PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Silvio Barros Pereira

Introdução à Teoria dos Jogos e a Matemática no Ensino Médio

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática (opção profissional).

Orientadora: Prof. Débora Freire Mondaini

Rio de Janeiro

Setembro de 2014

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Silvio Barros Pereira

Introdução à Teoria dos Jogos e a Matemática no Ensino Médio

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Profa. Débora Freire Mondaini
Orientadora
Departamento de Matemática - PUC-Rio

Profa. Lhaylla dos Santos Crissaff
Universidade Federal Fluminense - UFF

Prof. Eduardo Barbosa Pinheiro
Departamento de Matemática - PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal
Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 11 de setembro de 2014

Silvio Barros Pereira

Licenciou-se em Matemática na Fundação Educacional Unificada Campograndense. É Professor da Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro, Secretaria Estadual de Educação, Centro de Educação e Cultura e Centro Educacional Luiz de Camões.

Ficha catalográfica

Pereira, Silvio Barros

Introdução á Teoria dos Jogos e a Matemática no Ensino Médio: Silvio Barros Pereira; orientador: Débora Freire Mondaini. – 2014.

68 f; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2014.

Inclui bibliografia

1. Matemática. 2. Teoria dos Jogos. 3. Ensino de Matemática. 4. Barganha com Ultimato 5. Dilema do Prisioneiro. 6. Matriz de Ganhos. 7. Estratégia Dominante. 8. Sequencia Didática. I. Mondaini, Débora Freire. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Para minha esposa, Sheila F. M. Barros Pereira,
e filho Samuel Alves Pereira Neto pelo

amor incondicional.

Agradecimentos

A Deus, meu pai eterno, que até aqui sempre me abençoou;

À minha esposa, **Sheila F. M. Barros Pereira**, por sua parceria, compreensão e apoio até nos momentos mais difíceis;

Ao meu amado filho, **Samuel Alves Pereira Neto**, uma inspiração constante em minha vida;

À minha orientadora, **Professora Débora Freire Mondaini**, que sempre se mostrou disponível para estar perto e ajudar em tudo, sendo fundamental para a conclusão desse trabalho;

A todos os meus professores da **PUC-Rio**, pelos ensinamentos e até por me proporcionar um "novo olhar" sobre as dificuldades dos alunos;

A meu parceiro e amigo, **Thiago Oliveira Nascimento**, por toda cumplicidade nesses dois anos de muita luta;

Aos meus irmãos, **Silas Barros Pereira e Selma Pereira da Rocha**, que quando foi necessário disponibilizaram seu tempo para as correções textuais desse trabalho;

A Capes, ao Profmat e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado;

Aos meus colegas de mestrado pela rede de cooperação que nos fortificou até o fim.

Resumo

Pereira, Silvio Barros; Mondaini, Débora Freire (Orientadora). **Introdução à Teoria dos Jogos e a Matemática no Ensino Médio**. Rio de Janeiro, 2014. 68p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O objetivo deste trabalho é aplicar a Teoria dos Jogos como elemento motivador no ensino da Matemática em turmas da 3ª série do ensino médio de uma escola estadual da cidade do Rio de Janeiro, que apresentam com grande frequência dificuldades no aprendizado desta disciplina. Construímos então uma sequência didática a ser realizada em sala de aula: apresentação de breve histórico da teoria, realização do jogo “Dilema do Prisioneiro” e posterior explicação sobre os resultados previstos pela teoria para este jogo, introduzindo os conceitos de matriz de ganhos e estratégia dominante. Em seguida foi aplicado um teste simples de auto-avaliação, para fixação dos tópicos apresentados anteriormente. Assumindo então que neste momento os alunos estão familiarizados com os conceitos mais simples da Teoria dos Jogos, realizamos em sala de aula o jogo “Barganha com Ultimato”, para posterior comparação de resultados com aqueles obtidos por Bianchi [1], Carter e Irons [2] e Castro e Ribeiro [3].

Palavras-chave

Teoria dos Jogos; Ensino de Matemática; Barganha com Ultimato; Dilema do Prisioneiro; Matriz de Ganhos; Estratégia Dominante; Sequência Didática.

Abstract

Pereira, Silvio Barros; Mondaini, Débora Freire (Advisor). **Introduction to Game Theory and Mathematics in Secondary Education**. Rio de Janeiro, 2014. 68p. MSc Dissertation – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The objective of this study is to apply Game Theory as a motivating element in the teaching of mathematics in those classes in the 3rd series of secondary education in the state schools of the city of Rio de Janeiro which have already frequently presented difficulties in learning this discipline. We construct a didactic sequence to be applied in the classroom: presentation of a brief history of the theory; the realisation of the game, "the Prisoner's Dilema"; and a subsequent explanation of the results predicted by Game Theory for this game, introducing the concepts of the result matrix and the dominant strategy. We then apply a simple self-assessment test in order to consolidate these topics. Once the students are familiarised with the basic concepts of Game Theory, we realise "the Ultimatum Game" in the classroom in order to compare the results with those obtained by Bianchi [1], Carter & Irons [2] and Castro & Ribeiro [3].

Keywords

Game Theory; Mathematics Education; Ultimatum Game; Prisioner's Dilema; Payoff Matrix; Dominant Strategy; Didatic Sequence.

Sumário

Listas de tabelas e figuras

1
Introdução

1.1
Objetivo

O objetivo a ser alcançado é aplicar a **TEORIA DOS JOGOS** como elemento motivador no ensino da Matemática, em turmas da 3ª série do Ensino Médio de uma escola estadual no município do Rio de Janeiro, que apresentam, com grande frequência, dificuldades no aprendizado dessa disciplina. Temos observado uma crescente falta de interesse pelos estudos por parte dos alunos, particularmente em relação à Matemática e, por isso, acreditamos que, através da experiência da aplicação da Teoria dos Jogos, podemos ajudá-los a transpor obstáculos e rever conteúdos já estudados como matrizes em uma aplicação concreta, tornando possível o objetivo maior desse trabalho.

No capítulo II, apresentamos a História da Teoria dos Jogos, onde foram destacadas grandes personalidades que muito contribuíram para a aceitação mundial deste importante campo da Matemática. Entre eles, merecem destaque:

John Von Neumann [6], engenheiro químico e matemático húngaro, foi o primeiro a reconhecer que, através do jogo, poderia ser analisado o comportamento social do indivíduo. Ilustrou sua teoria citando o pôquer que, da mesma maneira que uma competição econômica, exige certo tipo de raciocínio, baseado no dualismo “vantagem versus desvantagem”, em que “mais é melhor do que menos”, ou seja, o resultado de um ato individual não depende somente de suas próprias ações, mas também de ações independentes dos outros.

John Nash [7], matemático americano, criou uma teoria focalizando o indivíduo. Segundo ele, a Teoria dos Jogos possibilitaria um ganho mútuo, em que cada jogador escolheria sua melhor resposta para as melhores estratégias dos outros jogadores, de forma independente.

Esse trabalho teve a sua parte teórica desenvolvida em parceria com o professor Thiago Oliveira Nascimento, porém com sequências didáticas distintas.

O desenvolvimento didático teve por objetivo trabalhar com duas escolas distintas, uma com alunos treinados pelo conhecimento da Teoria dos Jogos e a outra com total desconhecimento dessa Teoria.

Ao final desse trabalho fazemos uma comparação de nossos resultados com os esperados pela Teoria dos Jogos e com de outros trabalhos desenvolvidos anteriormente.

1.2
Proposta de trabalho

Acreditamos que, com a apresentação da Teoria dos Jogos e a possibilidade de utilização de conteúdos programáticos já conhecidos, possamos atingir um dos objetivos traçados pelo Profmat, que é uma melhor capacitação do corpo docente da rede pública, tornando-o um motivador, visando à redução da carência de interesse pedagógico existente no Ensino Médio, uma vez que alunos motivados aprenderão a utilizar o mecanismo dos jogos nas diversas situações do cotidiano e, gradativamente, observar-se-á um progresso educacional satisfatório.

Propomos o uso da **TEORIA DOS JOGOS** para o resgate do ensino de matrizes, utilizando como estímulos iniciais um histórico da **TEORIA DOS JOGOS**, a projeção do filme **UMA MENTE BRILHANTE,** apresentação do jogo **DILEMA DO PRISIONEIRO** e encerrando com o jogo **BARGANHA COM ULTIMATO,** mostrando ser possível a modelagem matemática de conflitos para maximizar os resultados dos jogadores em confrontos.

1.3
Resultados esperados

Com o conhecimento básico da Teoria dos Jogos, que tem como uma de suas hipóteses a racionalidade egoísta, e também com a aplicação do jogo “Barganha com Ultimato”, esperamos poder comparar nossos resultados com outros encontrados nos trabalhos de Carter & Irons [1], Bianchi [2] e Castro e Ribeiro [3]. Esses trabalhos buscavam através de experimentos validar resultados previstos pela Teoria dos Jogos.

Finalmente, acreditamos, com essa proposta de trabalho, estimular um aluno, com tantas dificuldades, a utilizar conceitos como o de matrizes, desfrutando da beleza da Matemática e motivando-o a explorar as suas mais diversas aplicações no cotidiano.

2
Pequena história da Teoria dos Jogos

Aceita-se que a criação da Teoria dos Jogos tenha tido início com Von Neumann e Morgenstern, embora segundo Fiani [4] outros autores também sejam citados como precursores da Teoria dos Jogos. Antoine Augustin Cournot seria o primeiro deles, uma vez que publicou em 1838 seu livro *Recherches sur les Principes Mathématiques de La Théorie dês Richesse* (Investigações sobre os Princípios Matemáticos da Teoria das Riquezas). Nesse livro foi apresentado um modelo de duopólio que hoje leva seu nome. O modelo consiste de duas empresas que competem na produção de bens idênticos e que são obrigadas a cobrar preços iguais. Cournot encontrou uma solução em que as duas empresas poderiam produzir quantidades que eram compatíveis entre si, de forma que o lucro de ambas fosse maximizado perante o lucro de mercado.

Outro precursor da Teoria dos Jogos foi o matemático alemão Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo. Em 1913, ele demonstrou que o jogo de xadrez sempre tem uma solução, ou seja, tomando um ponto de partida das peças no tabuleiro, um dos jogadores tem sempre uma estratégia vitoriosa, independente do que o outro jogador faça. Esse método antecipava a técnica de solução que ficou conhecida como indução reversa.

Também, segundo Fiani [4], ao demonstrar que as questões de probabilidade e análise relacionadas à arte da guerra ou especulações financeiras e econômicas podem ser compatíveis com os problemas relacionados a jogos, apesar de possuírem uma maior complexidade, o matemático francês Félix Edouard Justin Emile Borel, também considerado um dos precursores da Teoria dos Jogos, tinha como principal enfoque os jogos de estratégia, intitulados por ele de “método de jogo”, sendo o pioneiro na formulação desse conceito. Segundo o matemático Myerson [5], esses tipos de jogos dependem de sorte e habilidade dos participantes, pois as possíveis circunstâncias determinam a ação do jogador.

Em 1944, a Teoria dos Jogos surgiu formalmente com a publicação do livro *The Theory of Games and Economic Behavior* (Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico) do matemático John Von Neumann e do economista

Oskar Morgenstern [6]. Nesta obra os autores desenvolveram a análise dos jogos de soma zero (jogos em que o ganho de um jogador representa necessariamente uma perda para o outro). Através da aplicação desses tipos de jogos, problemas militares puderam ser resolvidos, por isso eles tiveram grande impacto durante a 2ª guerra mundial. Esses jogos, no entanto, têm pouca aplicação nas relações entre indivíduos e organizações.

A partir da década de 50, os estudos sobre a Teoria dos Jogos avançaram com o matemático John F. Nash Jr, o economista John C. Harsanyi e o matemático e economista Reinhard Selten, que apresentaram ferramentas teóricas que possibilitaram uma maior variedade de modelos de interação.

Nash deu uma contribuição muito importante para a Teoria dos Jogos. Ele mostrou uma noção de equilíbrio para jogos que não se restringiam apenas aos jogos de soma zero, o qual ficou conhecido como equilíbrio de Nash [7]. A partir disso, foi possível estudar uma classe muito maior de jogos, onde eram verificados que cada jogador poderia escolher racionalmente uma estratégia que seria a melhor resposta às estratégias dos demais.

Em 1988, Harsanyi publicou um artigo [8] em que afirmava que o equilíbrio de Nash poderia ser aplicado a jogos assimétricos, ou seja, quando um jogador possui mais informação que o seu oponente. Logo após, em 2001, o Prêmio Nobel de Economia foi dado aos pesquisadores Joseph Stiglitz, George Akerlof e Michael Spence por suas contribuições nas questões assimétricas, que podem ser encontradas em [9].

