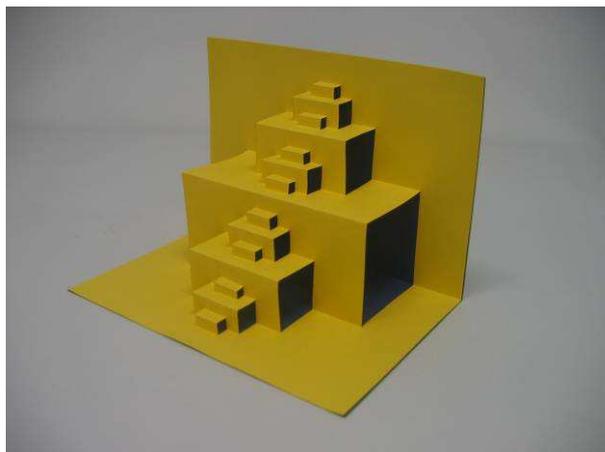


Figura 15: Cartão fractal *Degraus Centrais*.

Podemos observar que o cartão da figura 15 possui estruturas auto-similares. Com o cartão pronto, observamos que as formas geométricas resultantes dos cortes e dobraduras são paralelepípedos.

Percebemos durante a construção que, a cada novo corte e dobradura, obtemos novos paralelepípedos. Se chamarmos de iteração zero, a primeira geração do cartão, quantos paralelepípedos novos surgem a cada iteração? Podemos explorar a construção do cartão construindo a tabela 1.

Tabela 1: Iteração X Número de paralelepípedos novos.

| <i>Iteração</i> | <i>Número de paralelepípedos novos</i> |
|-----------------|--|
| <i>0</i>        | <i>1</i>                               |
| <i>1</i>        | <i>2</i>                               |
| <i>2</i>        | <i>4</i>                               |
| <i>3</i>        | <i>8</i>                               |
| <i>4</i>        | <i>16</i>                              |
| <i>...</i>      | <i>...</i>                             |
| <i>n</i>        | <i>2<sup>n</sup></i>                   |

Note que a cada iteração, o número de novos paralelepípedos dobra, porém, em escala menor (paralelepípedos menores). Com isso, podemos concluir que o processo de construção dos paralelepípedos em cada iteração é descrito pela lei de potência  $2^n$ , onde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  é o número das iterações. Identificamos que a cada nova iteração temos

um paralelepípedo cercado por 2 novos paralelepípedos. Este valor será denominado fator multiplicador.

Podemos incrementar nossa tabela explorando o volume de cada paralelepípedo gerado em diferentes iterações (Figura 16). Na primeira geração, o volume do paralelepípedo construído será  $a \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} = \frac{a^3}{4}$ .

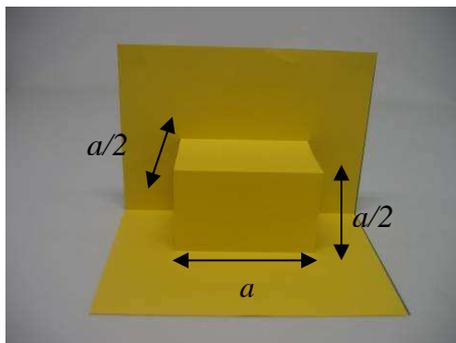


Figura 16: Paralelepípedo obtido na primeira iteração.

A tabela 2 mostra o cálculo dos volumes dos paralelepípedos obtidos nas diferentes iterações, assim como o volume total. Nesse caso, a lei de potência dos volumes produz equações de maior complexidade. Esta atividade de generalização da lei dos volumes pode ser encarada como um grande desafio para os estudantes.

