LÉA PAZ DA SILVA FELICIANO

TEORIA DOS JOGOS: UMA NOVA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

PUC-SP
SÃO PAULO
2007

LÉA PAZ DA SILVA FELICIANO

TEORIA DOS JOGOS: UMA NOVA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrosio.***

PUC/SP
São Paulo
2007

Banca Examinadora

Dedicatória

Para minha mãe, Maria Azinda, meu marido Robson e meu filho Willian.
A meus irmãos e irmãs e todos que estiveram comigo nesta jornada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela vida, por me iluminar em todos os momentos, principalmente nas horas de angústia e dúvidas.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrosio que com sua paciência e sabedoria me ajudou a realizar este trabalho.

Ao meu marido Robson, que sempre esteve ao meu lado, sua presença quieta, cuidando e zelando por mim, me apoiando em tudo o que precisei.

Ao meu filho Willian, que soube compreender minha ausência em sua vida, durante este curso, me incentivando e ajudando.

Agradeço a minha melhor amiga, minha mãe Maria Azinda a quem devo tudo, sua crença em mim e suas orações, me mantiveram firme na realização deste objetivo.

Às minhas irmãs e irmãos, sobrinhos e sobrinhas, toda minha família, pela palavra amiga nos momentos de desânimo e por estarem sempre comigo.

Agradeço aos professores doutores Ruy Cesar Pietropaolo e Adilson de Morais por terem aceitado compor a minha banca examinadora e pelas sugestões valiosas, na ocasião da qualificação.

Aos colegas do curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática, da PUC – SP, pelo companheirismo e incentivo, especialmente a Umberto Almeida e Cláudio Posa.

A minha amiga Jacy por toda ajuda que me deu e principalmente por rever este trabalho.

A minha amiga Rosenilce coordenadora da Escola Padre Antão e a todos os professores, alunos e direção, pelo carinho que me dedicaram.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é investigar a possibilidade de introduzir a Teoria dos Jogos de John Von Neumann e Oskar Morgenstern no Ensino Médio e de que forma isso poderia ser feito.

Para atingir esse objetivo, elaboramos uma seqüência didática que foi aplicada a três turmas do 3º ano do Ensino Médio de uma escola estadual na capital de São Paulo.

No decorrer da aplicação dessa seqüência didática, procuramos debater e orientar as resoluções das atividades, auxiliando os alunos na retomada de alguns conteúdos anteriores, necessários ao desenvolvimento da tarefa.

Concluímos, ao final dessa experiência, que é possível ensinar a Teoria dos Jogos para os alunos do Ensino Médio, contemplando a aquisição de outros conteúdos.

Palavras-Chave: Teoria dos Jogos, Ensino Médio, seqüência didática.

ABSTRACT

The aim of this work is investigate the possibility of introducing the Game Theory of John von Neumann and Oskar Morgenstern in High School and how it could be done.

To reach this objective, we elaborate a didactic sequence that was applied on three groups of 3rd year of High School in a public school in São Paulo.

In elapsing of the application of this didactic sequence, we tried to debate and to guide the activies resolutions, assisting the students in retake some necessary previous contents for the task development.

We conclude in the end of this experience that is possible to introduce the Game Theory in High School Students, contemplating the acquisition of other subjects.

Keywords: Games Theory , High School, didactic sequence

SUMÁRIO

Anexos

INTRODUÇÃO

Quando comecei a lecionar, recém saída da Universidade em 1991, tinha um mundo de sonhos, achava que poderia entrar em uma sala de aula, e ensinar o que sabia e todos iriam escutar e aprender. Fui para a sala de aula, mas os meus sonhos não se realizaram, dia após dia, tentava obter a atenção de meus alunos para aquela matemática que eles não entendiam.

Com o passar do tempo, comecei a ficar angustiada, pois não conseguia entender por que os alunos não se interessavam pelos estudos, principalmente, pela matemática. Acreditei que o problema era a forma como estava explicando, não sabia o que fazer para mudar, foi então,que decidi fazer especialização em Psicopedagogia. Eu não estava sabendo lidar com os alunos, suas dificuldades interiores, seus problemas de aprendizagem.

Esse curso me ajudou a entender um pouco mais sobre os alunos, e ter mais paciência, levou-me a procurar entender meu aluno de maneira individual, mas mesmo assim, não resolveu meu maior problema, fazer que o aluno tivesse em aprender matemática.

Trabalhei durante vários anos na educação, em escolas públicas e particulares, sempre com o mesmo problema, até que resolvi desistir, fui trabalhar em outro ramo, mas sentia falta dos alunos, da escola, de tudo o que me fazia sentir “viva”. Até hoje, ouço minha mãe falar que desde criança, eu dizia que seria professora quando crescesse.

Minha necessidade de estar com os alunos parecia insuportável, então, decidi voltar a lecionar , mas com o propósito de que faria diferente, meus “fantasmas” me assombravam dizendo que não conseguiria novamente, mas minha paixão pela Educação, falou mais alto.

Resolvi, então, que iria me especializar, aprendendo cada vez mais, buscando soluções para acabar com as minhas angústias. Voltei a lecionar para a

Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, onde tive a oportunidade de fazer este curso de Pós Graduação, Mestrado Profissional em Educação Matemática.

Recomecei, então, meus estudos, depois de nove anos; estava eufórica, fiquei um pouco perdida, estava tudo mudado, a experiência que havia tido na Graduação e Especialização era bem diferente do curso de mestrado. Cursando as disciplinas do Programa, ia aprendendo cada vez mais e de maneira diferente e a cada novo aprendizado tentava apresentar ao meu aluno o que havia aprendido. Mas ainda não sabia exatamente qual seria o tema de minha dissertação, o tempo foi passando e eu ainda não havia decidido, queria falar sobre tudo, estudar sobre tudo, escrever sobre tudo...

Foi quando em uma das últimas aulas na disciplina História da Matemática o Professor Ubiratan D'Ambrosio falou sobre a Teoria dos Jogos, eu fiquei paralisada, esta teoria era exatamente sobre o que eu pensava. Sempre dizia a meus alunos, frases como: "Qualquer atitude que você tome, terá um pagamento como resposta". "Você precisa ver o que é mais útil para você, o que vale mais a pena". Mas, eu não sabia que existia uma teoria matemática que explicasse exatamente o porquê, de tal escolha. Fui pesquisar sobre o assunto, e fiquei fascinada com o que encontrei.

Na mesma semana, pedi ao Professor Ubiratan D'Ambrosio que me aceitasse como sua orientanda, o que ele gentilmente aceitou, para minha felicidade. Comecei a ler sobre a Teoria e foi ai que surgiram as perguntas: Será possível ensinar a Teoria dos Jogos para alunos do Ensino Médio? Por que ensinar a Teoria dos Jogos aos alunos ? e Como poderia fazer isto?

O filósofo Johan Huizinga, em 1938, escreveu seu livro Homo Ludens, definindo jogo como "*uma atividade voluntária exercida dentro de certos e determinados limites de tempo e espaço, segundo regras livremente consentidas, mas absolutamente obrigatórias, dotado de um fim em si mesmo, acompanhado de um sentimento de tensão e alegria e de uma consciência de ser diferente da vida cotidiana".*

Os PCNs afirmam que os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas. "*Os jogos de estratégia levam ao desenvolvimento de* *habilidades específicas para a resolução de problemas e os modos típicos do pensamento matemático."*

Embora seja fascinante e enriquecedor o trabalho com jogos em sala de aula, a Teoria dos Jogos não é exatamente um jogo.

A Teoria dos Jogos, escreve Silvia Nasar em seu livro *Uma mente brilhante* (1998), foi uma tentativa, inventada por John Von Neumann, de construir uma teoria sistemática do comportamento humano racional, enfocando os jogos como cenários adequados para o exercício da racionalidade humana.