É válido salientar que a Teoria dos Jogos, apesar de sua contemporaneidade, torna-se bem relevante, despertando grande interesse a estudiosos por suas múltiplas contribuições em economia, matemática pura, ciências sociais, psicologia, sociologia, finanças, biologia e assuntos relacionados à guerra, contribuindo dessa forma a fim de fornecer soluções para problemas sociais, políticos e econômicos.

3
Teoria dos Jogos

3.1
Ideia da Teoria dos Jogos

A Teoria dos Jogos é uma técnica utilizada para analisar situações de conflito com a participação de dois ou mais indivíduos (ou instituições), onde o resultado da ação de um deles depende não apenas da ação feita pelo próprio indivíduo, mas também das ações tomadas pelo outro ou outros. Nestas circunstâncias, os planos ou estratégias das pessoas serão dependentes de expectativas sobre o que os outros estão fazendo. Assim, os indivíduos nestes tipos de situações não estão tomando decisões de forma isolada, uma vez que suas tomadas de decisão estão interdependente relacionadas. Isso é chamado de interdependência estratégica e tais situações são vulgarmente conhecidas como jogos de estratégia, ou simplesmente jogos, enquanto os participantes em tais jogos são referidos como jogadores.

Em jogos estratégicos, as ações de um indivíduo causam impacto sobre os outros. Os jogadores em um jogo estão conscientes de que suas ações afetam ou podem afetar as ações dos outros ou até suas próprias ações no momento de uma tomada de decisão. No entanto, quando os jogadores têm poucas informações sobre as estratégias dos outros, eles têm que fazer suposições das ações dos oponentes. Essas ações constituem o pensamento estratégico e a teoria dos jogos pode nos ajudar a entender o que está acontecendo e fazer previsões sobre os possíveis resultados.

Definições:

- Jogo estratégico: um cenário ou situação com a participação de dois ou mais indivíduos, onde a escolha de ação ou comportamento de um tem impacto sobre os outros.
- Jogador: um participante em um jogo estratégico.
- Estratégia: plano de ação que um jogador escolhe para o jogo.
- Pagamentos: ganhos e perdas dos jogadores.

Exemplos de jogos estratégicos:

l) Os líderes de dois países contemplando uma guerra um contra o outro.

ll) Os formuladores de políticas econômicas de um país que contemplam a possibilidade de impor uma tarifa sobre as importações.

lll) Duelo entre batedor e goleiro na cobrança de um pênalti.

lV) Um criminoso decidir confessar ou não um crime que cometeu com um cumplice, que também está sendo questionado pela polícia.

3.2
Descrição de jogos estratégicos

Com a finalidade de aplicarmos a Teoria dos Jogos, um primeiro passo consiste em definirmos o jogo estratégico em consideração. Os jogos são definidos em termos de suas regras. As regras de um jogo incorporam informações sobre a identidade dos jogadores, seu conhecimento do jogo, os seus possíveis movimentos ou ações e seus resultados (pay-offs). As regras de um jogo descrevem em detalhes como as ações de um jogador causam impacto sobre os resultados dos outros jogadores. Um jogador pode ser um indivíduo, um casal, uma família, uma empresa, ou o governo. Os resultados obtidos pelos jogadores podem ser medidos em termos de unidades de dinheiro ou qualquer coisa que possa ser relevante para a situação. Muitas vezes é útil a representação dos resultados através de unidades de satisfação ou utilidade.

Às vezes é mais simples não atribuir números aos resultados. Em vez disso, é possível atribuir letras ou símbolos para representá-los e, em seguida, apresentar os seus rankings. No entanto, em algumas circunstâncias, o valor real dos resultados é importante e isso deve ser analisado com cuidado.

Os jogadores, presumidamente racionais, agem fazendo planos ou escolhem ações com o objetivo de obterem os melhores resultados, ou seja, escolhem estratégias para maximizar seus resultados. Por causa da interdependência que caracteriza jogos estratégicos, o melhor plano de ação de um jogador para o jogo, a sua estratégia preferida vai depender de que forma ele acha que os outros jogadores estão propensos a fazer.

O resultado teórico de um jogo é expresso em termos de combinação de estratégias que têm maior probabilidade de atingir os objetivos dos jogadores, dadas as informações disponíveis para eles. A teoria dos jogos se concentra em combinações das estratégias dos jogadores, que podem ser caracterizadas como estratégias de equilíbrio. Se os jogadores escolhem suas estratégias de equilíbrio estão fazendo o melhor que podem, dadas as escolhas dos outros jogadores. Nestas circunstâncias, não há incentivo para qualquer jogador mudar seu plano de ação. O equilíbrio de um jogo descreve as estratégias que os jogadores racionais estão propensos a escolher quando eles interagem.

Os jogos são frequentemente caracterizados pela forma ou ordem em que os jogadores se movem. Jogos em que os jogadores se movem ao mesmo tempo são chamados de jogos simultâneos. Jogos em que os jogadores se movem em algum tipo de ordem pré-determinada são chamados de sequenciais.

3.3
Jogos simultâneos

Nesses tipos de jogos os jogadores fazem movimentos ao mesmo tempo ou seus movimentos são invisíveis pelos outros jogadores. Em ambos os casos, os jogadores precisam formular suas estratégias com base no que eles pensam que os outros jogadores irão fazer. Este tipo de jogo é analisado utilizando o que chamamos de matriz de resultados ou forma estratégica de um jogo. Muitas vezes os pagamentos desses tipos de jogos, de conflito puro, resultam em uma soma constante, e se a constante é zero, então o jogo é de soma zero. A maioria dos jogos não é de soma zero, geralmente há alguma margem de ganho mútuo. Apresentaremos dois exemplos: a brincadeira esconde-esconde e gestores de um bar.

l) Esconde-esconde (jogo de soma zero)

Esconde-esconde é jogado por dois jogadores chamados A e B. O jogador A escolhe entre apenas duas estratégias disponíveis: ou se esconde dentro da casa ou se esconde no jardim. O jogador B escolhe se irá procurá-lo na casa ou no jardim. B só tem 10 minutos para encontrar A. Se B sabe onde A está se escondendo (dentro da casa ou no jardim), ele descobre a posição de A, dentro do prazo estipulado. Caso contrário, não o faz. Se B encontra A, no tempo previsto, A paga R$ 50,00 para B. Caso contrário, A ganha R$ 50,00 de B.

Tabela 1 – Jogo esconde – esconde

		Jogador B	
		Procurar na casa	Procurar no jardim
Jogador A	Esconder na casa	(-50, 50)	(50, -50)
	Esconder no jardim	(50, -50)	(-50, 50)

Este é um jogo de soma zero pois, o ganho de um jogador é exatamente a perda do outro jogador.

ll) Gestores de um bar (jogo de soma não-zero)

No jogo gestores de um bar, os jogadores são dois gerentes de diferentes bares A e B. Ambos os gerentes estão, simultaneamente, considerando introduzir uma oferta especial para os seus clientes, reduzindo o preço de sua cerveja. Cada um escolhe entre fazer a oferta especial ou não. Se um deles faz a oferta, mas o outro não, o gerente que faz a oferta irá ganhar alguns clientes do outro e uma popularidade maior. Mas, se ambos fazem a oferta, não ganham clientes do outro, embora ambos ganhem maior popularidade. Qualquer aumento de clientes gera maior receita para o bar. Vamos considerar que as receitas semanais de A e B, sem a promoção, sejam de R$ 7000,00 e R$ 8000,00 respectivamente.

Tabela 2 – Jogo gestores de um bar (ganhos em milhares de reais)

		Jogador A	
		Oferta	Sem oferta
Jogador B	Oferta	(10, 14)	(18, 6)
	Sem oferta	(4, 20)	(7, 8)

Este é um jogo de soma não-zero pois, o ganho de um jogador não é exatamente a perda do outro jogador.

3.4
Jogos sequenciais

Nos jogos sequenciais, os jogadores fazem seus movimentos em algum tipo de ordem. Isto significa que um jogador se move em primeiro lugar e o outro jogador ou jogadores verão o primeiro movimento do primeiro jogador e responderão a esse movimento. Nos jogos sequenciais finitos, a melhor forma de representação se dá pela forma extensiva ou esquema de árvores composta por ramos e nós.

Cada nó (que são representados pelos círculos sombreados) representa uma etapa do jogo em que um dos jogadores tem que tomar uma decisão. Os ramos (representados pelos segmentos de reta) representam as escolhas possíveis para o jogador a partir do seu nó.

Abaixo segue um exemplo de jogo sequencial representado por uma árvore:

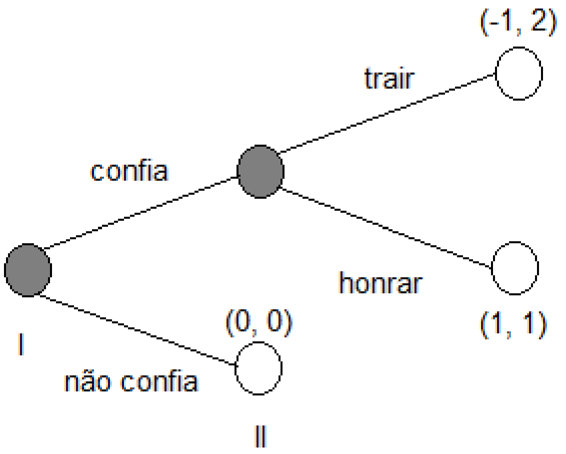


Figura 1 – Jogo confiar ou não confiar

O jogador I decide acreditar ou não no jogador II. Se decidir não acreditar, o jogo acaba (e ninguém ganha ou perde nada). Se decidir acreditar, o jogador II decide então trair ou não o jogador I (os ganhos e perdas para cada decisão estão descritas pelos pares no esquema acima).

3.5
Jogos repetitivos

São jogos que são jogados pelos mesmos jogadores mais do que uma vez em várias fases. As estratégias dos jogadores em jogos repetitivos precisam definir os movimentos que pretendem fazer a cada repetição ou fase do jogo. As estratégias que os jogadores usam podem ser alteradas a cada repetição. Como exemplo podemos citar uma disputa de cobranças de pênaltis.

3.6
Jogos cooperativos e não-cooperativos

Se um jogo é cooperativo, ou não, é uma questão técnica. Essencialmente um jogo é cooperativo se os jogadores estão autorizados a se comunicar e quaisquer acordos que eles façam, sobre como jogar o jogo, são executados tal como definidos por suas escolhas estratégicas. A maioria dos jogos são não-cooperativos, mesmo que, em alguns deles, os jogadores escolham entre cooperar uns com os outros ou não, por exemplo, o jogo Dilema dos Prisioneiros que veremos adiante.

3.7
Jogos de informações completas e incompletas

Em alguns jogos os jogadores são muito bem informados um sobre o outro, mas isso não ocorre em todos os jogos. Se a informação é completa, então cada jogador sabe onde seus oponentes estão no jogo, quantos são e como eles estão jogando. Quando a informação não é completa, existe a incerteza na posição de um ou mais jogadores, suas posições no jogo ou como estão jogando. Como exemplo de jogo com informações completas, podemos citar o jogo da velha com estratégias de preenchimento de linha, coluna ou diagonal. Como exemplo de informações incompletas citamos os leilões de lances simultâneos, pois um participante desconhece o valor dos lances dos outros.

4
Soluções

Uma das formas para determinarmos a solução de um jogo se faz por meio da análise das estratégias que conduzem aos seus possíveis equilíbrios. Desta maneira, existem dois tipos de equilíbrios: estratégia dominante e equilíbrio de Nash.

4.1
Estratégias dominantes

Quando um jogador possui várias estratégias disponíveis, ele precisa, de maneira racional, escolher qual delas irá determinar o melhor resultado possível, ou seja, o maior ganho de acordo com os seus objetivos. Quando uma destas estratégias é superior às outras (ou seja, leva a um ganho maior), sem depender da jogada escolhida pelo oponente, dizemos que a estratégia é *estritamente dominante.* Quando uma estratégia é superior somente a algumas estratégias de seu conjunto de estratégias possíveis e leva a ganhos iguais aos das estratégias restantes, dizemos que ela é *fracamente dominante.*

Considere um jogador $a_i \in A$, onde A é o conjunto finito de n jogadores de um certo jogo. Seja $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{im_i}\}$ o conjunto de m_i estratégias *puras* do jogador a_i (conjunto de todas as opções possíveis de estratégia).

O espaço de estratégias puras do jogo (considerando todos os jogadores) é definido por

$$S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n.$$

O vetor $s \in S$ é dado por $s = (s_{1j_1}, s_{2j_2}, \ldots, s_{nj_n})$, onde s_{ij_i} representa uma estratégia pura do jogador a_i (ou seja, o vetor s carrega uma estratégia pura de cada jogador).