Tabela 2: Volume dos novos paralelepípedos em cada iteração e volume total para o cartão *Degrais Centrais*.

| <i>Iteração</i> | <i>Volume do novo paralelepípedo</i>   | <i>Volume total</i><br><i>(Soma dos volumes de todos os paralelepípedos)</i>             |
|-----------------|--|--|
| 0               | $\left(\frac{a}{2}\right)^2 \times a = \frac{a^3}{4} = \frac{a^3}{2^0 \times 2^2}$                               | $\frac{a^3}{4}$  |
| 1               | $\left(\frac{a}{4}\right)^2 \times \frac{a}{2} = \frac{a^3}{32} = \frac{a^3}{2^5} = \frac{a^3}{2^3 \times 2^2}$  | $\frac{a^3}{4} + 2 \times \frac{a^3}{32} = \frac{4a^3 + a^3}{16} = \frac{5a^3}{16}$      |
| 2               | $\left(\frac{a}{8}\right)^2 \times \frac{a}{4} = \frac{a^3}{256} = \frac{a^3}{2^8} = \frac{a^3}{2^6 \times 2^2}$ | $\frac{5a^3}{16} + 4 \times \frac{a^3}{256} = \frac{20a^3 + a^3}{64} = \frac{21a^3}{64}$ |
| ...             | ...  | ...  |

|     |                        |   |
|-----|------------------------|---|
| $n$ | $\frac{a^3}{2^{3n+2}}$ | $\frac{a^3}{3} \left[ 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^{n+1} \right]$ |
|-----|------------------------|---|

Com base nos dados da tabela é possível chegar à fórmula geral que informa o volume total dos paralelepípedos do cartão em uma iteração qualquer. Na tabela acima observamos que o volume total do sólido em uma iteração qualquer é a soma dos termos de uma progressão geométrica.

À medida que o número de iterações aumentando, surgem novos paralelepípedos, logo o volume total aumenta. Entretanto, a variação de volume de uma iteração para outra é cada vez menor, pois o volume de cada novo paralelepípedo diminui. Essa idéia poderia ser utilizada para introduzir a noção de limite.

Note também que o cartão possui *auto-similaridade*, ou seja, ele mantém a mesma forma e estrutura sob uma transformação de escala e *complexidade infinita*. Se fosse possível continuar infinitamente o processo de corte e dobradura no papel, nunca obteríamos o “cartão final”, uma vez que a lei que define o processo de construção poderá continuar a ser aplicada infinitamente.

### **Explorando o cartão *Triângulo de Sierpinski***

Outro cartão que pode ser explorado é o cartão Triângulo de Sierpinski. Sua estrutura triangular pode ser comparada ao conjunto fractal que leva o mesmo nome (Figura 4). Uma curiosidade que pode ser levantada com os alunos é que a estrutura do Triângulo de Sierpinski possui uma conexão com os números ímpares do Triângulo de Pascal<sup>1</sup>.

Com base no diagrama da planificação (Figura 17), percebemos que a cada iteração temos um paralelepípedo cercado por três novos paralelepípedos, porém em escala menor, que serão os paralelepípedos obtidos na próxima iteração. Podemos assim concluir previamente que este cartão possui um fator multiplicador igual a 3.

<sup>1</sup> Qual a relação entre o Triângulo de Pascal e o Triângulo de Sierpinski? Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm48/sierpinski.htm>. Acesso em 08 mar. 2007.

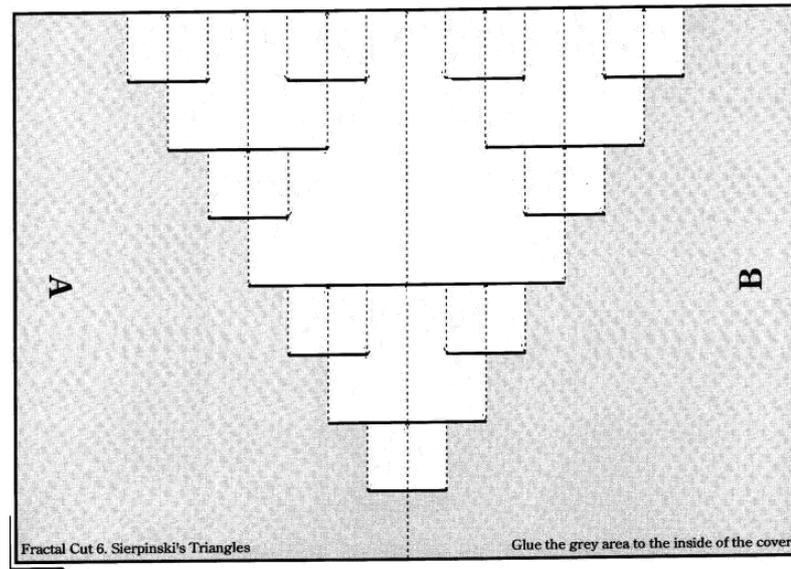


Figura 17: Planificação do cartão *Triângulo de Sierpinski* [URIBE, 2004, p.50 – modificado pelos autores].