A Teoria dos Jogos focaliza a tomada de decisão, no qual duas ou mais pessoas tentam maximizar sua utilidade simultaneamente, cada uma consciente do que as outras estão fazendo. Também permite elaborar várias explicações para fenômenos da vida social, desde que haja interação entre indivíduos conscientes de que suas decisões individuais afetam a todos.

Este trabalho tem como objetivo básico, tentar responder as perguntas aqui apresentadas. Para isso, fizemos uma pesquisa bibliográfica sobre o assunto, apresentando a Teoria dos Jogos, alguns teóricos dos jogos, tipos de jogos e onde a Teoria dos Jogos é utilizada hoje em dia.

O Capítulo I trata, de forma sucinta, sobre a matemática e o Ensino Médio.

No Capítulo II, foi feita uma pesquisa bibliográfica sobre a História da Teoria dos Jogos.

Dando continuidade à pesquisa bibliográfica, o Capítulo III se concentra na estrutura, nas estratégias e representações da Teoria dos Jogos , assim como, no significado de utilidade.

A classificação da Teoria dos Jogos, o teorema Minimax e equilíbrio de Nash são tema do Capítulo IV.

O Capítulo V apresenta a determinação dos resultados da Teoria dos Jogos, seus métodos de resolução, alguns tipos de jogos, e também os ramos de aplicação da Teoria dos Jogos.

O Capítulo VI, apresenta a aplicação de uma seqüência didática a alunos do 3º ano do Ensino Médio, bem como análise de seus resultados e, logo após, as considerações finais.

Nos anexos, apresentamos as personalidades mais importantes da Teoria dos Jogos bem como a seqüência didática aplicada aos alunos.

CAPÍTULO I

1. A Matemática e o Ensino Médio

Propor um novo tópico no Ensino de Matemática de nível Médio é bastante conflitante nos dias atuais, em que há uma certa tensão devido aos resultados obtidos por alunos, em avaliações nacionais como o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e internacionais como o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA), entre outros. Mas, para que este quadro seja alterado é preciso que todos aqueles que estão ligados à educação, procurem encontrar novos caminhos.

Ubiratan D'Ambrosio escreve em seu livro *Educação Matemática : da Teoria à Prática* que " *do ponto de vista da motivação contextualizada, a matemática que se ensina hoje nas escolas é morta*". Ele afirma que o "*grande desafio é desenvolver um programa dinâmico, apresentando a ciência de hoje relacionada a problemas de hoje e ao interesse do aluno*."

> (...) Poderíamos dizer que a matemática é o estilo de pensamento dos dias de hoje, a linguagem adequada para expressar as reflexões sobre a natureza e as maneiras de explicação. Isso tem naturalmente importantes raízes e implicações filosóficas.
> Pode-se prever que na matemática do futuro serão importantes o que hoje se chama matemática discreta e igualmente o que se chamavam "casos patológicos", desde não linearidade até teoria do caos, fractais, *fuzzies*, teoria dos jogos, pesquisa operacional, programação dinâmica.
> (D'Ambrosio 2005 p. 58-59)

No Brasil, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei 9.394/96) determina que o Ensino Médio é a etapa final da Educação Básica. A mesma LDB em seu artigo 36, parágrafo primeiro, destaca que os conteúdos, as metodologias e as formas de avaliação serão organizados de tal forma que, ao final do Ensino Médio, o educando demonstre:

I. Domínio dos princípios científicos e tecnológicos que presidem a produção moderna;

II. Conhecimento de formas contemporâneas de linguagem;

III. Domínio dos conhecimentos de Filosofia e de Sociologia necessários ao exercício da cidadania.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) do Ensino Médio encontramos a necessidade de reavaliar o currículo escolar:

> "Uma nova concepção curricular para o Ensino Médio, deve expressar a contemporaneidade e, considerando a rapidez com que ocorrem as mudanças na área do conhecimento e da produção, ter a ousadia de se mostrar prospectiva."
>
> PCNs. p.25

Assim como:

> Deve contemplar formas de apropriação e construção de sistemas de pensamento mais abstratos e ressignificados, que as trate como processo cumulativo de saber e de ruptura de consensos pressupostos metodológicos. A aprendizagem de concepções científicas atualizadas do mundo físico e natural e o desenvolvimento de estratégias de trabalho centradas na solução de problemas é finalidade da área, de forma a aproximar o educando do trabalho de investigação científica e tecnológica, como atividades institucionalizadas de produção de conhecimentos e bens de serviços.
>
> PCNs p. 33

Uma organização curricular no Ensino requer:

> ▪ Desbastar o currículo enciclopédico, congestionado de informações, priorizando conhecimentos e competências de tipo geral, que são pré-requisito tanto para a inserção profissional mais precoce quanto para a continuidade de estudos, entre as quais se destaca a capacidade de continuar aprendendo;
>
> ▪ (re)significar os conteúdos curriculares como meios para constituição de competências e valores, e não como objetivos do ensino em si mesmos;
>
> ▪ trabalhar as linguagens não apenas como formas de expressão e comunicação, mas como constituidoras de significados, conhecimentos e valores;
>
> ▪ adotar estratégias de ensino diversificados, que mobilizem menos a memória e mais o raciocínio e outras competências cognitivas superiores, bem como potencializem a interação entre aluno-professor e aluno-aluno para a

> permanente negociação dos significados dos conteúdos curriculares , de forma a propiciar formas coletivas de construção do conhecimento;
>
> ▪ estimular todos os procedimentos e atividades que permitam ao aluno reconstruir ou "reinventar" o conhecimento didaticamente transposto para a sala de aula, entre eles a experimentação, a execução de projetos, o protagonismo em situações sociais;
>
> ▪ organizar os conteúdos de ensino em estudos ou áreas interdisciplinares e projetos que melhor abriguem a visão orgânica do conhecimento e de diálogo permanente entre as diferentes áreas do saber;
>
> ▪ tratar os conteúdos de ensino de modo contextualizado, aproveitando sempre as relações entre conteúdos e contexto para dar significado ao aprendido, estimular o protagonismo do aluno e estimulá-lo a ter autonomia intelectual;
>
> ▪ lidar com os sentimentos associados às situações de aprendizagem para facilitar a relação do aluno com o conhecimento.

Segundo os PCNs; a "Matemática do Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas".

Com essa perspectiva da educação, principalmente na educação matemática, D'Ambrosio afirma que "o maior desafio é fazer da matemática parte do mundo moderno. De outra maneira ela poderá encontrar seu fim nos currículos escolares".

D'Ambrosio cita que :

> Cidadania tem tudo a ver com a capacidade de lidar com situações novas. Lida-se com situações conhecidas e rotineiras a partir de regras que são memorizadas e obedecidas. Mas o grande desafio está em tomar decisões sobre situações imprevistas e inesperadas, que hoje são cada vez mais freqüentes. A tomada de decisões exige criatividade e ética. A matemática é um instrumento importantíssimo para a tomada de decisões, pois apela para a criatividade. Ao mesmo tempo, a matemática fornece os instrumentos necessários para uma avaliação das conseqüências da decisão escolhida. A essência do comportamento ético resulta do conhecimento das conseqüências das decisões que tomamos.
>
> Que matemática deve ser aprendida nas escolas hoje?
> Ubiratan D'Ambrosio
> Teleconferência no Programa PEC – Formação Universitária, patrocinado pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo,
> 27 de julho de 2002

Vários autores escrevem sobre a importância de se rever o currículo no ensino, principalmente no Ensino Médio.