Para cada conjunto de estratégias puras $s \in S$, a função que fornece o ganho (ou perda) no jogo para cada um dos jogadores $a_i \in A$ (i = 1, ... n) é a função u_i, que associa a cada elemento de $s \in S$ um número real.

Seja s_{-i} um vetor que carrega uma estratégia pura de cada um dos jogadores, exceto o jogador a_i. Definimos $S_{-i} = S_1 \times S_2 \times S_{i-1} \times S_{i+1} \ldots \times S_n$.

Uma *estratégia pura* $s_{ik} \in S_i$ do jogador $a_i \in A$ é ***estritamente dominada*** pela estratégia $s_{iq} \in S_i$ se $u_i\left(s_{iq}, s_{-i}\right) > u_i\left(s_{ik}, s_{-i}\right)$, para todo $s_{-i} \in S_{-i}$.

A estratégia $s_{ik} \in S_i$ é ***fracamente dominada*** pela estratégia $s_{iq} \in S_i$ se $u_i\left(s_{iq}, s_{-i}\right) \geq u_i\left(s_{ik}, s_{-i}\right)$, para todo $s_{-i} \in S_{-i}$.

Usaremos a situação abaixo para ilustrar a existência de estratégias dominantes. O jogo apresentado envolve dois jogadores com duas únicas estratégias para ambos, Alto ou Baixo. As pontuações apresentadas são meras sugestões.

Para este jogo, o espaço de estratégias puras é o seguinte:

$$S = S_1 \times S_2 = \{(u_1, u_2) \epsilon\, S_1 \times S_2, u_1 \,\epsilon\, S_1 \ e \ u_2 \,\epsilon\, S_2\}$$
$$= \{(alto, alto), (alto, baixo), (baixo, alto), (baixo, baixo)\}$$

Os ganhos do jogador a_1 (o qual chamamos jogador linha) são:

$u_1(alto, alto) = 5$, $u_1(alto, baixo) = 4$ $u_1(baixo, alto) = 3$ e $u_1(baixo, baixo) = 2$

Os ganhos do jogador a_2 (o qual chamamos jogador coluna) são:

$u_2(alto, alto) = 4$, $u_2(alto, baixo) = 2$ $u_2(baixo, alto) = 3$ e $u_2(baixo, baixo) = 1$

Então, podemos construir a seguinte matriz de ganhos, onde a 1ª coordenada de cada entrada é do jogador 1 e a 2ª coordenada do jogador 2.

Tabela 3 – Jogo alto ou baixo

	Alto	Baixo
Alto	(5,4)	(4,2)
Baixo	(3,3)	(2,1)

Podemos verificar que para o jogador 1, (jogador linha, cujos resultados estão expressos na primeira coordenada de cada entrada da matriz), a melhor estratégia é escolher sempre *Alto*, pois seu pagamento será melhor do que se escolher a estratégia B*aixo*, independentemente do que o jogador 2 escolher. Para o jogador 2, (jogador coluna, cujos resultados estão expressos na segunda coordenada de cada entrada da matriz), a melhor estratégia também é escolher

Alto, independentemente do que o jogador 1 escolher. Como os dois participantes possuem estratégias dominantes iguais, o conjunto de estratégias (Alto, Alto) é a solução racional do jogo, conhecida como solução de *equilíbrio* do jogo.

Usaremos a situação abaixo para ilustrar a existência de estratégias dominantes, porém fracamente dominantes. O jogo apresentado envolve dois jogadores com duas únicas estratégias para ambos, Alto ou Baixo. As novas pontuações apresentadas também são meras sugestões.

Espaço de estratégias puras:

$$S = S_1 x S_2 = \{(u_1, u_2) \epsilon\ S_1 \times S_2, u_1\ \epsilon\ S_1\ e\ u_2\ \epsilon\ S_2\}$$

$$S = \{(alto, alto), (alto, baixo), (baixo, alto), (baixo, baixo)\}$$

Ganhos do jogador linha (a_1):

$u_1(alto, alto) = 1, u_1(alto, baixo) = 1\ u_1(baixo, alto) = 1$
e $u_1(baixo, baixo) = 0$

Ganhos do jogador coluna (a_2):

$u_2(alto, alto) = 1, u_2(alto, baixo) = 0\ u_2(baixo, alto) = 0$
e $u_2(baixo, baixo) = 1$

Tabela 4 – Jogo alto ou baixo

	Alto	Baixo
Alto	(1,1)	(1,0)
Baixo	(1,0)	(0,1)

Se começarmos a análise pelas colunas, ou seja, observando a segunda coordenada das entradas da matriz, percebemos que não existe uma dominância, nem mesmo fraca: nosso objetivo é maximizar os ganhos do jogador coluna. Se o jogador linha escolhesse “Alto”, o jogador coluna observa que o pagamento 1 é maior que 0, logo a estratégia s_{11} é melhor. Entretanto, se o jogador linha escolhesse “Baixo”, como o pagamento 0 é menor que 1, então a estratégia s_{22} é melhor.

Analisando as linhas, ou seja, observando a primeira coordenada das entradas da matriz obteremos uma estratégia fracamente dominante: nosso objetivo agora é maximizar os ganhos do jogador linha. Se o jogador coluna escolhesse “Alto”, como o pagamento 1 é igual a 1, as estratégias s_{11} e s_{21} são igualmente boas. Se o jogador coluna escolhesse “Baixo”, temos que o pagamento 1 é maior que 0, logo a estratégia s_{12} é melhor que s_{22}. Ou seja, para uma das escolhas do jogador coluna, a estratégia s_{11} é tão boa para o jogador linha quanto a estratégia s_{12}, mas para a outra escolha do jogador coluna, s_{11} é melhor que a estratégia s_{12} para o jogador coluna, logo s_{11} domina fracamente s_{12}. Dizemos neste caso que (1,1) é um equilíbrio de estratégia fracamente dominante.

4.2
Equilíbrio de Nash

Em casos em que não é possível determinar a solução de um jogo por estratégias dominantes, podemos utilizar outro conceito de solução, denominado *equilíbrio de Nash.*

Informalmente, definimos equilíbrio de Nash como um conjunto de estratégias (uma para cada jogador) onde cada jogador não se sente motivado a mudar de estratégia se o outro não o fizer também.

De modo formal, dizemos que um perfil de estratégias $s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ (uma estratégia para cada um dos n jogadores) é um equilíbrio de Nash se

$$u_i\ (s_i^*, s_{-i}^*) \geq\ u_i\ (s_{ij_i}, s_{-i}^*)$$

Para todo i = 1, ..., n e todo j_i = 1, ..., m_i (onde m_i é o número de estratégias possíveis para o jogador a_i).

Para exemplificar a existência do equilíbrio de Nash apresentaremos na próxima seção o jogo “Dilema do Prisioneiro”.

4.3
Um jogo clássico: Dilema do Prisioneiro

Este jogo, sugerido em 1950 pelos matemáticos Merril Flood e Melvin Dresher, da Empresa Rand, foi usado por Albert W. Tucker, mentor de Nash na Universidade de Princeton, como ilustração para uma plateia formada de psicólogos da Universidade de Stanford para exemplificar a utilização da Teoria dos Jogos.

O Dilema do Prisioneiro é um jogo em que os dois jogadores têm os mesmos ganhos, mesmas penalidades e as estratégias são iguais para os dois. Nesse jogo, a polícia prende dois comparsas, Antônio e Bruno, por serem suspeitos de terem cometido um crime grave. A polícia não possui provas suficientes para condená-los por esse crime, mas pode deixá-los na prisão por um crime menor. Quando levados à delegacia, são colocados em celas separadas e o promotor oferece a ambos o mesmo acordo; caso um dos prisioneiros testemunhe para a promotoria contra o outro e o outro permaneça calado, o traidor ficará livre da cadeia e o seu cúmplice, se ficar calado, pegará dez anos de cadeia. Caso ambos permaneçam em silêncio, serão condenados a um ano de prisão para cada um, caso ambos confessem cada um ficará cinco anos na prisão.

Apresentamos abaixo os possíveis resultados:

Tabela 5 – Jogo dilema do prisioneiro

		Bruno	
		Confessa	Não confessa
Antônio	Confessa	-5 anos para Antônio -5 anos para Bruno	0 ano para Antônio -10 anos para Bruno
	Não confessa	-10 anos para Antônio 0 ano para Bruno	-1 ano para Antônio -1 ano para Bruno

Como as decisões são simultâneas e um desconhece a decisão do outro, cada um deve escolher a opção que irá maximizar seu resultado individual, isto é, permanecer o menor tempo possível na cadeia, independente da opção do seu companheiro.

É importante também destacar que as escolhas de ambos são estritamente racionais, não devendo haver nenhuma interferência de ordem afetiva, moral ou religiosa. Assim, podemos fazer as considerações (lógico-matemáticas) que cada prisioneiro faz sobre sua situação.

Num primeiro momento, a opção mais interessante parece ser a cooperação mútua dos prisioneiros, isto é, não confessar e consequentemente cada um ficaria um ano na prisão. Mas como os prisioneiros encontram-se incomunicáveis e sem condições de um garantir a fidelidade do outro, devem portanto agir racionalmente, procurando a melhor opção individual, considerando apenas as possíveis escolhas do companheiro.

Supondo ser eu, Antônio, e acreditando que Bruno irá confessar, a melhor opção é confessar e assim pegarei cinco anos de prisão e não dez anos. Supondo também que Bruno não confesse, ainda assim a minha melhor opção é confessar e ficar livre e não preso por um ano. Sendo eu Antônio, percebo que a minha melhor opção, independente da decisão de Bruno, é confessar.

Supondo agora ser eu Bruno, sendo tão racional quanto Antônio, acreditando que Antônio irá confessar, a minha melhor opção é confessar e assim pegarei cinco anos de prisão e não dez anos. Supondo também que Antônio não confesse, ainda assim a minha melhor opção é confessar e ficar livre e não preso por um ano. Sendo eu Bruno, percebo que a minha melhor opção, independente da decisão de Antônio, é confessar.

Von Neumann e Morgenstern propuseram um modelo matemático em que cada um dos comparsas, pensando racionalmente, vai confessar, o que leva também o outro a confessar. E é efetivamente o que acontece, ambos confessam e passam cinco anos presos. Ou seja, o perfil de estratégias (confessar, confessar) chama-se equilíbrio de Nash: é a melhor decisão possível levando-se em conta a decisão que o outro tomará.

Socialmente, o dilema é: o que vai acontecer? Como os prisioneiros vão reagir? Confiarão no cúmplice e negarão o crime, mesmo correndo o risco de serem colocados numa situação ainda pior, ou confessarão, apesar de que, se o outro fizer o mesmo, ambos ficarão numa situação pior do que se permanecessem calados?

Nesse jogo não se deve analisar simplesmente as penalidades e sim as vantagens de uma decisão associada à decisão do outro jogador, consciente de que confiar e trair são estratégias do jogo.

No jogo, quando cada pessoa persegue seu próprio interesse particular, ela não promove, necessariamente, o melhor interesse da coletividade.

Considerando a hipótese de que os comparsas pudessem conversar antes de tomar sua decisão (individual), de nada adiantaria um deles prometer ficar calado caso o outro também fique, pois sua estratégia estritamente dominante está na traição. Apenas quando rodadas sucessivas do Dilema dos Prisioneiros são permitidas é que a comunicação poderia servir para alinhar os interesses contrários em torno da cooperação mútua, mas isso envolve outros fatores típicos da interação do jogo. No Dilema dos Prisioneiros, a comunicação pode ajudar no aparecimento da cooperação, sem a necessidade de firmar acordos, apenas pela implementação de ações de reciprocidade.

4.4
Busca por soluções: exemplos

A. Método da eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas

Um dos métodos utilizados para determinar o resultado de um jogo é chamado método de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas. Dado que a matriz das recompensas (tabela composta de possíveis resultados e pagamentos obtidos pelos jogadores) é de conhecimento comum, os jogadores podem desconsiderar as estratégias cujas recompensas são menores que outras.

Como exemplo, usaremos uma variação do jogo batalha dos sexos.

Nesta versão do jogo não há um equilíbrio dominante, o homem tem por preferência ir para a festa e quer ir acompanhado da mulher, porém ela não quer estar acompanhada por ele. Neste jogo, o homem é perseguidor da mulher. Ele quer estar com ela, mas ela não quer estar perto dele. A preferência do homem é ir para a festa, isso faz com que essa seja uma estratégia dominante para ele. A mulher não tem uma estratégia dominante, ela só quer evitar o homem, escolhendo o oposto de tudo o que ele escolhe. A matriz que representa esse jogo é apresentada na tabela abaixo.