Observando a planificação, podemos construir a regra ou lei do processo iterativo para obtermos o cartão. A seguir, faremos uma breve descrição das etapas realizadas para esta construção:

1. Pegue uma folha de tamanho A4.
2. Dobre a folha ao meio, ao longo de sua altura, de mesmo modo como foi realizado na figura 8.
3. Com a folha dobrada ao meio, marque o ponto médio na parte dobrada de largura  $x$  e faça um corte vertical de altura  $y$  qualquer.
4. Dobre um dos retângulos formado para cima, fazendo um vinco na dobra.
5. As gerações seguintes serão obtidas nos dois retângulos formados no cartão, aplicando a mesma regra do passo 3. Note que os retângulos possuem  $\frac{x}{2}$  de base, logo os cortes verticais em seus pontos médios devem ter altura igual a  $\frac{y}{2}$ .

A figura 18 mostra o cartão *Triângulo de Sierpinski* construído usando o processo descrito anteriormente.

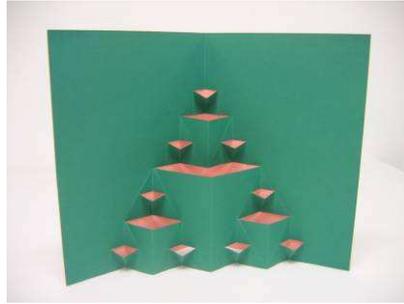


Figura 18: Cartão fractal *Triângulo de Sierpinski*.

Como a cada iteração triplica-se o número de novos paralelepípedos, podemos verificar que o número de paralelepípedos gerados em cada iteração é descrito pela lei de potência  $3^n$ , onde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  é o número da iteração.

Da mesma forma como exploramos o cartão *Degraus Centrais*, atribuímos dimensões genéricas para o paralelepípedo obtido na primeira iteração. Sendo a altura escolhida como  $y = a$  e o lado da base quadrada por  $\frac{a}{2}$ , construímos a tabela 3, determinando o volume de cada paralelepípedo gerado.

Tabela 3: Volume dos paralelepípedos novos e volume total do cartão *Triângulo de Sierpinski*.

| <i>Iteração</i> | <i>Número de paralelepípedos novos</i> | <i>Volume do novo paralelepípedo</i> | <i>Volume total</i>   |
|-----------------|--|--------------------------------------|---|
| <i>0</i>        | <i>1</i>                               | $\frac{a^3}{2^2}$                    | $\frac{a^3}{2^2}$   |
| <i>1</i>        | <i>3</i>                               | $\frac{a^3}{2^5}$                    | $11 \frac{a^3}{2^5}$  |
| <i>2</i>        | <i>9</i>                               | $\frac{a^3}{2^8}$                    | $97 \frac{a^3}{2^8}$  |
| <i>3</i>        | <i>27</i>                              | $\frac{a^3}{2^{11}}$                 | $803 \frac{a^3}{2^{11}}$  |
| ...             | ...                                    | ...                                  | ...   |
| <i>n</i>        | $3^n$                                  | $\frac{a^3}{2^{3n+2}}$               | $2 \frac{a^3}{5} \left[ 1 - \left( \frac{3}{8} \right)^{n+1} \right]$ |

Nesta tabela, obtemos dados semelhantes aos do cartão anterior, porém observamos que o número de paralelepípedos novos que surgem a cada geração é diferente. Além disso, notamos que a partir da geração 1 o volume total é superior ao do cartão dos degraus centrais.