O matemático Mikhael Gromov, do Institut des Hautes Études Scientifiques, da França, escreve que a matemática pura continuará a existir e é importante que a pesquisa nessa área seja mantida, mas, existem problemas que para serem resolvidos é preciso olhar para outras direções, um outro tipo de matemática. Uma nova atitude acadêmica:

> [...] nós, matemáticos muitas vezes, temos pouca idéia sobre o que está se passando em ciência e engenharia, enquanto os cientistas experimentais e engenheiros muitas vezes, não se apercebem das oportunidades oferecidas pelo progresso da matemática pura. Este perigoso desequilíbrio deve ser restaurado trazendo mais ciências para a educação dos matemáticos e expondo futuros cientistas e engenheiros a matemática central. Isto requer novos currículos e um grande esforço de parte dos matemáticos para trazer as técnicas e idéias matemáticas fundamentais (principalmente aquelas desenvolvidas nas últimas décadas) a uma audiência maior. Necessitamos para isso a criação de uma nova geração de matemáticos profissionais capazes de trafegar entre matemática pura e ciência aplicada. A fertilização cruzada de idéias é crucial para a saúde tanto das ciências quanto da matemática.
>
> (GROMOV, apud D'Ambrosio, 2005)

É por meio desses questionamentos que propomos este novo assunto, a Teoria dos Jogos, com a intenção de tornar interessante o ensino, mostrando aos alunos um novo olhar para a matemática, que se tornou tão distante de seu cotidiano, portanto, "desinteressante", "inútil" e "obsoleta".

CAPÍTULO II

1.História da Teoria dos Jogos

A Teoria dos Jogos teve como marco de sua criação na história, o livro de John von Neumann e Oskar Morgenstern , *Theory of Games and Economic Behaviour* (Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico) uma obra clássica sobre a Teoria dos Jogos e sua aplicação à tomada de decisões em economia e negócios, foi escrita em 1944 em Princeton. O grande impacto desse livro deveu-se, principalmente, à Segunda Guerra Mundial, pois, a maioria dos problemas militares podiam ser modelados como jogos de dois jogadores do tipo soma zero, aqueles para os quais a teoria pode fornecer uma "solução" específica.

Embora seja aceito que a criação da Teoria dos Jogos teve seu início com von Neumann e Morgenstern, Ronaldo Fiane em seu livro, *Teoria dos Jogos com aplicações em Economia, Administração e Ciências Sociais,* cita outros autores como precursores do que hoje se entende como Teoria dos Jogos. O primeiro seria, Antoine Augustin Cournot (1801-1877), que publicou em 1838 seu livro *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses* (Investigações sobre os Princípios Matemáticos da Teoria das Riquezas).Em seu livro Cournot, apresentou um modelo de duopólio que hoje leva seu nome. Nesse modelo, duas empresas produzindo um bem homogêneo decidiam que quantidade cada uma iria produzir, sabendo que a quantidade que a outra produzisse, afetaria seus lucros. Cournot encontrou uma solução em que as duas empresas decidiam produzir quantidades que eram compatíveis entre si.

O matemático alemão Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871-1953), também, pode ser considerado um dos precursores da Teoria dos Jogos, demonstrando que o jogo de xadrez sempre tem uma solução, ou seja, que a partir de qualquer posição das peças no tabuleiro, um dos jogadores tem sempre uma estratégia vitoriosa, não importando o que o outro jogador faça. Esse método antecipava a técnica de solução que ficou conhecida como indução reversa.

O matemático francês, Félix Edouard Justin Emile Borel (1871-1956), escreveu certa vez que "*Os problemas de probabilidade e análise que se propõem com relação à arte da guerra, ou especulações econômicas e financeiras, não são isentos de analogia com os problemas que dizem respeito a jogos, embora possuam um maior grau de complexidade*" (apud FIANE,2006, p.35). Borel tinha interesse nos jogos que dependiam simultaneamente da sorte e da habilidade do jogador, ou seja, os jogos de estratégia, sendo o primeiro a formular o conceito moderno de estratégia, que denominou "*método do jogo*", definindo como um "*código que determina para cada circunstância possível (supostamente finita em número) exatamente o que a pessoa deve fazer"* (MYERSON, 1999,p.1071)

Em 1926 , von Neumann apresentou originalmente sua Teoria dos Jogos de estratégia em um artigo que escreveu, aos 23 anos, para a Sociedade Matemática da Universidade de Göttingen, intitulado *Zur Theorie der Gesellschaftspiele, Mathematische Annalen* 100, 295-300, publicado dois anos depois. Nesse artigo, o autor demonstra que a solução para jogos de soma zero, (jogos em que o ganho de um jogador representa necessariamente uma perda para o outro jogador), pode ser determinado utilizando-se técnicas matemáticas. O tema desse artigo é uma estratégia racional, conforme cita Peter L. Bernstein em seu livro *A fascinante história do risco,* para um jogo infantil em que cada um dos dois jogadores vira uma moeda ao mesmo tempo, se ambas forem caras ou ambas forem coroas, o jogador A vence, se uma for cara e outra for coroa, o jogador B vence.

Em seu artigo, Von Neumann afirma que o segredo para ganhar esse jogo, contra um jogador "pelo menos, moderadamente inteligente" não está em tentar advinhar suas intenções, mas em não deixar que ele saiba das nossas próprias intenções. A derrota acontece para qualquer estratégia que tenha como objetivo vencer, e não evitar a derrota. Dessa forma, se o jogador A mostrasse, por exemplo, quatro caras, continuamente em cada cinco jogadas, o jogador B jogaria quatro coroas, ganhando assim, mais facilmente, o jogo. O jogo “par” ou “impar” ou “dois” ou “um” entre outros, também obedece esta mesma regra.

Assim, a única decisão racional para os dois jogadores é mostrar cara ou coroa aleatoriamente. Então, a longo prazo, as moedas combinarão metade das vezes e deixarão de combinar outra metade. A contribuição matemática de von Neumann com essa demonstração foi a prova de que esse era o único resultado que poderia surgir da tomada de decisões racional dos dois jogadores.

No livro, *Theory of games and economic behaviour*, os autores defendem a aplicação da matemática a tomada de decisões econômicas. Von Neumann e Morgenstern possuíam a mesma idéia de que os elementos humanos e psicológicos da economia poderiam ser analisados sob um ponto de vista matemático.

Oskar Morgenstern escreveu, no Prefácio do livro *Teoria dos jogos: uma introdução não-técnica,* de Davis D. Morton que a Teoria dos Jogos de estratégia desenvolve noções rigorosas para termos como utilidade, informação, comportamento ótimo, estratégia, equilíbrio, ajuste e outros e, assim, nos capacita a “*examinar a perturbadora complexidade social sob nova luz*”.

> A teoria dos jogos é uma matéria nova que despertou grande interesse em razão de suas propriedades matemáticas inéditas e de suas multiplas aplicações a problemas sociais, econômicos e políticos. A teoria atravessa fase de ativo desenvolvimento. Seus efeitos sobre as ciências sociais já começaram a manifestar-se ao longo de um largo espectro. Suas aplicações se vêm tornando cada vez mais numerosas e dizendo respeito a questões altamente significativas enfrentadas pelos cientistas sociais, mercê do fato de que a estrutura matemática da teoria difere profundamente de anteriores tentativas de propiciar fundamento matemático aos fenômenos sociais. Primeiros esforços em tal sentido foram feitos com base nas ciências físicas e se inspiraram no impressionante êxito por elas alcançado ao longo dos séculos. Ocorre, porém, que os fenômenos sociais são diferentes: os homens, algumas vezes, lutam uns contra os outros e algumas vezes, cooperam entre si; dispõem de diferentes graus de informação acerca do próximo , e suas aspirações os conduzem ao conflito ou à colaboração. A natureza inanimada não exibe qualquer desses traços. Átomos, moléculas, estrelas podem aglomerar-se, colidir, explodir, mas nunca hostilizam, nem colaboram uns com os outros. Conseqüentemente, era de duvidar que os métodos e conceitos desenvolvidos pelas ciências físicas pudessem lograr êxito quando aplicados a problemas sociais.
>
> Oskar Morgenster, 1973, p.11

O objetivo da criação da Teoria dos Jogos foi o de permitir uma abordagem dos problemas econômicos sob novo ponto de vista. Para von Neumann e Morgenstern os " *problemas típicos de comportamento econômico apresentam-se de forma estritamente idêntica a conceitos matemáticos que traduzem certos jogos de estratégia*" (apud DAVIS,1973,p.15).Desde que foi publicada, a Teoria dos Jogos tem aparecido em diversas áreas de aplicação, além da economia podemos encontrá-la na ciência política, matemática pura, psicologia, sociologia, finanças, guerra, biologia, especificamente, a seleção natural que leva os seres vivos a um comportamento que otimiza seu sucesso reprodutivo, calculando a descendência, pode-se medir esse sucesso em números, etc.