Tabela 6 – Jogo festa ou clube

		Homem	
		festa	clube
Mulher	festa	(1, 3)	(2, 0)
	clube	(2, 2)	(1, 1)

Para fazermos a eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas, precisamos excluir as estratégias dominadas do jogo até que reste apenas um único par de estratégias. Neste jogo, clube é uma estratégia dominada para o homem, pois, desde o início do jogo, sabemos de sua preferência em ir para a festa e, sendo assim, sua recompensa é sempre maior do que a escolha clube. Se a mulher escolhe ir pra festa e o homem também, seu resultado é 3, mas se ele escolhe ir para o clube, o resultado é 0. Da mesma forma, se a mulher escolhe ir para o clube e o homem ir para a festa, seu resultado é 2, mas se ele optar ir também ao clube, seu resultado é 1.

Consequentemente, ele sempre recebe menos escolhendo clube, o que significa que clube é uma estratégia estritamente dominada para o homem (festa é uma estratégia fortemente dominante). Por isso, se ele é racional, ele nunca vai escolher ir ao clube e, sendo assim, podemos excluir a coluna correspondente ao clube.

Tabela 7 – Jogo festa ou clube

		Homem
		festa
Mulher	festa	(1,3)
	clube	(2,2)

Podemos observar que clube é uma estratégia dominante para a mulher (ela recebe 2, indo para o clube, e apenas 1, indo para a festa), por isso também podemos excluir a linha correspondente à opção festa. Isso deixa apenas uma estratégia para cada jogador: clube para a mulher e festa para o homem.

Tabela 8 – Jogo festa ou clube

		Homem
		festa
Mulher	clube	(2,2)

Para este tipo de solução de jogos, uma estratégia dominada não necessita ser inferior em todos os seus elementos, pois, na medida em que uma estratégia qualquer não é melhor nem pior que a outra, ela pode ser considerada dominada. Entretanto, quando uma estratégia é melhor em alguns casos, mas pior em outros, então ela não domina nem é dominada por nenhuma outra estratégia.

B. Método minimax

Nos jogos de soma zero com duas pessoas, podemos encontrar a solução pelo método minimax: procuramos minimizar as perdas e maximizar os lucros, ao mesmo tempo. Para tanto é necessário que primeiro sejam definidos os padrões de comportamento dos dois jogadores. A Teoria dos Jogos supõe que os jogadores vão agir de forma racional.

Para determinação do resultado, usaremos o problema abaixo, com ganhos do jogador A, que é um jogo de soma zero entre duas pessoas, envolvendo o conjunto de estratégia pura onde o jogador A pode responder A1, A2 ou A3 e o jogador B, B1 e B2, com a seguinte matriz de resultados com valores dos ganhos do jogador A.

Tabela 9 – Aplicando o teorema minimax

		Jogador B		
		B1	B2	Mínimo da linha
Jogador A	A1	9	2	2
	A2	8	6	6 (Maximin)
	A3	6	4	4
Máximo da coluna		9	6 (Minimax)	

Suponha que o jogador A começa o jogo sabendo muito bem que para qualquer estratégia adotada por ele, o jogador B irá selecionar uma estratégia que irá minimizar o resultado de A. Se A selecionar a estratégia A1 então B irá selecionar B2 para que A obtenha ganho mínimo. Da mesma forma, se A escolhe A2, B escolhe B2. Naturalmente, A gostaria de maximizar o seu ganho, maximin, que é o maior dos mínimos da linha. Da mesma forma, B irá minimizar sua perda, o que chamamos de minimax. Podemos observar que, o máximo da linha e o mínimo da coluna são iguais, desta forma chamamos o par (A2, B2) de ponto de sela. Assim, concluímos que A2 é a melhor estratégia a ser adotada pelo jogador A e B2 é a melhor estratégia a ser adotada pelo jogador B.

4.5 Mais exemplos de Jogos

Além do jogo Dilema do Prisioneiro, um dos mais populares na Teoria dos Jogos, há também outros que são bastante utilizados na literatura.

1. Batalha dos sexos

Um casal decidiu que iria, naquela noite, ao cinema ou ao jogo de futebol. O marido, João e a mulher, Maria, preferem ir juntos a ir sozinhos. Embora João prefira ir com Maria ao futebol, preferiria ir com ela ao cinema a ir sozinho ao futebol. Da mesma forma, a primeira preferência de Maria é a de irem juntos ao cinema, mas ela também preferiria ir ao jogo de futebol com João a ir sozinha ao cinema. A matriz que representa esse jogo é apresentada na tabela abaixo. Os resultados refletem a ordem das preferências dos jogadores.

Tabela 10 – Jogo batalha dos sexos

		Mulher	
		futebol	cinema
Homem	futebol	(10,5)	(0,0)
	cinema	(0,0)	(5,10)

Na batalha dos sexos, a melhor recompensa seria ambos escolherem o mesmo programa, mesmo que Maria prefira ir ao cinema a ir ao jogo de futebol, e

João prefira ir ao futebol a ir ao cinema. Mas nenhum dos dois quer ir ao seu programa preferido sozinho, assim, João prefere ir ao cinema com Maria a ir ao futebol sozinho e Maria prefere ir ao futebol com João a ir sozinha ao cinema.

Este jogo possui dois equilíbrios de Nash: (futebol, futebol) e (cinema, cinema).

Verificamos que este jogo é de soma não zero, simultâneo, cooperativo e de informação completa.

2. Jogo das moedas

Quatro moedas são dispostas em duas pilhas de duas moedas. O jogador I escolhe uma pilha e então decide remover uma ou duas moedas da pilha escolhida. Após, o jogador II escolhe uma pilha com pelo menos uma moeda e decide quantas moedas quer remover. Após a jogada do jogador II, o jogador I inicia a segunda rodada com as mesmas regras. Quando ambas as pilhas não possuírem mais moedas, o jogo termina e o perdedor é aquele que tirou a última moeda.

As estratégias para cada jogador deste jogo devem especificar o que cada um deles irá fazer, dependendo de quantas pilhas são deixadas e quantas moedas há em cada pilha, em cada etapa. Abaixo temos o diagrama com todas as possibilidades.

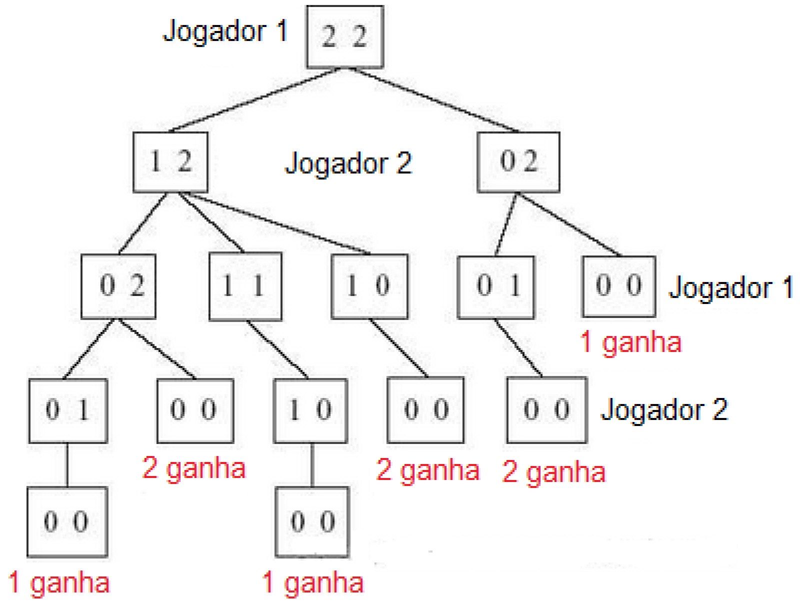


Figura 2 – Jogo das moedas

Nesse jogo, o jogador 2, independentemente da jogada do jogador 1 poderá sempre sair vencedor. Caso o jogador 1 retire uma moeda, o jogador 2 garante a vitória retirando duas moedas. Caso o jogador 1 retire duas moedas, o jogador 2 garante a vitória retirando uma moeda.

Verificamos que este jogo é de soma não zero, não cooperativo, sequencial e de informação completa.

3. Gestores de um bar

No jogo Gestores de um bar, os jogadores são dois gerentes de diferentes bares A e B. Ambos os gerentes estão, simultaneamente, considerando introduzir uma oferta especial para os seus clientes, reduzindo o preço de sua cerveja. Cada um escolhe entre fazer a oferta especial ou não. Se um deles faz a oferta, mas o outro não, o gerente que faz a oferta irá ganhar alguns clientes do outro e uma popularidade maior. Mas, se ambos fazem a oferta, não ganham clientes do outro, embora ambos ganhem maior popularidade. Qualquer aumento de clientes gera maior receita para o bar. Iremos considerar que as receitas semanais de A e B, sem a promoção, são de R$ 7000,00 e R$ 8000,00 respectivamente.

Tabela 11 – Jogo gestores de bar (ganhos em milhares de reais)

		A	
		Oferta	Sem oferta
B	Oferta	(10, 14)	(18, 6)
	Sem oferta	(4, 20)	(7, 8)

Neste jogo há quatro combinações de estratégias possíveis correspondentes a quatro possíveis conjuntos de resultados:

1) Nenhum dos dois gestores fazem a oferta especial. O resultado para o gestor A é 8 e para o gestor B é 7.
2) Os dois gestores fazem a oferta: ambos os bares ganham novos clientes. Os resultados são 14 para A e 10 para B.
3) O gestor A faz a oferta, mas o gestor B não: A conquista clientes de B. Os resultados são 20 para A e 4 para B.
4) O gestor A não faz a oferta especial, mas o gestor B faz: B recebe clientes vindos de A. Os resultados são 6 para A e 18 para B.

Para verificar se o jogo tem um equilíbrio de estratégia dominante é preciso verificar se ambos os jogadores têm uma estratégia dominante. Primeiro vamos considerar o jogo a partir da perspectiva do gestor B. Se ele faz a oferta, seu resultado é 10 ou 18. Será 10, se o gestor A também fizer a oferta e 18 se não fizer. Se o gestor B não faz a oferta, seu resultado é 4 ou 7. Será 4, se o gestor A fizer a oferta. Isso é menor do que os 10 que ele teria conseguido se tivesse feito a oferta. Se ele não fizer a oferta e o gestor B também não, seu resultado será 7, que também é menor do que os 18 que ele teria conseguido se tivesse feito a oferta.

Este raciocínio mostra que o melhor para o gestor B é fazer a oferta independente do que o gestor A fizer. Desta forma, fazer a oferta é uma estratégia dominante para ele.

De forma análoga podemos analisar as escolhas de estratégia do gestor A para mostrar que a introdução da oferta também é uma estratégia dominante.

Como fazer a oferta é uma estratégia dominante para ambos os gestores, o equilíbrio estratégia dominante deste jogo é (oferta, oferta).

Verificamos que este jogo é de soma não zero, não cooperativo, simultâneo e de informação completa.

4. Jogo do covarde

O jogo do covarde é uma representação de uma competição entre os adolescentes norte-americanos na década de 1950, representada no cinema em alguns filmes bastante famosos.

Nesse jogo, temos dois adolescentes, João e Pedro, que dirigem seus carros em alta velocidade um em direção ao outro. O objetivo é identificar quem desviará primeiro: este será o covarde. O que não desviará será o durão.

Se ambos desviarem ao mesmo tempo, ninguém perde o jogo, mas se ambos forem "durões" e não desviarem sofrerão um acidente gravíssimo, visto a alta velocidade dos carros, pondo em risco suas próprias vidas. As recompensas podem ser representadas na forma estratégica ou normal.

Tabela 12 – Jogo do covarde

		Pedro	
		Não desvia	Desvia
João	Não desvia	(-2,-2)	(2,-1)
	Desvia	(-1,2)	(0,0)

No jogo, a recompensa sobre as escolhas de ambos não desviarem é a pior possível, visto que o resultado seria o acidente, representado por um valor numérico somente para ordenar as preferências. Não tão ruim seria desviar, se o outro desvia, mas a preferência seria não desviar se o outro desvia.

Existem dois equilíbrios de Nash no jogo, (não desvia, desvia) e (desvia, não desvia). De fato, se João sabe que Pedro não vai desviar, sua melhor estratégia é desviar. Se João sabe que Pedro vai desviar, então sua melhor estratégia é não desviar. Analogamente, se Pedro sabe que João não vai desviar, escolhe desviar. E se Pedro sabe que João vai desviar, escolhe não desviar.

O jogo do covarde tem sido empregado não apenas para descrever uma situação no mundo econômico na qual é melhor evitar o enfrentamento, como também foi muito popular na época da guerra fria entre os Estados Unidos e a antiga União Soviética, para descrever os riscos de um conflito termonuclear e a necessidade de mecanismos que evitassem o confronto.