### Explorando o cartão *Triseções*

Todos os cartões fractais são constituídos por montes (parte ejetável) e por vales. Este cartão possui uma propriedade muito curiosa: à medida que realizamos o processo de iteração, novos montes são gerados sobre os montes e os vales do cartão, até que os vales do cartão desapareçam.

Com base no diagrama de sua planificação (Figura 19), percebemos que a cada iteração temos um paralelepípedo cercado por cinco novos paralelepípedos, porém em escala menor. Podemos assim concluir que este cartão possui um fator multiplicador igual a 5.

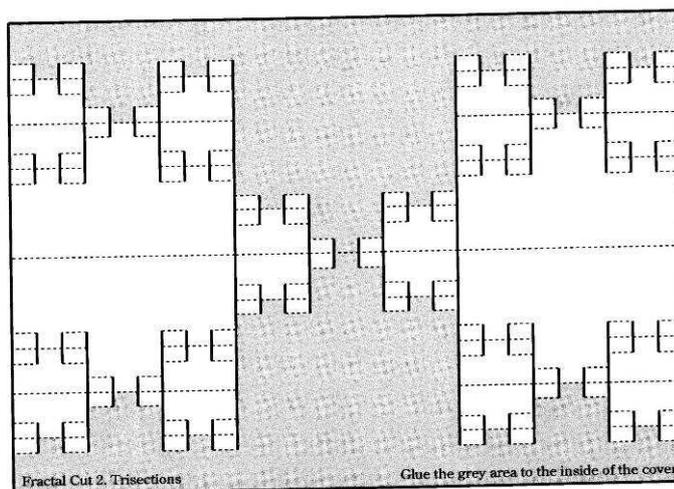


Figura 19: Planificação do cartão *Triseções* [URIBE, 2004, p.25].

Observando a planificação, construímos a lei do processo iterativo para obtermos o cartão. A seguir, faremos uma breve descrição das etapas realizadas para a construção do cartão *Triseções*:

1. Pegue uma folha de tamanho A4.
2. Dobre a folha ao meio ao longo de sua largura (lado maior na posição horizontal da figura 19).
3. Ao longo da dobra da folha de largura  $x$ , marque três segmentos de largura  $\frac{x}{3}$ .

4. Nas extremidades dos segmentos, faça um corte de altura  $y$  (note que serão apenas dois cortes).
5. Dobre os dois retângulos das extremidades do papel para cima, fazendo um vinco. Nessa etapa, teremos um retângulo central e os dois retângulos nas extremidades, virados para cima.
6. As gerações seguintes serão obtidas nos três retângulos formados no cartão, aplicando a mesma regra dos passos 3 e 4, obedecendo sempre a regra de redução de escala. A figura 20 mostra o cartão *Trisecções* construído usando o processo descrito.

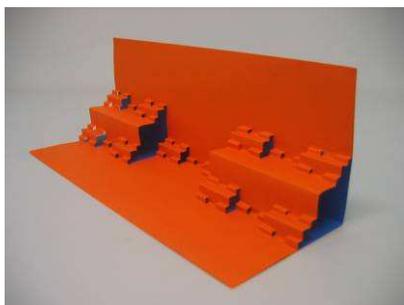


Figura 20: Cartão fractal *Trisecções*.

De forma análoga à exploração dos outros cartões, atribuímos dimensões genéricas para os paralelepípedos obtidos na primeira iteração. Tomando como medida da aresta da base igual ao valor  $a$  (largura) e a aresta lateral por  $\frac{a}{3}$  (altura), construímos a tabela 4, que explora o número de paralelepípedos gerados em cada iteração e o volume.