The Theory of Games and Economic Behaviour, além de apresentar os jogos de soma zero, definiu a representação de jogos em forma extensiva , em que são identificadas as decisões de cada jogador em cada estágio do jogo, quando o jogo se desenvolve em etapas sucessivas e também discute cooperação e formação de coalisões entre os jogadores. Mas, este livro era limitado, por apresentar somente jogos de soma zero, pois esta não é a descrição adequada para a maioria das interações sociais. Era necessário encontrar outro instrumento, ferramentas que proporcionassem a análise das interações entre indivíduos e organizações na sociedade, em particular na economia . Essas ferramentas foram elaboradas, a partir de 1950, por John F. Nash,Jr., John C. Harsanyi e Reinhard Selten, premiados com o Nobel de Economia em 1994.

John F. Nash, Jr., (1928-) definiu em seu artigo de 1951 ("Non – Cooperatives Games ", *Annals of Mathematics* 54, 286-295), uma noção de equilíbrio para modelos de jogos que não se restringia apenas aos jogos de soma zero, essa noção foi batizada como "ponto de equilíbrio" ou "equilíbrio de Nash". A partir da noção de equilíbrio foi possível estudar uma classe de jogos muito mais ampla, além de demonstrar que, em alguns casos, quando cada jogador escolhe racionalmente aquela estratégia que seria a melhor resposta às estratégias dos demais, pode ocorrer que o resultado final para todos os jogadores seja insatisfatório e que, portanto, nem sempre a busca de cada indivíduo pelo melhor para si, resulta no melhor para todos. Com isso, juntamente a teoria do minimax, o equilíbrio de Nash tornou-se um dos pontos fundamentais da Teoria dos Jogos.

O húngaro John C. Harsanyi (1920-2000) publicou três artigos sobre a Teoria dos Jogos (“Games with Incomplete Information Played by “Bayesian” Players, Parts I,II and III” Management Science 14, 159-182, 320-334 e 486-502), nesses, ele escreve sobre *informação assimétrica* (situações em que alguns jogadores possuem informação privilegiada em relação aos outros sobre algum elemento importante do jogo que definiu como modelo de informação incompleta). Ele desenvolveu um modelo que mostrava como o conceito do equilíbrio de Nash poderia ser aplicado também em modelos de informação incompleta.

Reinhard Selten (1930-) publicou em 1965, o artigo “Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit” (*Zeitschrift fur die gesamte Staatswissenschaft* 121, 301-324 e 667-689), nesse desenvolvendo o “equilíbrio perfeito em subjogos” (uma determinada estratégia, para ser considerada um equilíbrio perfeito em subjogos, tem de ser ótima, considerando-se todos os possíveis desdobramentos do processo de interação estratégica), esse equilíbrio é muito importante em análises estratégicas, pois, em jogos que envolvem compromissos e ameaças, permiti determinar quais compromissos e ameaças são plausíveis e quais não são.

Além dos desenvolvimentos em Teoria dos Jogos anteriores, foi através das “*formulações matemáticas de Robert J. Aumann que os teóricos conseguiram demonstrar que, se a relação entre os indivíduos ou as organizações tem um boa chance de durar por tempo indeterminado – e caso não haja uma grande pressa de ganhos em curto prazo -, a cooperação deve se estabelece*r” (Fiane, 2006 p 37).

Em 1960, Thomas C. Schelling publicou, *The Strategy of Conflict*, no qual apresentava uma grande quantidade de intuições importantes a todas situações de cooperação ou conflito, além de mostrar que, em algumas situações, pode ser interessante deixar para si mesmo somente a pior opção, também contribuiu para a idéia de ponto focal (ponto focal é um elemento que se destaca em um contexto e que permite aos indivíduos coordenarem suas decisões, de forma a promover um resultado melhor para todos, mesmo quando não há a possibilidade de comunicação).

Em 2001, a questão das informações assimétricas garantiu o Prêmio Nobel de Economia aos pesquisadores, Joseph Stiglitz, George Akerlof e Michael Spence.

Raul Marinho, em seu livro, Prática na Teoria , escreve que

> “a teoria dos jogos foi estigmatizada tanto entre os matemáticos (que a taxavam de heresia por se desviar da matemática “pura”) quanto entre os cientistas sociais, que não admitiam (e ainda relutam em admitir) a hipótese de se estudar o comportamento humano com instrumentos de cálculo. Ou melhor, com instrumentos que não os da estatística”.
>
> Marinho, 2005, p. 6

No cinema, a Teoria dos Jogos, foi cenário de três filmes. O primeiro foi o filme *Dr. Strangelove, or How I Learned to Stop Worrying and Love the Bomb* (no Brasil Dr. Fantástico) de1963, uma adaptação da novela de Peter George (1924-1966), dirigida por Stanley Kubrick (1928-1999). O personagem Dr. Fantástico foi inspirado na função exercida por políticos e cientistas como Herman Kahn, Henry Kissinger, John von Neumann e Edward Teller. É o retrato de um cientista louco, que queria explodir o mundo, utilizando a Teoria dos Jogos para “pensar o impensável”, na expressão de Steven Pinker.

O segundo filme é *War Games (*Jogos de Guerra*)* de 1983, filme de ficção científica escrito por Lawrence Lasker e Walter F. Parkes.

Por último, o filme *A Beautiful Mind* (Uma mente brilhante), um drama biográfico baseado na obra do livro homônimo escrito por Sylvia Nasar sobre a vida e obra de John Nash Jr. ,e adaptado por Akiva Goldsman, lançado em 2001 e dirigido por Ron Howard.

CAPÍTULO III

1.A estrutura da Teoria dos Jogos

A Teoria dos Jogos foi desenvolvida com a finalidade de analisar situações competitivas que envolvessem interesses conflitantes. Nessas situações, existem duas ou mais pessoas com objetivos diferentes, sendo que a ação de cada uma influencia mas não determina completamente o resultado do jogo. Além disso, admite-se que cada jogador sabe os objetivos de seu oponente. A Teoria dos Jogos fornece um resultado para este jogo, admitindo que cada um dos jogadores deseja maximizar seu lucro mínimo esperado, ou, minimizar sua perda máxima esperada. Esse critério é denominado *critério do minimax ou maximin.*

A maioria dos jogos recreativos, como jogo da velha, damas, xadrez, pôquer e outros jogos de cartas, pode ser analisada como jogos de estratégia. Como são, usualmente, formulados os jogos de azar tais como: dados e roleta que não são jogos de estratégia, uma vez que uma pessoa ao jogar um destes jogos, está “jogando com a sorte” e não contra um jogador racional.

Mas, como já mencionamos, além dos jogos de salão, a Teoria dos Jogos aplica-se a vários outros campos. Existem algumas características fundamentais, por meios das quais, os jogos são classificados para uma resolução. Entre essas características, podemos citar como mais importantes, o número de jogadores que dele participam, a natureza do pagamento (payoff) e o conjunto de estratégias disponíveis.