Esse jogo é classificado como de soma não zero, simultâneo, não cooperativo, de informação completa.

5. Pôquer Simplificado

Duas pessoas, Eduardo e Felipe jogam um jogo de pôquer bastante simples, onde apenas dois tipos de cartas estão envolvidos: 2 e ás (como o baralho possui 4 naipes, podemos assumir que o número de cartas envolvidas no jogo é 8). O jogo funciona da seguinte forma: cada jogador recebe uma carta (2 ou ás). A carta "ás" sempre vence a carta "2". Felipe, com sua carta em mãos, resolve seguir uma das estratégias possíveis: falar a verdade (ou seja, se possui um 2, fala "Dois"; se possui um "ás", fala "ás") ou blefar (ou seja, não importa a carta recebida, pois ele sempre falará "ás"). Eduardo, por sua vez, tem também duas estratégias: acreditar em Felipe ou não acreditar.

Tabela 13 – Jogo pôquer simplificado

		Felipe	
		Verdade	Blefe
Eduardo	Acreditar	(0,0)	(-1,1)
	Não acreditar	(-1/2,1/2)	(0,0)

Vamos analisar o jogo utilizando o critério minimax, usando apenas os ganhos de Eduardo.

Tabela 14 – Jogo pôquer simplificado

		Felipe		
		Verdade	Blefe	Mínimo da linha
Eduardo	Acreditar	0	-1	-1
	Não acreditar	-1/2	0	-1/2 (Maxmin)
Máximo da coluna		0	0	

Como podemos verificar o valor maxmin = -1/2 < 0 = minimax. Desta forma, Eduardo pode estar certo de receber um pagamento mínimo de -1/2, mas Felipe tem apenas a garantia de que vai conseguir evitar que Eduardo receba um pagamento maior que 0. Com isso, não está claro qual será o resultado do jogo, pois Eduardo nunca irá acreditar, porém Felipe poderá falar a verdade ou blefar.

Este jogo é classificado como sendo de soma zero, sequencial, não cooperativo e de informação completa.

6. Jogo do investimento estrangeiro

Duas grandes empresas A e B, que monopolizam o mercado doméstico, decidem de forma independente a possibilidade de investir em novos mercados no exterior ou não. Os novos investimentos custam dinheiro, mas abrir novos mercados estrangeiros geram lucros. Se apenas uma empresa investe no exterior capta todos os mercados estrangeiros disponíveis. Se ambas empresas investem em novos mercados, os mercados estrangeiros serão divididos. Cada empresa tem que decidir se faz os investimentos estrangeiros ou não, sem saber a escolha da outra empresa. Os resultados da matriz abaixo refletem os lucros das empresas.

Tabela 15 – Jogo investimento estrangeiro

		Empresa B	
		Investe	Não investe
Empresa A	Investe	(5,5)	(9,3)
	Não investe	(3,9)	(3,3)

Independente da estratégia tomada pela empresa B, para a empresa A é sempre melhor escolher investir: o resultado da empresa A fica no máximo 3 por não investir e 9 ou 5, investindo. Da mesma forma, independente da estratégia da empresa A, para a empresa B também é melhor escolher investir. Consequentemente, o equilíbrio estratégia dominante é (investir, investir).

Verificamos que este é um jogo de soma não zero, não cooperativo, simultâneo e de informação completa.

7. Jogo das 3 cartas

Usaremos neste jogo as cartas rei, dez e dois de um baralho. O jogador 1 escolhe uma das cartas e a coloca com sua face voltada para mesa. O Jogador 2, fala “alta” ou “baixa”. Se ele estiver certo (rei = alta, dois = baixa), ele ganha R$ 3,00 do jogador 1, caso esteja errado, perde R$ 2,00. Se a carta voltada para a mesa for dez, ele ganha R$ 2,00 se falou “baixa”, caso tenha falado “alto”, o jogador 1 deve escolher entre o rei e o dois. Feita a escolha, coloca a carta com sua face voltada para a mesa, o jogador 2 fala “alta” ou “baixa”, se acertar ganha R$ 1,00, mas se errar perde R$ 3,00.

Os números em cada estado terminal da árvore representam os ganhos do jogador 2.

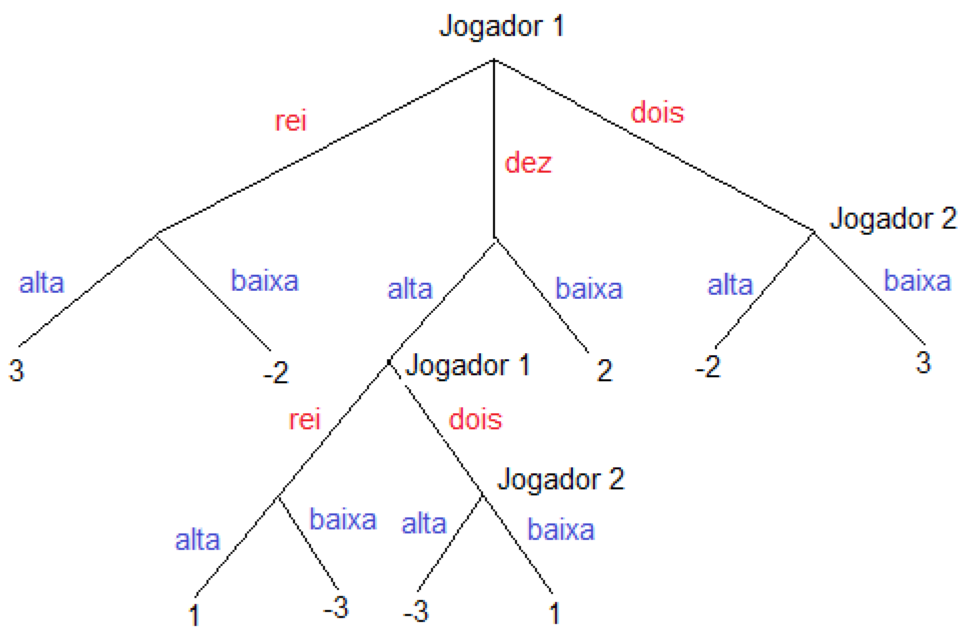


Figura 3 – Jogo das três cartas

Nesse jogo, a melhor opção para o jogador 2 é dizer baixa pois sua possibilidade de vitória será o dobro da de derrota.

Verificamos que este é um jogo de soma não zero, não cooperativo, sequencial e de informação completa.

5
Sequência Didática

A. Motivação dos alunos

Este trabalho foi aplicado em três turmas de 3ª série do ensino médio do Colégio Estadual Caic Euclides da Cunha, com uma média de 24 alunos por turma, com duração de 6 tempos de aula por turma. No início, foi possível perceber certo descaso e falta de comprometimento de uma parte significativa dos alunos, o que, nesse contexto, consideramos normal, já que era a apresentação de um novo trabalho a ser desenvolvido em sala de aula. Porém, após a realização do "Cinema na escola", nome dado a essa parte inicial do trabalho, com a apresentação do filme "UMA MENTE BRILHANTE", despertamos no aluno a necessidade de se tomar uma posição analisando todas as possibilidades. Assim, conseguimos gerar uma expectativa melhor para o que seria apresentado num segundo momento [10], o jogo "DILEMA DO PRISIONEIRO", e o que iríamos desenvolver através do jogo "BARGANHA COM ULTIMATO".

B. Método utilizado em sala de aula

1. Apresentação do filme "UMA MENTE BRILHANTE".
2. Discussão da conclusão de John Nash no filme.
3. Apresentação do "Dilema do Prisioneiro", sem a apresentação da matriz de ganhos.
4. Realização do jogo "Dilema do Prisioneiro" em sala de aula (com explicação apenas das regras básicas desse jogo).

5. Explicação, na lousa, do resultado esperado pela Teoria dos Jogos, mostrando aos alunos seus próprios resultados obtidos.

6. Introdução dos conceitos de matriz de resultados e estratégia dominante.

7. Aplicação de um Teste de Auto-Avaliação.

8. Anúncio que outro jogo será proposto e oferecimento de pontuação extra na nota final do bimestre dos alunos participantes. A recompensa oferecida serviu de estímulo para a participação do grupo de alunos.

9. Aplicação do Jogo "Barganha com Ultimato".

10. Dentre os pares que chegaram a um acordo no jogo da Barganha, sorteio do dinheiro envolvido na negociação.

C. Método detalhado utilizado para realização dos jogos:

I) Roteiro da realização do jogo "Dilema do Prisioneiro" em sala de aula:

i. Foi explicado o contexto aos alunos, deixando as regras por escrito no papel.

Duas pessoas, Antônio e Bruno, são presas, acusadas de terem cometido um mesmo crime. Os dois são colocados em celas separadas e não podem se comunicar. Ambos passam por um interrogatório individual, em que lhes é apresentado o seguinte: se nenhum dos dois confessar, ambos pagarão pelo crime e ficarão presos por 1 ano. Se ambos confessarem, os dois ficarão presos por 5 anos. Se um confessar e outro negar, o que confessou será libertado e o que negou ficará preso por 10 anos.

ii. A turma foi dividida em duplas, onde um componente de cada dupla era Antônio e o outro Bruno. A escolha das duplas foi aleatória, pela pauta, e não informamos aos alunos quais seriam suas duplas. Os grupos de "Antônios" e "Brunos" ficaram fisicamente separados para que não se comunicassem, sendo criado um ambiente mais divertido. Também para enriquecer o experimento, as duplas foram formadas heterogêneas: dois homens, duas mulheres, um homem e uma mulher.

iii. Todos os “Antônios” registraram em ficha individual sua decisão (confessar ou negar), assim como todos os “Brunos”. Após o registro de suas decisões, todos os alunos retornaram para uma mesma sala, onde cada dupla foi revelada, sendo lidas, ao mesmo tempo, a posição de cada elemento da dupla para toda a turma.

iv. Mostramos na lousa para os alunos, quantas duplas chegaram a cada um dos resultados possíveis (confessar, confessar), (negar, negar), (confessar, negar), (negar, confessar).

v. Fizemos, na lousa, a construção de uma matriz de resultados, como a exposta em seguida e sugerimos que cada aluno se colocasse na posição de Bruno e, através da tabela, iniciamos uma discussão com o objetivo de buscar a melhor resposta para cada decisão de Antônio. Depois propusemos que, de igual forma, nos colocássemos na posição de Antônio e, mais uma vez através da tabela, chegaríamos à estratégia dominante para cada jogador. O desenvolvimento da situação ora descrita segue abaixo apresentada.

Tabela 16 – Jogo dilema do prisioneiro

		Bruno	
		confessar	negar
Antônio	confessar	(-5,-5)	(0,-10)
	negar	(-10,0)	(-1,-1)

Para Bruno, a estratégia “negar” é ruim, pois **-5** > **-10** e **0** > **-1**. Logo, reduzimos a matriz acima a:

Tabela 17 – Jogo dilema do prisioneiro

		Bruno
		confessar
Antônio	confessar	(-5,-5)
	negar	(-10,0)

Para Antônio, a estratégia “negar” também é ruim, pois **-5** > **-10** . Logo, reduzimos a matriz acima a:

Tabela 18 – Jogo dilema do prisioneiro

		Bruno
		confessar
Antônio	confessar	(-5,-5)

Logo, a estratégia dominante é (confessar, confessar).

Explicamos o mesmo com palavras: como Bruno não sabe o que Antônio irá fazer, então trabalha com suposições. Se Antônio confessar, então é melhor que Bruno confesse também (pois assim ficará preso 5 anos em vez de 10). Se Antônio negar, ainda é melhor que Bruno confesse (e assim será libertado). Foi explicado também que como o jogo é simétrico (pois ganhos, penalidades, regras e estratégias para os dois jogadores são iguais), Antônio pensará da mesma forma, e então a estratégia dominante será (confessar, confessar).

II) Aplicação do DILEMA DO PRISIONEIRO:

A aplicação do jogo DILEMA DO PRISIONEIRO foi realizada para três turmas do 3° ano do Ensino Médio em duas aulas de 60 minutos, em dias diferentes (terça-feira e sexta-feira), da seguinte forma:

1ª Aula (terça- feira, dia 11/03/2014)

Nessa aula, tivemos inicialmente a exibição de um vídeo [10] onde um grupo de pessoas demonstra a realização do jogo DILEMA DO PRISIONEIRO. Após a exibição, discutimos as estratégias e penalidades de cada prisioneiro. Nesse momento, discutimos também o porquê desse jogo não ser de soma zero e o porquê de ser um jogo simétrico. Logo após esse momento, comunicamos aos alunos que eles seriam divididos em dois grandes grupos, onde cada elemento de um mesmo grupo seria chamado de prisioneiro Antônio e cada elemento do outro grupo, de prisioneiro Bruno. Cada grupo de prisioneiros estaria numa sala, que representa a cela, sem comunicação com a outra e que de posse de um documento estaria registrando sua decisão individual de confessar ou negar sem o conhecimento prévio de qual seria o seu parceiro da outra sala.