Tabela 4: Volume dos paralelepípedos novos e volume total do cartão *Trisecções*.

| <i>Iteração</i> | <i>Número de paralelepípedos novos</i> | <i>Volume do novo paralelepípedo</i> | <i>Volume total</i>    |
|-----------------|--|--------------------------------------|------------------------|
| $0$             | $2$                                    | $\frac{a^3}{3^2}$                    | $\frac{a^3}{3^2}$      |
| $1$             | $10$                                   | $\frac{a^3}{3^5}$                    | $64 \frac{a^3}{3^5}$   |
| $2$             | $50$                                   | $\frac{a^3}{3^8}$                    | $1778 \frac{a^3}{3^8}$ |

|     |                |                        |  |
|-----|----------------|------------------------|--|
| 3   | 250            | $\frac{a^3}{3^{11}}$   | $48256 \frac{a^3}{3^{11}}$   |
| ... | ...            | ...                    | ...  |
| $n$ | $2 \times 5^n$ | $\frac{a^3}{3^{3n+2}}$ | $\frac{3a^3}{11} \left[ 1 - \left( \frac{5}{27} \right)^{n+1} \right]$ |

Este cartão apresenta algumas diferenças dos demais. O volume inicial (da iteração 0) é  $a^3/9$  e não mais  $a^3/4$ . Também observa-se um aumento vertiginoso do número de novos paralelepípedos a cada nova iteração e uma forte diminuição do volume do novo paralelepípedo gerado.

## DISCUSSÕES E CONCLUSÕES

Este trabalho mostrou uma proposta de exploração da geometria dos fractais através da construção de cartões fractais tridimensionais. Este tipo de abordagem mostra-se apropriada para exploração de conceitos e propriedades da geometria euclidiana, comumente conhecidos por nossos estudantes no Ensino Fundamental.

Por ser um tema atual e amplo, a exploração da geometria dos fractais permite tornar a aula de matemática um espaço propício para aprendizagem, que une aspectos lúdicos da manipulação do cartão com a abordagem de conceitos matemáticos. É possível ainda investigar, a partir de tópicos da matemática tradicional, conceitos mais elaborados que podem servir como introdução para um conteúdo futuro, como séries e limites.

Esta atividade sugere que, durante o processo de construção dos cartões, podem ser discutidos os seguintes tópicos:

- As características que definem um conjunto fractal, como a auto-similaridade e a complexidade infinita;
- A generalização da lei de crescimento envolvida, por meio do número de “paralelepípedos” ao longo das iterações e dos volumes;
- A descrição de uma seqüência ou série convergente a partir da lei de crescimento do cartão;
- A noção de limite de uma função.

Outra abordagem possível seria a investigação das leis produzidas por outras regras de construção de cartões e pela exploração de outras grandezas, como os comprimentos dos cortes ou as áreas das faces.

Acreditamos que a abordagem proposta aproxima os conceitos matemáticos da realidade do aprendiz, fazendo-o refletir e criar novas relações com a matemática, a partir do jogo da construção dos cartões fractais. Mesmo conceitos muito distantes da realidade, como as séries e limites, tornam-se concretos durante esta exploração.

## REFERÊNCIAS

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimo a Geometria Fractal para a sala de aula. Belo Horizonte**: Editora Autêntica, 2002.

MANDELBROT, Benoit. Comment j'ai découvert lês fractales. **La Recherche**, França, n. 175, pp. 420 - 424, mar. 1986.

MARTINELLI, Rodiane Ouriques; SILVA, Ana Maria Marques da. O que há dentro do triângulo de Pascal?. In: VI Salão de Iniciação Científica da PUCRS, 2005, Porto Alegre. Anais do Salão de Iniciação Científica. Porto Alegre : PUCRS, 2005. v. 1. p. 26937.

MOREIRA, Ildeu de Castro. Fractais. **Complexidade e Caos. Rio de Janeiro**: Editora UFRJ/ COPEA, 2003, pp 51 – 82.

NAVAZ, Mirian Benedetti; MACHADO, Áurea Isabel; SOUZA, Janete Costa de; LUCENA, Márcia E. R. de. A geometria das dobraduras: Trabalhando o lúdico e ressignificando saberes. Disponível em: <<http://ccet.ucs.br/eventos/outros/egem/cientificos/cc03.pdf>>. Acesso em: 25 jan. 2006.

SIMMT, Elaine and BRENT, Davis. Fractal Cards: A Space for Exploration in and Discrete Mathematics. **The Mathematics Teacher**. Vol. 91, n.2, pp. 102-108, fev. 1998.

URIBE, Diego. **Fractal Cuts: Exploring the magic of fractals with pop-up designs**. England : Tarquin Publications, 2004.