Para Fiani (2006), um jogo pode ser considerado como “*situações que envolvam interações entre agentes racionais que se comportam estrategicamente*”. Assim, para o autor, *“um jogo nada mais é do que uma representação formal que permite a análise das situações em que agentes interagem entre si, agindo racionalmente*”. Dessa forma, os elementos necessários à compreensão do objeto de estudo da Teoria dos Jogos seriam :

- *um jogo é um modelo formal* (existem regras preestabelecidas para apresentar e estudar um jogo), modelar adequadamente uma situação de interação estratégica é de fundamental importância, pois uma modelagem inadequada pode resultar em conclusões equivocadas acerca de que estratégia adotar para obter os melhores resultados;

- *interações* (as ações de cada jogador, consideradas individualmente, afetam os demais);

- *jogador* (é qualquer indivíduo, ou grupo de indivíduos, com capacidade de decisão para afetar os demais, entende-se aqui que a palavra "jogador" não tem necessidade de ser uma pessoa, poderá ser uma equipe, uma empresa, uma nação);

- *racionalidade* (na Teoria dos Jogos, supõe-se que os jogadores empregam os meios mais adequados aos objetivos que almejam, sejam quais forem esses objetivos);

- *comportamento estra*tégico (admite-se que cada jogador, ao tomar sua própria decisão, leva em consideração o fato de que os jogadores interagem entre si, e que, portanto, sua decisão terá conseqüências sobre os demais jogadores, assim como as decisões dos demais jogadores terão conseqüências sobre ele).

Antonio Rogério da Silva, professor visitante da Universidade Estadual do Rio de Janeiro- RJ, em sua apostila *Teoria dos Jogos e Cooperação para Filósofos,* elaborada para o curso de Teoria dos Jogos voltado para pesquisadores da área da filosofia, apresenta a definição de jogo como sendo um conjunto de regras que estabelece cinco elementos constitutivos a seguir:

1. o número de participantes;
2. as ações ou estratégias possíveis;
3. os resultados de cada jogador;
4. a função que permite a cada parte combinar suas estratégias e
5. a relação de preferências de cada um diante dos resultados.

Além dos cinco elementos acima citados, as regras delimitam o grau de informação permitido aos jogadores. Os jogos são representações simplificadas de situações em que pelo menos, uma pessoa age no sentido de maximizar a utilidade de suas ações levando em conta as reações de outros jogadores.

Mais especificamente, um jogo tem os seguintes elementos básicos: existe um conjunto finito de jogadores representados por $G = \{g_1, g_2, \ldots g_n\}$. Cada jogador $g_i \in G$ possui um conjunto finito $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{im_i}\}$ de opções, denominadas *estratégias puras* do jogador $g_i (m_i \geq 2)$. Um vetor $s = (s_{1j1}, s_{2j2}, \ldots, s_{njn})$, onde s_{iji} é uma estratégia pura para o jogador $g_i \in G$, é denominado perfil de estratégia pura. O conjunto de todos os perfis de estratégias puras formam, portanto, o produto cartesiano:

$$S = \prod_{i=1}^{n} S_i = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n ,$$

denominado *espaço de estratégia pura* do jogo. Para o jogador $g_i \in G$, existe uma função utilidade

$$\begin{aligned} u_i : S &\rightarrow \Re \\ s &\mapsto u_i(s) \end{aligned}$$

que associa a cada perfil de estratégia pura $s \in S$ o ganho (payoff) $u_i(s)$ do jogador g_i.

2. Utilidade

Em 1738, Daniel Bernoulli, escreveu um artigo com o tema central : "*o valor de um item não deve se basear em seu preço, mas na utilidade que ele produz*" (BERNSTEIN,1997 p. 99). Esse artigo foi apresentado originalmente à Academia Imperial de Ciências de São Petersburgo em 1731, sob o título *Specimen theoriae novae de mensura sortis* (Exposição de uma nova teoria sobre a medição do risco). Ele começa esse artigo expondo a tese que deseja atacar:

> "Desde que os matemáticos começaram a estudar a medição do risco, tem vigorado um consenso geral sobre esta proposição: os valores esperados são calculados multiplicando-se cada ganho possível pelo número de meios pelos quais podem ocorrer, e depois dividindo-se a soma desses produtos pelo número total de casos".
>
> Bernoulli, apud BERNSTEIN, p.102.

Nesse artigo, Bernoulli considerava falha a teoria de como as pessoas tomam decisões em sua vida diária, por focalizar apenas os fatos; sem levar em consideração a "utilidade". Para ele: "*a utilidade... depende das circunstâncias específicas de quem faz a estimativa... Não há razão para supor que... os riscos estimados por cada indivíduo devam ser considerados de mesmo valor.*"(Bernoulli, apud BERNSTEIN p.103).

Embora Bernoulli tenha citado "utilidade" intuitivamente, o conceito só foi desenvolvido mais tarde . Segundo BÊRNI (1997) a "utilidade" forneceu a base da Lei da Oferta e da Procura, uma inovação impressionante dos economistas vitorianos que possibilitou a compreensão de como os mercados se comportam e de como os compradores e vendedores chegam a um acordo sobre o preço.

O inglês Jeremy Bentham (1748-1832) criador da filosofia utilitarista e autor da *obra An Introduction to the Principles of Morals and Legislation,* publicada em 1789 escreve :

> “A natureza colocou a humanidade sob o domínio de dois mestres soberanos, a dor e o prazer. Somente eles podem indicar o que nós devemos fazer, bem como determinar a respeito do que faremos. De um lado, os padrões de certo e errado, no outro, a corrente das causas e dos efeitos, presa em seus tronos. Governam-nos em tudo o que fazemos , em tudo o que dizemos, em tudo o que pensamos: todo esforço que podemos fazer para nos livrar da sujeição, servirá apenas para demonstrá-la e confirmá-la. Em outras palavras, um homem pode fingir abjurar o seu império: mas na realidade ele continuará sujeito a ele. O princípio da utilidade reconhece esta sujeição, e a aceita como fundamento deste sistema(...)”.[1]
>
> J. Bentham, An Introducion to the Principles of Morals and Legislation, Cap.1

Para Bentham:

> “A utilidade é o significado de propriedade de qualquer objeto, que tende a produzir algum benefício, vantagem, prazer, bem ou felicidade, (tudo isto neste caso valem a mesma coisa) ou (o que vem a ser novamente a mesma coisa) para impedir danos, dor, mal ou infelicidade à parte cujo interesse esteja sendo considerado: se essa parte for a comunidade geral, então a felicidade é da comunidade; se for um indivíduo particular, então a felicidade é individual.[2]
>
> J. Bentham, An Introducion to the Principles of Morals and Legislation, Cap.1

Uma das mais importantes contribuições dadas por von Neumann e Morgenstern é a que define o conceito de utilidade. A função de utilidade foi elaborada com o objetivo de tornar aceitável as soluções e estratégias do jogo.

Nature has placed mankind under the governance of two sovereign masters, pain and pleasure. It is for them alone to point out what we ought to do, as well as to determine what we shall do. On the one hand the standard of right and wrong, on the other the chain of causes and effects, are fastened to their throne. They govern us in all we do, in all we say, in all we think: every effort we can make to throw off our subjection, will serve but to demonstrate and confirm it. In words a man may pretend to abjure their empire: but in reality he will remain. subject to it all the while. The principle of utility[1] recognizes this subjection, and assumes it for the foundation of that system(…)[1]

By utility is meant that property in any object, whereby it tends to produce benefit, advantage, pleasure, good, or happiness, (all this in the present case comes to the same thing) or (what comes again to the same thing) to prevent the happening of mischief, pain, evil, or unhappiness to
the party whose interest is considered: if that party be the community in general, then the happiness of the community: if a particular individual, then the happiness of that individual[2]

Bêrni (1997) define utilidade como sendo, “a *força de nosso desejo de algo*”. Ela tem um dos principais papéis em todas as teorias de tomada de decisões e enfrentamento de riscos.

Há muitas situações em que as pessoas não agem de forma a maximizar seus ganhos. Antes que se possa tomar decisões sensatas em um jogo, deve-se levar em conta a estrutura formal do mesmo jogo e os objetivos dos jogadores. Morton Davis, cita Lewis Carroll, em seu livro, dizendo que “*o teórico do jogo deve escolher o caminho adequado depois de conhecer o destino do jogador; o jogador nada precisa conhecer a respeito de Teoria dos Jogos, mas tem de saber o que quer*”.