Inicialmente, houve uma forte tendência para a negação, pois achavam que confessar seria uma traição ao parceiro. Após 10 minutos de discussão, realizada em cada grupo, cada aluno registrou sua decisão.

Após os registros, reunimos os dois grupos na mesma sala e as duplas de Antônios e Brunos foram formadas aleatoriamente, e assim, cada dupla revelava perante a turma a sua decisão. Esse foi um momento bem descontraído, quando cada voto revelando a confissão era seguido por um protesto com gritos de "traíra", enquanto que os que negavam eram aplaudidos.

2ª Aula (sexta-feira dia 14/03/2014)

Nessa 2ª aula, tivemos a grata surpresa de termos um número superior de alunos presentes em cada turma, mesmo sendo uma sexta-feira, dia em que normalmente temos a pior frequência da semana. Nessa aula, apresentamos os resultados das três turmas de acordo com o exposto abaixo.

TURMA 3008:

10 duplas formadas

Total de (confessar, confessar): 5 duplas

a) Total de (confessar, negar): 1 dupla
b) Total de (negar, confessar): 2 duplas
c) Total de (negar, negar): 2 duplas

TURMA 3009:

12 duplas formadas

a) Total de (confessar, confessar): 5 duplas
b) Total de (confessar, negar): 3 duplas
c) Total de (negar, confessar): 3 duplas
d) Total de (negar, negar): 1 dupla

TURMA 3010:

14 duplas formadas

a) Total de (confessar, confessar): 4 duplas

b) Total de (confessar, negar): 4 duplas

c) Total de (negar, confessar): 4 duplas

d) Total de (negar, negar): 2 duplas

TURMAS 3008-3009-3010 (Juntas)

36 duplas formadas

a) Total de (confessar, confessar): 14 duplas

b) Total de (confessar, negar): 8 duplas

c) Total de (negar, confessar): 9 duplas

d) Total de (negar, negar): 5 duplas

Após a apresentação desses resultados, fizemos na lousa a apresentação da matriz de resultados e lembramos as características de uma matriz, assunto estudado por eles na 2ª série do Ensino Médio.Nesse momento, mostramos aos nossos alunos que cada prisioneiro, por não poder se comunicar nem garantir qual decisão tomaria seu parceiro, deveria tomar a sua decisão individual através das possíveis decisões de seu parceiro e como esse é um jogo simétrico e um é tão racional quanto o outro, pensarão da mesma forma e chegarão à mesma conclusão. Sendo assim, concluímos que a melhor opção individual para ambos seria confessar, logo a estratégia dominante para esse jogo é confessar-confessar.

Assim demonstramos na lousa a possibilidade de se reduzir uma Matriz 2x2 para uma 1x1, identificando a estratégia dominante.

Depois de toda essa explanação, voltamos a analisar com os alunos os resultados das turmas ficando claro que, embora eles não tivessem tomado suas decisões através de uma análise como essa, foi maior o quantitativo dos que confessaram em cada turma do que os que negaram. Foi mostrado também que, daqueles que negaram, o maior quantitativo pegou 10 anos de prisão. Nesse momento, um dos alunos que optou por negar justificou sua escolha por uma questão de lealdade ao parceiro. Nesse instante, mostramos para ele e para a turma que estávamos discutindo era a melhor estratégia e não lealdade. Embora, em nossa opinião, não havia ali traição e sim a oportunidade do reconhecimento do erro individual, possibilidade essa disponibilizada para ambos os prisioneiros, e que reconhecer um erro é mais digno que negá-lo.

Encerrada essa discussão de lealdade, utilizamos os últimos 10 minutos de aula para que cada participante das duas aulas pudesse realizar uma Auto-Avaliação, quando uma nova matriz de resultados foi apresentada, sendo necessário demonstrar o entendimento da matriz, a redução de uma matriz 2x2 para 1x1 e, assim, identificar a estratégia dominante.

III) Roteiro da realização do Jogo da Barganha com Ultimato em sala de aula:

i. Primeiramente, o jogo escolhido foi apresentado utilizando como recurso a distribuição impressa do texto explicativo abaixo, com a leitura e comentários eliminando a possibilidade de dúvidas quanto ao seu desenvolvimento e às regras.

   Duas pessoas participam do jogo: Carlos (o proponente) e Daniel (o respondente). Carlos recebe uma quantia de R$ 10,00 (dez moedas de R$ 1,00). Carlos deve oferecer a Daniel uma parte desse dinheiro (R$1,00, R$2,00,... ou R$10,00), sendo que a quantia mínima a ser ofertada é R$ 1,00. Se Daniel aceitar a proposta, leva para casa o que lhe foi ofertado e Carlos fica com o restante. Se Daniel não aceitar a proposta, ninguém recebe dinheiro algum.

ii. A turma foi dividida em duplas, em que um de cada dupla seria Carlos e o outro, Daniel. As duplas foram escolhidas aleatoriamente, pela pauta, e não divulgamos as duplas formadas. Separamos fisicamente os grupos de “Carlos” e de “Daniéis”, para que eles não se comunicassem e assim foi criado um ambiente mais divertido. Para enriquecer o experimento, montamos duplas bastante heterogêneas: dois homens, duas mulheres, homem proponente e mulher respondente, ou vice-versa.

iii. Todos os “Carlos” tiveram que registrar em formulário próprio a sua oferta (quantia entre R$ 1,00 e R$ 10,00). Todos os “Daniéis” tiveram também que registrar em formulário a quantia que estavam dispostos a aceitar (quantia entre R$ 1,00 e R$ 10,00). Após os registros, todos retornaram para a mesma sala e os dois registros de cada dupla foram lidos ao mesmo tempo, para toda a turma. Quando a quantia que Daniel registrou no papel foi igual ou menor que a oferta de Carlos, foi considerado que a dupla chegou a um acordo. Caso contrário, se Daniel registrou no papel uma quantia maior do que a oferta de Carlos, a dupla não chegou a um acordo.

iv. Mostramos na lousa para os alunos quantas duplas chegaram a cada um dos resultados possíveis: acordo ou não acordo.

v. Explicamos verbalmente qual seria o resultado racional: o respondente deveria dizer que aceitava R$ 1,00, pois isto é melhor do que zero. Se o respondente dissesse que só aceitava a proposta se o valor ofertado fosse maior do que R$ 1,00, estaria correndo o sério risco de sair sem nada, e isso se deve ao seguinte: o proponente também sabe que R$ 1,00 é melhor do que zero e, além disso, deseja manter o máximo de dinheiro para si mesmo. Logo, ofertará o mínimo possível (R$ 1,00), acreditando que o respondente também é racional.

vi. As duplas que chegaram a um acordo foram premiadas com uma bonificação extra para a composição da média bimestral.

IV) Aplicação do BARGANHA COM ULTIMATO:

A aplicação desse jogo também foi realizada em duas aulas de 60 minutos cada, com as mesmas turmas 3008, 3009 e 3010, agora, com um número maior de participantes em cada turma, se comparado com o do primeiro jogo.

1ª Aula (terça-feira, dia 18 / 03 / 2014)

Nessa primeira aula, tivemos a grata satisfação de encontrar as três turmas mais motivadas para a execução do trabalho e com o efetivo de cada turma superior ao dos dias de aplicação do DILEMA DO PRISIONEIRO.

Iniciamos a aula apresentando na lousa a proposta do jogo, as características dos jogadores e as regras para o seu desenvolvimento. Após apresentarmos dois exemplos (um onde ocorria o acordo, e outro sem acordo realizado) esclarecemos pequenas dúvidas e comunicamos aos alunos que, da mesma forma como no jogo anterior, eles estariam sendo divididos em dois grupos. Após a divisão da turma em duas salas distintas, comunicamos que cada aluno de uma mesma sala seria o proponente de um aluno pertencente à outra sala, e que aqueles da outra sala seriam os respondentes. Deixamos claro para os alunos das duas salas que tanto o proponente quanto o respondente deveriam descobrir a melhor estratégia para garantir o acordo. Anunciamos também que as duplas que atingissem o objetivo, isto é o acordo, ao final do trabalho seriam premiadas com uma bonificação extra para compor a média do bimestre. Após 15 minutos de reflexão dos proponentes e dos respondentes em suas respectivas salas, foram formalizados os registros de proposta do proponente e do mínimo aceitável pelo respondente e, assim, juntamos os dois grupos numa mesma sala e aleatoriamente as duplas foram formadas. Notamos que, nas três turmas, as duplas que mais fecharam o acordo priorizaram o que acreditavam ser o mais justo, isto é, a divisão de 50% para cada um dos componentes da dupla. No momento em que as duplas se revelavam, ocorria uma demonstração de euforia para os acordos, e crítica para as duplas que não concretizavam os acordos. Após esse momento, perguntei aos proponentes e respondentes se eles manteriam suas posições, caso o montante a ser dividido fosse de R$ 10000,00. Nesse momento, a esmagadora maioria tanto de proponentes como de respondentes sugeriu o valor de R$1000,00 para o respondente e R$ 9000,00 para o proponente.

Após esses momentos de reflexão em relação à comparação ao jogo desenvolvido e ao jogo não desenvolvido, mas com valores bem superiores, sugerimos que pensassem até a próxima aula, isto é, sexta-feira dia 21/ 03, numa melhor estratégia tanto para o proponente quanto para o respondente, que fosse racional para garantir um acordo.

Após a dispensa dos alunos, um aluno da turma 3009 disse-me que já sabia a melhor opção para o respondente e que seria o valor de R$ 1,00, pois lhe garantiria o acordo já que o proponente não poderia fazer uma oferta inferior a essa e, além de garantir-lhe o acordo com essa quantia, ele ainda poderia receber um valor maior em caso de qualquer outra oferta do proponente. Nesse momento, perguntei-lhe qual seria então a oferta melhor para o proponente e ele garantiu-me não saber naquele momento, mas que, até a próxima aula, me daria a solução e assim terminamos o diálogo e a primeira aula.

2ª Aula (sexta-feira, dia 21/03/2014)

Nessa segunda aula, mais uma vez foi possível observar a grande frequência dos alunos, pela segunda sexta-feira consecutiva. Iniciamos a aula percebendo que outros alunos, além do citado anteriormente, já sabiam qual seria a melhor estratégia a ser adotada pelo respondente (para maximizar seu ganho), porém não tinham a mesma certeza em relação ao proponente. Perguntamos então se saberiam mostrar a matriz de resultados e obtivemos uma resposta positiva da grande maioria dos alunos. Pedimos em seguida que fizessem a redução da matriz de resultados de 10x10 para 1x1, já que conheciam a melhor opção do respondente. Assim, foi possível perceber que, se o proponente sabe que o respondente só garante o acordo pedindo o mínimo, que é de R$ 1,00, então para ele é melhor oferecer o mínimo e assim garantir um lucro máximo, ou seja R$ 9,00. Após alguns minutos discutindo esses resultados através da matriz e da melhor oportunidade de cada um dos jogadores, perguntamos qual seria a estratégia dominante e a turma, com total segurança, respondeu que era R$ 1,00 para o respondente e R$ 9,00 para o proponente. Assim, lembramos a eles que essa foi a escolha que fizeram na aula anterior, quando sugeri a mudança do prêmio total para R$ 10000,00.

Antes do término dessa segunda aula, apresentamos às turmas uma nova avaliação individual e que, agora, o nosso interesse era saber qual dos jogos apresentados mais agradou, que tipo de benefício essa atividade trouxe para ele, aluno, em relação à Matemática, que nota daria a toda essa atividade desenvolvida durante os quatro tempos de aula e se era do interesse dele, aluno, a aplicação de outros jogos como esse.

Não foi surpresa confirmar, através dessa avaliação, o grau de satisfação em relação ao trabalho desenvolvido, pois, durante todo o processo, a cada dia, o número de participantes em cada turma era superior ao da aula anterior e a integração ao trabalho propriamente dito também era superior.

Ao final do Teste de Avaliação do trabalho, na última turma de sexta-feira, foi realizado o sorteio da dupla vencedora, quando, para nossa satisfação, foi possível contarmos com a presença de outros professores e colegas de trabalho do turno da noite.