Mas, o problema está em encontrar o caminho que permita ao jogador tornar claras suas estratégias numa forma útil para quem deve tomar a decisão. Recorrendo à Teoria da Utilidade, é possível traduzir certos sentimentos de maneira suficiente (sob certas condições) para atendimento de nosso propósito.

Uma função de utilidade é a “quantificação” das preferências de uma pessoa com relação a certos objetos, ou seja, é a análise de situações em que os ganhos são qualitativos, pela substituição desses por valores de utilidade. Como exemplo, podemos citar a preferência por três tipos de fruta. Suponhamos que temos diante de nós: uma maçã, uma uva e uma pêra. A função de utilidade começa por associar a cada fruto um número que reflete seu grau de preferência. Se a pêra é a mais e a maçã é a menos desejada, a utilidade da pêra será maior que a utilidade da maçã que será menor.

Algumas condições devem ser estabelecidas para que seja possível definir uma função de utilidade, para tal, é necessário que os seis axiomas abaixo sejam válidos (o jogador em questão deve apresentar um comportamento compatível com esses axiomas).

As seguintes notações serão utilizadas:

$A \succ B$: A é preferível em relação a B

$A \sim B$: A é indiferente em relação a B

$A \prec B$: B é preferível em relação a A

A representação [A,*p*; B, 1-*p*] define o ganho A com a probabilidade *p* ou o ganho B com probabilidade 1-*p*.

Otto R. Bekman e Pedro Luis O. Costa Neto, em seu livro Análise Estatística da Decisão , apresentam os axiomas da Teoria da Utilidade abaixo:

1) Axioma da *ordenalidade* – Dados os prêmios A e B, ou A $\succ$ B, ou A ~ B, ou A $\prec$ B. Nesse axioma, tudo é suscetível de comparação. Dados dois objetos, o jogador deve preferir um ao outro ou mostrar-se indiferente a ambos; não há dois objetos insuscetíveis de serem comparados.

2) Axioma da *transitividade* – Se A $\succ$ B e B $\succ$ C, então A $\succ$ C. Se o jogador preferir A a B e B a C, ele preferirá A a C. Se o jogador for indiferente a A e B e a B e C, será indiferente a A e C.

3) Axioma da *continuidade* – Se A $\succ$ B $\succ$ C, então existe *p*, 0 < *p* < 1, tal que B ~ [A,*p*; C, 1-*p*]. O jogador sempre se arriscará, se as possibilidades forem suficientemente boas. Suponha que, de três objetos, A é preferível a B e B é preferível a C. Considere um sorteio em que haja uma probabilidade p de obter A e uma probabilidade (1-p) de obter C. Note-se que se p for zero, o sorteio será equivalente a C e que se p for igual à unidade, o sorteio será equivalente a A. No primeiro caso, o sorteio será preferível a B, enquanto que no segundo caso, B será preferível ao sorteio. Esse axioma estabelece que há um valor de p, entre zero e um, que tornará o jogador indiferente, quando posto face a B e ao sorteio.

4) Axioma da *substituibilidade* – Se A ~ B, então [A,*p*; C, 1-*p*] ~ [B,*p*; C, 1-*p*]. Um jogador é indiferente diante de prêmios equivalentes. Suponha que num sorteio um prêmio é substituído por outro, permanecendo as demais condições iguais. Se o jogador for indiferente diante do antigo e do novo prêmio, ele será indiferente aos sorteios. Se o jogador preferir um dos prêmios ao outro, ele preferirá a loteira ou sorteio que ofereça o prêmio ambicionado.

5) Axioma da *redutibilidade* – [[A,p; B, 1-p], q; B, 1-q] ~ [A, pq; B, 1-pq]. Os jogadores são indiferentes ao tipo de jogo. A atitude de um jogador, frente a um sorteio duplo depende apenas dos prêmios finais e da possibilidade de ganho, tal como determinado pelas leis da probabilidade. Não importa o efetivo mecanismo do jogo.

6) Axioma da *monotonicidade* – Se A $\succ$ B, então [A,p; B, 1-p] $\succ$ [A,q; B, 1-q] se e somente se $p > q$. Um sorteio será melhor que outro quanto mais ampla a possibilidade de conseguir o prêmio. Dados os sorteios I e II, há dois possíveis prêmios, os objetos A e B. Nesse axioma o sorteio I será preferível se p for maior que q.

Aceitos os axiomas, podemos definir a função de utilidade $u(X)$, onde X é o ganho. Esta função tem as seguintes propriedades:

a) $A \succ B \Leftrightarrow u(A) > u(B)$

b) $A \sim B \Leftrightarrow u(A) = u(B)$

c) $A \prec B \Leftrightarrow u(A) < u(B)$

d) $u([A,p;\, B,\, 1-p]) = p\, u(A) + (1-p)u(B)$

Tem-se, ainda que, se $u(X)$ é uma função de utilidade com as propriedades de (a) a (d), então $u'(X) = r + s\, u(X)$, onde $r > 0$ e $s > 0$ são constantes, também é uma função de utilidade equivalente a $u(X)$,

3. Estratégias

Estratégia é uma descrição completa de como uma pessoa deverá agir sob quaisquer circunstâncias possíveis; não tem conotação de habilidade por parte do jogador. Num jogo completamente sujeito à análise, é possível, pelo menos, teoricamente, prever todas as eventualidades e, portanto, enumerar todas as estratégias possíveis.

O conjunto de estratégia que cada jogador possui é chamado de *conjunto de estratégias* ou *espaço de estratégias*. De forma genérica, se chamarmos s_j^i a *j-ésima* estratégia do jogador *i*, o *conjunto de estratégias* ou *espaço de estratégias* de jogador *i* é dado por: $S_i^i = \{s_j^i\}$

Para a análise do jogo, um elemento importante é a combinação de estratégias que os jogadores podem adotar. A forma de representação dessas combinações é feita através de um conjunto ordenado, no qual cada elemento é uma estratégia para cada um dos *n* jogadores, na forma:

$$S = (s_1, s_2, ..., s_n),$$

onde s_1 é uma estratégia do jogador número 1, s_2 uma estratégia do jogador número 2, e assim por diante, até o n-ésimo jogador.

Em jogos simultâneos, a estratégia de cada jogador coincide com as ações que ele dispõe, uma vez que os jogadores fazem suas escolhas em um único momento.Mas, em jogos seqüenciais, os jogadores são capazes de, num determinado momento, fazer suas escolhas conhecendo as ações dos demais em etapas anteriores.

Uma estratégia que estabelece deterministicamente qual a ação a adotar em cada possível situação é definida como *estratégia pura*. Quando um jogador alterna suas estratégias aleatoriamente através de uma atribuição de probabilidade a cada estratégia a ser escolhida temos uma *estratégia mista*.

Em um jogo, uma estratégia é denominada *dominante* quando qualquer que seja a estratégia adotada pelo outro jogador, a primeira leva a um resultado pelo menos tão favorável quanto a segunda e, pelo menos, com referência a uma das estratégias do oponente leva a algo melhor. Não há vantagem em adotar uma estratégia dominada.

Seja um dado jogador i, cujas estratégias são representadas como s_i. As estratégias dos demais jogadores são representadas como s_{-i}, onde o subíndice $-i$ significa que estamos tratando das estratégias de todos os jogadores que *não* o jogador i.

Seja π_i a função de recompensa do jogador i, que representa uma recompensa para o jogador i de acordo com a estratégia que ele e os outros jogadores adotaram. Se uma dada estratégia do jogador i, denominada s_i^*, é estritamente dominante em relação a uma outra estratégia s_i^{**} para este jogador, temos que:

$$\pi_i\left(s_i^*, s_{-i}\right) > \pi_i\left(s_i^{**}, s_{-i}\right), \text{ para todo } s_{-i}$$

A desigualdade acima representa o fato de que a recompensa advinda da estratégia s_i^* ao jogador i é estritamente superior às recompensas advindas pela estratégia s_i^{**} que o jogador i pode adotar.