6
Comparação de resultados

Na tabela abaixo, apresentamos uma comparação entre os resultados obtidos pelos alunos das turmas de ensino médio 3008, 3009 e 3010, treinadas com a aplicação do Dilema do Prisioneiro, com trabalhos anteriores realizados por Bianchi [1] com economistas, Carter e Irons [2] com economistas, Castro e Ribeiro [3] com economistas. Estes trabalhos foram desenvolvidos usando como base a metodologia da Economia Experimental. Os participantes eram alunos do curso de Administração (hipoteticamente, menos treinados em Teoria dos Jogos do que os alunos de Economia), alunos iniciantes do curso de Economia (considerados “não-treinados”) e concluintes do curso de Economia (considerados “treinados”). A motivação de tais trabalhos foi a busca por evidências para validação de resultados esperados pela própria Teoria dos Jogos.

Nessas tabelas encontramos também os resultados obtidos pelo professor Thiago com suas turmas de ensino médio 2001 e 2003, sem conhecimento prévio da Teoria dos Jogos.

Tabela 19 – Comparação de resultados dos proponentes

Resultados Comparativos – Quantia Mantida pelo Proponente média em R$ (10,00 – Quantia Ofertada)						
Experimento		Geral	Não treinados	Treinados	Mulheres	Homens
Cartes & Irons	Economistas	5,60	6,11	5,84	-	-
	Não economistas		5,48	-		
Bianchi	Economistas	-	5,43	6,78	-	-
	Não economistas		5,60	-		
Castro & Ribeiro	Economistas	5,67	5,64	5,59	6,08	5,32
	Não economistas		5,88	-	6,20	5,60
Thiago	Turma 2001	4,25	4,25	-	5,37	3,12
	Turma 2003	7,05	7,05	-	8	6,1
Silvio	Turma 3008	5,92	-	5,92	-	-
	Turma 3009	4,60	-	4,60	-	-
	Turma 3010	5,13	-	5,13	-	-

Tabela 20 – Comparação de resultados do respondentes

Resultados Comparativos – Quantia Mínima Aceitável pelo Respondente média em R$ (10,00 – Quantia Aceitável)						
Experimento		Geral	Não treinados	Treinados	Mulheres	Homens
Cartes & Irons	Economistas	2,03	1,34	1,92	-	-
	Não economistas		2,76	-		
Bianchi	Economistas	-	4,92	3,26	-	-
	Não economistas		3,13	-		
Castro & Ribeiro	Economistas	3,54	4,10	3,20	3,22	3,84
	Não economistas		2,67	-	3,50	2,25
Thiago	Turma 2001	3,43	3,43	-	3,42	3,44
	Turma 2003	3,72	3,72	-	3,00	4,43
Silvio	Turma 3008	4,50	-	4,50	-	-
	Turma 3009	3,27	-	3,27	-	-
	Turma 3010	5,20	-	5,20	-	-

Podemos observar que os resultados obtidos pelas turmas de ensino médio 3008, 3009 e 3010, tanto dos proponentes como dos respondentes, estão bem distantes de resultados ótimos esperados pela Teoria dos Jogos, ou seja, proponente ofertando R$ 1,00 e respondente aceitando oferta mínima de R$ 1,00. Por outro lado, esses resultados, mesmo para alunos sem formação superior encontram-se mais próximos dos obtidos por Carter & Irons, Bianchi e Castro &

Ribeiro. Os resultados não confirmam na prática os previstos na teoria dos jogos e nos levam a crer que Bianchi estava certo ao afirmar que “Os resultados gerais apresentados sugerem que o modelo de racionalidade egoísta é incapaz de prever a maioria das decisões tomadas, em situações envolvendo informação perfeita, ganhos monetários, em condições de ultimato”.

7
Conclusão

Nesse trabalho, apresentamos uma sequência didática dos jogos Dilema do Prisioneiro e Barganha com Ultimato, que foi desenvolvida a partir das experiências realizadas com as turmas 3008, 3009 e 3010 do 3º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Caic Euclides da Cunha.

O objetivo deste trabalho era usar a Teoria dos Jogos como elemento de motivação, resgate e aplicação prática de conteúdos já estudados e a comparação dos resultados dessas turmas de ensino médio com resultados de outros trabalhos já desenvolvidos anteriormente.

Concluímos que o trabalho foi um sucesso, pois, como foi verificado, os resultados encontrados estão bem próximos dos outros que serviram de parâmetro. A realização do trabalho, em sala, também foi um sucesso, comprovado pelo aumento diário do número de participantes e do interesse nas atividades propostas, mostrando que o objetivo de usar a introdução da teoria dos jogos como elemento motivador ao ensino da matemática no Ensino Médio é perfeitamente viável. Esse trabalho despertou no aluno uma visão da matemática até então desconhecida, sendo-lhe possível verificar a importância do tabelamento de resultados, na intenção de se obter uma maximização desses mesmos resultados. As três turmas, ao final das atividades desenvolvidas, solicitaram novas aplicações para situações de conflito, agora ligadas às suas pretensões profissionais.

Referências

[1] BIANCHI A.M. Are Brazilian Economists Different?, **Revista Brasileira de Economia**, 52(3): 427-439, (1998).

[2] CARTER, J.; IRONS, M. Are Economists Different, and If So, Why?, **Journal of Economic Perspectives**, 5(2): 171-177 (1991).

[3] CASTRO, J.D. Um teste empírico para a Teoria dos Jogos: o modelo da racionalidade egoísta, Monografia de conclusão de graduação em Ciências Econômicas, UFRGS, 2000.

[4] FIANI, R. Teoria dos Jogos, Elsevier Brasil, 2006.

[5] MYERSON, R.B. Nash Equilibrium and the History of Economic Theory. **Journal of Economic Literature**, vol. 37, n. 03, 1067-1082, set. 1999.

[6] NEUMANN, J.V.; Morgenstern, O. The Theory of Games and Economic Behavior.

[7] NASH, J.F. Non-cooperative games, **Annals of Mathematics**, vol. 54, pp. 286-295, 1951.

[8] HARSANYI, J.C. A General Theory of Equilibrium Selection in Games. Cambridge: MIT Press, 1988.

[9] SELTEN, R. A General Theory of Equilibrium Selection in Games. Cambridge: MIT Press, 1988.

[10] http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1089

Apêndice (Com biografia das principais personalidades históricas)

I) John Von Neumann

Em 28 de dezembro de 1903, em Budapeste, nasceu John Von Neumann. Aos três anos de idade sabia de cor os números de telefone de todos os familiares e parentes.

Para seu sucesso na sociedade húngara do século XX tinha governantas alemãs e francesas. Em 1925, em Zurique, formou-se em engenharia química no Swiss Federal Institute of Technology. No ano seguinte conquistou seu PhD em matemática na Universidade de Budapeste.

Ainda muito jovem, iniciou sua carreira acadêmica, como professor assistente, na Universidade de Berlin. Fez o pós-doutorado na Universidade de Göttingen, tendo como professor o matemático David Hilbert.

Na década de 20, já instalado nos Estados Unidos, envolveu-se com a teoria quântica, publicando um trabalho sobre a questão do indeterminismo. Mais tarde participou de projetos variados de pesquisa, entre eles, mecânica quântica, teoria dos conjuntos, computação eletrônica e teoria dos jogos. Sobre essa última teoria, juntamente com Oskar Morgenstern, escreveu o livro "Theory of Games and Economic Behavior".

Von Neumann reconheceu que o comportamento social pode ser analisado por meio de jogos, citando o jogo de pôquer como uma ocupação lúdica e banal contendo a chave de assuntos humanos mais sérios, pois tanto o pôquer como uma competição econômica exigem de seus participantes um raciocínio de vantagens e desvantagens, ou seja, a ideia de que o mais é melhor do que o menos. Segundo ele, o resultado de uma ação não depende apenas de um participante, mais de ações interdependentes de outros participantes.

Usando topologia e análise funcional, em 1928, Von Neumann demonstrou que todo jogo finito de soma zero com duas pessoas possui uma solução em estratégias mistas.

Participou como consultor da IBM de várias etapas de concepção e construção do computador eletrônico, sugerindo que as instruções fossem armazenadas na memória do computador, em vez de serem lidas em cartões perfurados e serem executadas individualmente, como era feito até então. Dessa forma se obteve a vantagem da rapidez eletrônica.

Em 1943, Neumann trabalhou no projeto Manhattan, tendo como resultados as bombas de Hiroshima e Nagasaki. Sua ação envolvia cálculos sobre a implosão da bomba atômica, bem como a projeção de lentes auto-explosivas. Ressalta-se que, a despeito disso, Neumann trabalhou ativamente na discussão política sobre o uso de artefatos atômicos.

Na década de 50, assessorou o governo americano durante um período da guerra fria, mas não ficou por muito tempo, pois logo ficou doente.

Em 8 de fevereiro de 1957, vítima de um tumor no cérebro, Neumann veio a falecer.

II) Oskar Morgenstern

Oskar Morgenstern, doutor em Ciências Políticas, nasceu em 1902 na Silésia, Alemanha. Sua vasta obra foi principalmente voltada à área de economia. Estudou na Universidade de Viena concluindo doutorado em Ciência Política em 1925. Sua tese versava sobre produtividade marginal.

Oskar Morgenstern quando esteve em Viena, segundo Paulo Henrique de Sousa, em sua dissertação, trabalhou em assuntos relacionados a ciclos econômicos e a crítica metodológica da economia, focando problemas, na teoria do equilíbrio geral, com relação entre tempo e previsão.

Morgenstern contribuiu para o surgimento de novas ideias, em novos campos científicos ao participar dos Colóquios de Viena os quais propiciaram contatos científicos entre diversas disciplinas.

Ao emigrar para os Estados Unidos em razão da iminência da Segunda Guerra Mundial, em 1938, Morgenstern se tornou professor da Universidade de Princeton, e ao versar sobre análise econômica em suas obras, promovia várias discussões sobre o tema.

Escreveu a obra “On The Accuracy of Economic Observations”, em 1950, (Na exatidão de observações econômicas), Wirtschaftsprognose, (Previsão Econômica), nesta obra defende que é impossível fazer previsões econômicas completas em razão de os mecanismos que moldam eventos econômicos serem complexos.

Sua obra mais importante foi o livro “Theory of Games and Economic Behaviour”, 1944, que tem como parceiro John Von Neumann.

Em 1970 aposentou-se como professor da Universidade de Princeton e faleceu em 26 de julho de 1977 nos Estados Unidos, Princeton, NJ.

III) John Nash, Jr.

Nascido em 13 de junho de 1928, em Bluefield, na Virgínia Ocidental, Estados Unidos, John Nash Jr era filho de um engenheiro e uma professora. Menino solitário e introvertido, cresceu em um lar onde recebeu carinho e atenção de seus pais, tendo como principal interesse, desde criança, os livros.

Aos quatorze anos, Nash se interessou pela matemática. Ao ler a obra "Men of Mathematics", de T. Bell, consegue provar o Teorema de Fermat sobre números primos. Nessa ocasião, o adolescente Nash uma prova para a afirmação de Fermat de que se **n** é um número qualquer inteiro e **p** um número primo qualquer, então **n** multiplicado por si mesmo **p** vezes menos **n** é divisível por **p.**

Iniciou seus estudos em engenharia química, mas logo desmotivou-se passando a estudar matemática. Fez curso em economia internacional e doutorado em matemática. Apesar de ter sido aceito no programa de doutorado em Harvard, uma das mais famosas universidades dos Estados Unidos, optou por Princeton por lhe oferecer maiores vantagens. Nessa universidade demonstrou interesse por vários campos da matemática pura como Topologia, Geometria Algébrica, Lógica e Teoria dos Jogos.

Com apenas 21 anos, escreveu uma tese de doutorado "Non-Cooperative Games", de 27 páginas, em que criou uma teoria que focalizava o indivíduo. Nessa tese, a Teoria dos Jogos apresentava a possibilidade do ganho mútuo, inventando um conceito que permitia a interrupção do "seu penso que ele pensa que eu penso que ele pensa...". Desta forma, haveria uma solução quando cada um dos jogadores escolhesse sua melhor resposta levando em consideração, de maneira independente, as melhores estratégias dos outros jogadores.

No período de 1951 a 1959, foi professor de matemática na universidade de MIT (Massachusetts Institute of Technology). Em 1959 adoeceu de esquizofrenia paranoica, desistindo de seu cargo de professor do MIT.

Publicou em sua tese de doutorado mais três importantes artigos para a teoria dos jogos não-cooperativos e para a teoria da barganha.

Nesses artigos, Nash criou o chamado "Equilíbrio de Nash", em que prova a existência de um equilíbrio de estratégias mistas para jogos não cooperativos, sugerindo uma abordagem de estudos de jogos a partir de sua redução para a forma não cooperativa. Nash provou ainda a existência de solução para o problema da barganha, criando a Teoria da Barganha, em seus artigos "The Bargaining Problem" (O Problema da Barganha, 1949) e "Two-Person Cooperative Games" (Jogos Cooperativos de duas Pessoas). Sobre essa teoria, Nasar, em 2000, escreveu:

> “Jogos estratégicos, rivalidade econômica, arquitetura de computadores, a forma do universo, a geometria dos espaços imaginários, o mistério dos números primos – tudo atraiu sua imaginação extremamente ampla. Suas ideias eram do tipo profundas e inteiramente inesperadas, que impulsionam o pensamento científico em novas direções”.

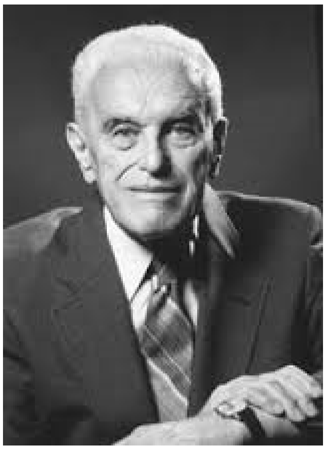
Nasar, ainda no ano de 2000, declarou que Nash foi um gênio que explodiu no cenário da matemática em 1948.

> “Jogos estratégicos, rivalidade econômica, arquitetura de computadores, a forma do universo, a geometria dos espaços imaginários, o mistério dos números primos – tudo atraiu sua imaginação extremamente ampla. Suas ideias eram do tipo profundas e inteiramente inesperadas, que impulsionam o pensamento científico em novas direções”.

Nash escreveu também artigos sobre “variedades algébricas” (1951) e “arquitetura de computadores paralelos” (1954). Juntamente com Reinhard Selten e John Harsanyi, ganhou, em 1994, o ganhou o prêmio Nobel de Economia, por suas contribuições para a Teoria dos Jogos.

Em 1998, Silvia Nasar escreveu sua biografia no livro “Uma mente Brilhante”, livro esse adaptado para o cinema por Ron Howard.

IV) John Harsanyi



Nascido em 29 de maio de 1920, em Budapest, Hungria, John Charles Harsanyi estudou no Ginásio Luterano, tendo como preferência a Filosofia e a Matemática. Em 1948, iniciou o doutorado em Filosofia. Em 1956, ganhou uma bolsa da fundação Rockefeller, o que lhe permitiu passar dois anos na Universidade de Stanford, iniciando seu doutorado em economia. Estudou também Matemática e Estatística.

Em 1958, iniciou uma pesquisa sobre a Teoria dos Jogos na Universidade Nacional da Austrália, mas sentiu-se sozinho, pois essa teoria não era conhecida na Austrália. Em Detroit, foi admitido como professor de e3conomia na Universidade Estadual de Wayne. Em 1964, em Berkeley, tornou-se professor na Universidade da Califórnia.

Contribuiu para a Teoria dos Jogos através do desenvolvimento de análise dos jogos de informação incompleta. Usou também a Teoria dos Jogos e o raciocínio econômico em filosofia moral e política.

Harsanyi publicou quarto livros: Rational Behavior and Bargaining Equilibrium in Games and Social Situations (1977), Essays on Ethics, Social Behavior, and Scientific Explanation (1976), Papers in Games Theory (1982) e A General Theory of Equilibrium Selection in Games (1988). Ganhou juntamente com John Nash e Reinhard Selten em 1994, o prêmio Nobel de Economia. Morreu em 9 de agosto de 2000.

V) Reinhard Selten

Em 5 de outubro de 1930, em Breslau, nasceu Reinhard Selten graduado em Matemática e Ciências Econômicas na Universidade de Frankfurt, onde iniciou sua carreira docente.

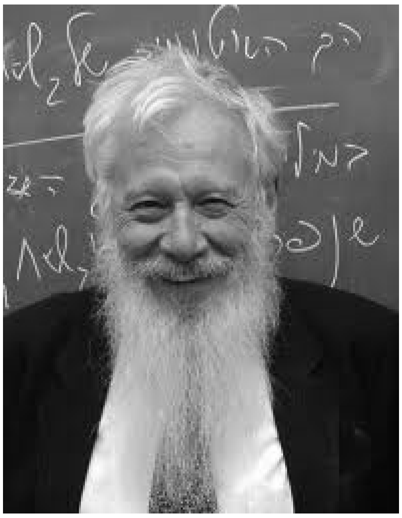
Apresentou como tese de mestrado a Teoria dos Jogos Cooperativos e em seu doutorado, a axiomatização de valores forma extensiva para jogos de n-pessoas.

Através do artigo “Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells MIT Nachfragetragheit”, foi responsável por um aprimoramento da noção de “equilíbrio de Nash, intitulado de equilíbrio perfeito em subjogos”. Essa noção implica que uma determinada estratégia, para ser considerada um perfeito equilíbrio, precisa ser ótima, tendo sido considerados todos os possíveis desdobramentos do processo de interação estratégica. Tal equilíbrio é primordial em jogos que apresentam compromissos e ameaças, determinando quais desses elementos são interessantes e quais não são.

Por seu trabalho em racionalidade limitada, Selten é considerado um dos pioneiros em economia experimental.

Atualmente Reinhard Selten emérito professor da Universidade de Bonn, na Alemanha.

VI) Robert Aumann



Nascido em 8 de julho de 1930, em Frankfurt, Alemanha, Robert Aumann graduou-se em 1955 pelo City College de Nova York, completando seu mestrado em 1952 e doutorado em 1955 pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT). Juntamente com Thomas Schelling, ganhol o prêmio Nobel de Economia. Membro da academia Academia Nacional Norte-Americana das Ciências, trabalhou no Centro para a Racionalidade, na Universidade Hebraica de Jerusalém em Israel.

Definiu o conceito de equilíbrio correlacionado no Teoria dos Jogos. Nessa definição, ele afirma que um equilíbrio em jogos não cooperativos é bem mais flexível do que o Equilíbrio de Nash.

Aumann usou a matemática para desenvolver hipóteses, dando uma formulação precisa em situações envolvendo dois atores que só levam em consideração o curto prazo, originando conflitos como as guerras de preços e comerciais. È também o responsável pela inclusão da análise do impacto sobre variados aspectos dos jogos. Essa análise é de fundamental importância para tomada de decisão como, por exemplo, grupos que se tornarão mais acessíveis à cooperação quando são obrigados a enfrentar uma mesma situação.

Aumann também investiu nos chamados jogos repetidos, mostrando que a cooperação pacífica é, de forma frequente, a solução de equilíbrio nesses jogos. Ele propõe uma solução na teoria econômica envolvendo um modelo de uma economia de competição perfeita. Conforme cita a matemática Marilda Sotomayor, professora da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo (USP), em artigo publicado por Bernardo Esteves na revista on-line ciência hoje.

> "...ele propôs um modelo com um continuo de participantes, mais próximo da situação real, onde existe um número grande mas finito de agentes envolvidos (...) A introdução desse 'contínuo' permitiu uma análise precisa e rigorosa de situações onde o tratamento por métodos finitos seria muito mais difícil ou mesmo impossível".

Ciência Hoje – 2005

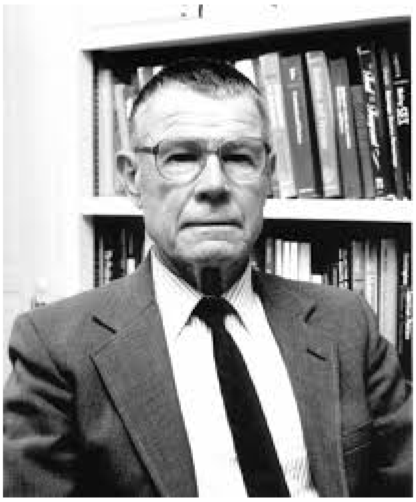
Aumann já esteve no Brasil a convite de Sotomayor, onde ofereceu um curso de jogos cooperativos.

> Ele é bastante comunicativo e carismático, gosta de praticar esportes e é muito religioso.(...) Trata-se sem dúvida de um dos maiores pensadores de todos os aspectos da racionalidade na

tomada de decisões. Ele tem promovido uma visão unificada do domínio do comportamento racional, que abrange áreas como economia, ciência política, biologia, psicologia, matemática, filosofia, ciência da computação, direito e estatística.

Ciência Hoje – 2005

VII) Thomas Schelling



Thomas Schelling, economista Americano, ao versar sobre as aplicações da Teoria dos Jogos à análise de estratégias em situações de conflito e às vantagens da cooperação em relação ao confronto em relações de longo prazo, recebeu com o matemático matemático israelense-americano Robert Aumann o Prêmio Nobel de Economia, em 2005.

Nasceu em 1921, nos Estados Unidos, Oakland. Em 1944, graduou-se pela Universidade da Califórnia, Berkeley e em 1951, pela Universidade de Harvard, completou o doutorado em Economia. Atuou como professor na Universidade de Yale, também como assessor da Casa Branca e ingressou na Universidade de Harvard, após deixar o magistério na Universidade de Yale.

Em 1960, Thomas Schelling publicou seu livro ‘The Strategy of Conflict” (A estratégia do conflito), onde analisa a corrida armamentista durante a guerra fria. Nesta obra, ele mostra que, em algumas situações, a capacidade de praticar represálias intimida mais o adversário do que a possibilidade da resistência a um ataque. Da mesma forma, uma ameaça concreta torna-se, por vezes, menos eficaz do que uma ameaça imprecisa. Suas conclusões também foram ampliadas podendo ser usadas em outros campos como na competividade entre empresas, pois é mais lucrativo fazer concessões, para que possa ser criado um ambiente de confiança entre as partes, do que haver conflitos onde ocorrerão riscos para ambas.

A introdução de ideias originais nas análises econômicas com pouquíssimos instrumentos matemáticos se tornou a característica de Schelling.

Com o conceito de valor estratégico do risco calculado, também atuou em trabalhos onde havia cooperação de indivíduos sem conflito de interesse, além de ter investigado como o comportamento de indivíduos diferentes se confronta socialmente, tema de Micromotivos e Macromotivos, 1978. Nas referidas obras o autor, observando comportamentos individuais, explica a emergência da segregação através do modelo por ele desenvolvido.

VIII) Martin Schubik

Martin Schubik, um dos pioneiros da Teoria dos Jogos, possui obras que versam sobre economia política, oligopólios e jogos experimentais.

Nasceu em 24 de março de 1926, estudou na Universidade de Toronto e na Universidade de Princeton. Tornou-se especialista em análise estratégica, estudo de instituições financeiras e em economia da competição.

Martin Schubik demonstrou uma outra aplicação da teoria dos Jogos: o Leilão de Dólar. No referido jogo, não pode haver coalizões, ou seja, não acontece cooperação mútua. Leiloa-se um dólar e os lances começam com um centavo. Quem der o maior lance levará o dólar que está sendo leiloado. Difere porém este leilão dos demais, pois quem dá o segundo maior lance também paga, mas não leva o dólar.

Um certo mal-estar entre os participantes é observado quando os lances atingem cinquenta centavos contrastando com o início do jogo em que o ambiente é cordial. Esse mal-estar é ocasionado porque fica notório que a banca irá ganhar dinheiro a partir daquele ponto. De acordo com o autor, o leilão termina no patamar de três dólares em média, podendo chegar aos catorze dólares.

TESTE DE AUTO-AVALIAÇÃO

Considere a seguinte matriz de resultados para um jogo do tipo Dilema do Prisioneiro:

		Bruno	
		confessar	negar
Antônio	confessar	(-8, -8)	(0, -10)
	negar	(-10, 0)	(-6, -6)

a) Se Antônio resolve confessar e Bruno resolve negar, quantos anos de pena cada um deles recebe?

R: Antônio................anos

Bruno...................anos

b) Se Antônio tivesse certeza de que Bruno iria negar o crime, qual estratégia ele deveria escolher? Confessar ou também negar? Por quê?

R..
....

c) Reduza a matriz 2x2 acima a uma matriz 1x1, lembrando estratégias dominantes.

d) Pela Teoria dos Jogos, qual é a estratégia dominante nesse jogo?

R:...

Resultados da auto-avaliação

TURMA 3008

a) **18 alunos acertaram**
2 erraram

b) **5 negavam**
15 confessavam

c) **14 acertaram**
6 erraram

d) **18 acertaram**
2 erraram

TURMA 3009

a) **20 alunos acertaram**
4 erraram

b) **7 negavam**
17 confessavam

c) **14 acertaram**
10 erraram

d) **18 acertaram**
6 erraram

TURMA 3010

a) **26 alunos acertaram**
2 erraram

b) **5 negavam**
23 confessavam

c) **19 acertaram**
9 erraram

d) **22 acertaram**
6 erraram