Além das estratégias estritamente dominantes, no jogo, pode haver casos em que uma estratégia é melhor que outra em pelo menos uma situação, sendo no restante das vezes, apenas tão boa quanto à outra, neste caso, dizemos que esta estratégia é *fracamente dominante* em relação à outra. Dessa forma, dizemos que a outra é uma estratégia *fracamente dominada* pela primeira.

Podemos representar essa dominância por:

$$\pi_i\left(s_i^{''}, s_{-i}\right) \geq \pi_i\left(s_i^{'}, s_{-i}\right), \text{ para todo } s_{-i}, \text{ e}$$

$$\pi_i\left(s_i^{''}, s_{-i}\right) > \pi_i\left(s_i^{'}, s_{-i}\right), \text{ para algum } s_{-i}$$

Essas desigualdades representam o fato de que a recompensa advinda da estratégia $s_i^{''}$ para o jogador i é maior ou igual às recompensas advindas pela estratégia $s_i^{'}$, quaisquer que sejam as estratégias adotadas pelos demais jogadores e, para pelo menos uma das estratégias que os demais jogadores possam adotar, a estratégia fracamente dominante $s_i^{''}$ resulta recompensas melhores que $s_i^{'}$.

Duas estratégias estão em equilíbrio (aparecem aos pares, uma para cada jogador) quando nenhum dos jogadores tem vantagem no alterar unilateralmente sua estratégia. O resultado correspondente a esse par de estratégias é definido como ponto de equilíbrio. Os pontos de equilíbrio são muito estáveis.

4. Representação dos jogos de estratégia

Os jogos de estratégia podem ser representados em sua forma dita normal, ou estratégica, e na forma estendida.

Na representação normal ou estratégica, os jogos são apresentados em tabelas de dupla entrada ou matrizes, nas quais as estratégias de cada jogador são listadas em linhas e colunas. Em cada célula são apresentados os ganhos que cada jogador receberá caso realize as estratégias às quais ambos estão vinculados. A tabela abaixo apresenta a representação geral da forma estratégica.

Estratégias		Coluna					
		1	2	...	y_2	...	y_n
Linha	1	f(1,1)	f(1,2)	...	f(1, y_2)	...	f(1, y_n)
	2	f(2,1)	f(2,2)	...	f(2, y_2)	...	f(2, y_n)
	: :	: :	: :	: :	: :	: :	: :
	x_1	f(x_1,1)	f(x_1,2)	...	f(x_1, y_2)	...	f(x_1, y_n)
	: :	: :	: :	: :	: :	: :	: :
	x_m	f(x_m,1)	f(x_m,2)	...	f(x_m, y_2)	...	f(x_m, y_n)

Tabela 1

As matrizes servem para mostrar de forma clara e simples as respostas que podem ser esperadas em função das ações escolhidas simultaneamente. Em cada célula da tabela, aparecem os ganhos que cada uma das partes obterá caso realize as ações às quais ambas estão vinculadas. Os ganhos do jogador da linha, aparecem na primeira posição, e à esquerda do par ordenado, e os do jogador da coluna, vem após a vírgula que os separa à direita.

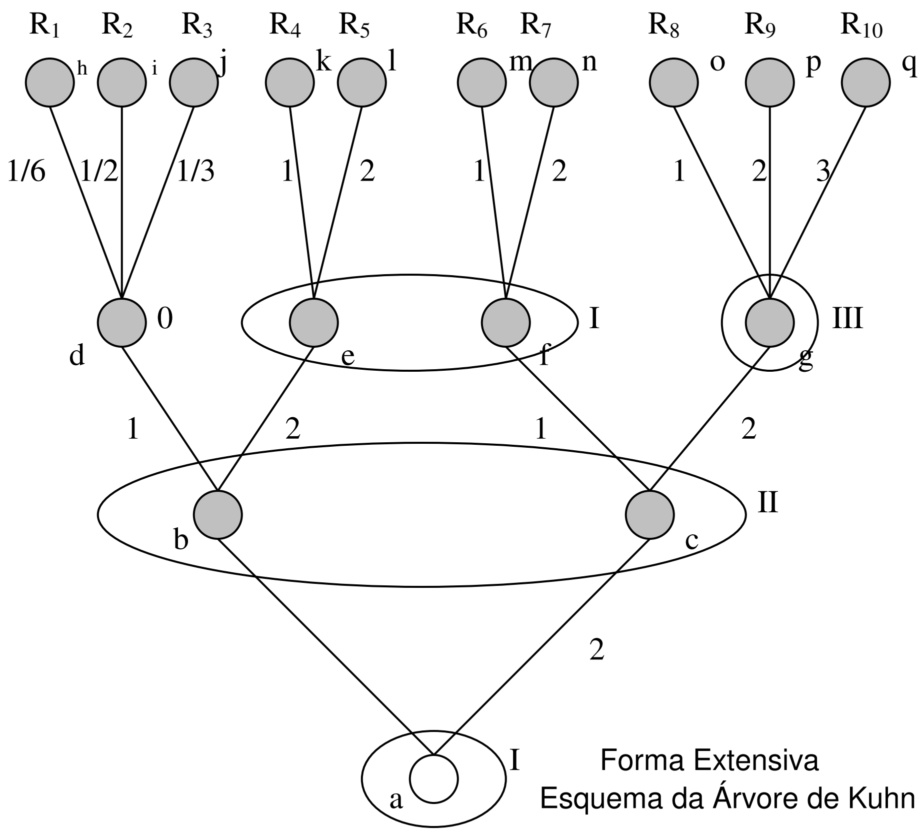
Na representação normal, a ordem em que os jogadores atuam não é importante para o resultado. A matriz concentra as informações disponíveis a cada jogador por igual. Por outro lado, dificulta a inclusão de um número muito grande de jogadores. Acima de dois jogadores, a representação deixa de ser bidimensional e passa a ser tridimensional, com três participantes, ou multidimensional, para mais de quatro jogadores.

A representação na forma normal, pode ser feita através de tabela de dupla entrada ou por representação de matrizes.

$$A= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Na matriz acima, a_{ij}, i refere-se sempre à estratégia adota pelo jogador 1 e j refere-se a estratégia adotada pelo jogador 2. Como a matriz de pagamentos A deve ser um arranjo retangular de números, o jogo é chamado de “jogo retangular”.

Os jogos também podem ser representados na forma estendida, utilizando uma árvore de jogos ,composta por *ramos* e *nós*. O jogo representado na forma estendida oferece mais informações do que o jogo representado na forma normal ou estratégica.



Forma Extensiva
Esquema da Árvore de Kuhn

Cada nó representa uma etapa do jogo em que um dos jogadores tem de tomar uma decisão. O ramo representa uma escolha possível para o jogador, a partir do seu nó, isto é, um ramo é uma ação do conjunto de ações do jogador, em um dado nó.

A definição mais geral da forma estendida para jogos com n-pessoas foi estabelecida por Harold W. Kuhn, em 1953, no artigo "*Extensive Games and the Problem of Information",* ampliando a versão apresentada por John von Neumann, em 1928. A árvore de Kuhn atende a sete condições, conforme cita Antonio Rogério Silva:

i. Um conjunto de *n* jogadores;

ii. Estrutura de árvore enraizada, chamada *árvore do jogo*;

iii. *Partição* do conjunto de nós em diversos subconjuntos, entre os jogadores;

iv. Distribuição de probabilidade rotulando cada ramo brotado de um nó do subconjunto da *natureza*, jogador 0;

v. A formação de *conjunto de informações* para cada subconjunto de nós de um jogador deve respeitar (a) o mesmo número de ramos correspondentes, saindo de cada nó diferente, e (b) cada *caminho*, partindo da raiz à folha, só pode cruzar um conjunto de informação uma única vez;

Cada folha contém, ao final, os *pagamentos* resultantes a cada participante do jogo.

CAPÍTULO IV

1. Classificação dos Jogos

1.1. Jogos de soma zero e jogos de soma não-zero

Os jogos de soma zero foram analisados em Theory of Games and Economic Behaviour, por John von Neumann e Oskar Morgenstern. São jogos em que os interesses dos participantes são diametralmente opostos. A expressão “soma zero” deriva dos jogos de salão, como o pôquer, em que não se cria nem se destrói riqueza.(DAVIS, 1973,p. 26).

Os jogos de soma zero se distinguem dos jogos de soma não-zero, pois neste, o que um jogador perde pode não ser necessariamente o que o outro jogador ganha, ambos os jogadores podem ganhar ou perder.

Nos jogos de soma não-zero, além da matriz de resultados, há outras “regras do jogo” que afetam acentuadamente o caráter do jogo e, essas regras devem ser explicitadas antes que se possa falar inteligentemente a respeito da situação. (DAVIS, 1973, p. 88)

Nos jogos de soma zero, os jogadores não têm interesses em comum. A maioria dos jogos de tabuleiro, incluindo a Dama e o Xadrez, são jogos de soma zero.

	A	B
A	(3,-3)	(-2,2)
B	(-2,2)	(3,-3)

Tabela 2 - Jogo de soma zero

1.2. Jogos simultâneos e jogos seqüenciais

Jogos simultâneos são aqueles em que as escolhas das estratégias acontecem ao mesmo tempo, ou se eles não se movem simultaneamente, ao menos os jogadores desconhecem previamente as ações de seus adversários (tornando-os efetivamente simultâneos), sendo de preferência representados pela forma estratégica ou normal. Neste jogo, os jogadores não se preocupam com as conseqüências futuras de suas escolhas.

Nos jogos simultâneos não existem informações dos eventuais desdobramentos futuros sobre as escolhas dos jogadores, porém, muitas vezes, os processos de interação se desenvolvem em sucessivas etapas. Sendo assim, os jogadores fazem suas escolhas refletindo sobre as escolhas do seu oponente em jogadas anteriores. Um jogo mais apropriado para este tipo de situação seria o jogo seqüencial.

Ronaldo Fiane define jogo seqüencial (ou dinâmico) como sendo:

> aquele em que os jogadores realizam seus movimentos em uma ordem predeterminada, ou seja, o próximo jogador tem conhecimento da jogada de seu antecessor, não há a necessidade de um conhecimento perfeito acerca de cada ação do jogador anterior, ele necessita de pouca informação.

Nos jogos seqüenciais finitos, a melhor forma de representação se dá pela forma estendida ou esquema de árvores.

1.3.Jogos cooperativos e jogos não-cooperativos

Os jogos cooperativos são aqueles em que a comunicação prévia é permitida entre os jogadores, antes de decidirem as estratégias que irão ser adotadas durante o jogo. Para ser eficiente, a comunicação precisa ser livre de distorção e sem qualquer custo para as pessoas que estão falando, isto é, a emissão de mensagens não implica em uma alteração direta da matriz original do jogo. Em um jogo inteiramente cooperativo, os jogadores têm interesses em comum.

Embora a comunicação favoreça a realização de cooperação, ela também proporciona espaço para imposição de coalizões, ameaças e blefes que perturbam a produção dos melhores resultados para cada uma das partes. Os jogos não-cooperativos são aqueles em que não há comunicação prévia permitida entre os jogadores.

1.4. Jogos de informação perfeita e jogos de informação imperfeita

Os jogos de estratégia podem ser estudados através de um conjunto de informações, podendo estas, serem informações perfeitas ou imperfeitas.

Em 1912, Ernest Zermelo, demonstrou no artigo "*Uber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels*" (Sobre uma Aplicação da Doutrina Mista à Teoria do Jogo de Xadrez) que os jogos finitos de informação perfeita são estritamente determinados. Esse trabalho ficou conhecido como *Teorema de Determinação Estrita*, significa dizer que um dos jogadores tem a seu alcance uma estratégia que, se escolhida, lhe garantirá a vitória, independentemente de como o adversário venha a se comportar.

> Um jogo é dito de informação perfeita quando todos os jogadores conhecem toda a história do jogo antes de fazerem suas escolhas. Se algum jogador, em algum momento do jogo, tem de fazer suas escolhas sem conhecer exatamente a história do jogo até ali, o jogo é dito informação imperfeita.
>
> (FIANE,2006, p. 61)

Nos jogos de informação perfeita, por meio de indução reversa, os jogadores podem conhecer toda história do jogo, antes de tomarem suas decisões. Todos os conjuntos de informação de uma árvore de jogo de informação perfeita são unitários, ou seja, cada parte sabe em qual nó de um jogo seqüencial está. Caso contrário, o jogo é chamado de informação imperfeita.

Fiani cita que a definição dos conjuntos de informação deve respeitar alguns critérios. Em primeiro lugar, os conjuntos de informação não podem conter nós que pertençam a jogadores diferentes ; em segundo lugar, os conjuntos de informação não podem conter nós em seqüência, e por último, os nós de um conjunto de informação não podem apresentar diferentes conjuntos de ação.

Alguns exemplos de jogos de informação perfeita são: o xadrez, o “jogo da velha” e o “go” japonês.

1.5. Jogos de informação completa e jogos de informação incompleta

Nestes jogos, os participantes têm conhecimento prévio do número de participantes, da posição que cada um ocupa em cada etapa do jogo e dos resultados que todos podem obter. Não tendo os jogadores, esse conhecimento, dizemos que é um jogo de informação incompleta.

A importância de se ter uma informação completa, é o fato de cada jogador saber exatamente com quem está jogando, pois sabe quais são os objetivos dos outros jogadores. (FIANE, 2006, p.81)

1.6. Jogos simétricos e jogos assimétricos

Um jogo é simétrico quando os pagamentos para os jogadores, na adoção de determinada estratégia, dependem somente da estratégia escolhida, e não de quem está jogando, ou seja, se os jogadores trocarem de posição, os ganhos do primeiro passam para o segundo; os destes, para o terceiro; os do terceiro, para o quarto e assim sucessivamente até que os ganhos do último jogador passem para o primeiro. Alguns exemplos de jogos simétricos são o Jogo da Galinha, Dilema do Prisioneiro e Caça ao Veado, que serão vistos no decorrer deste trabalho.

Nos jogos assimétricos, existem estratégias diferentes para cada jogador. Um exemplo desse tipo de jogo seria o Jogo do Ultimato e seu similar Jogo do Ditador, nesses jogos, os jogadores têm estratégias diferentes.

1.7.Jogos repetitivos

Também, chamados superjogos, exigem que as mesmas opções de estratégias sejam exibidas em rodadas sucessivas, nas quais os jogadores têm de decidir novamente se mantêm suas escolhas anteriores ou trocam de alternativa. Nos superjogos, a memória exerce um papel crucial na construção de um equilíbrio que se torna muito difícil quando as ações dos jogadores não são plenamente recordadas ou são perturbadas pelo acaso. Os superjogos servem de base aos modelos de simulação utilizados em larga escala pela biologia, ciência da computação e ciências, em geral.

2. O Teorema Minimax

O teorema minimax assegura que se pode atribuir a cada jogo finito, de duas-pessoas, soma-zero um valor V: quantia média que o jogador I pode esperar ganhar do jogador II, se ambos atuarem sensatamente. Von Neumann julgava plausível esse resultado previsto, com base em três razões:

> 1. Há uma estratégia que o jogador I pode adotar e que lhe assegurará a vantagem referida; contra essa estratégia, nada que o jogador II possa fazer impedirá o jogador I de ganho médio igual a V. Conseqüentemente, o jogador I não se contentará com nada menor que V.
> 2. Há uma estratégia que o jogador II pode adotar e que lhe assegurará não perder mais que a quantia média de V; em outras palavras, o jogador I pode ser impedido de ganhar mais do que V.
> 3. Por presunção, trata-se de um jogo soma-zero; o que o jogador I ganhar deverá ser o que o jogador II perca. Como o jogador II deseja reduzir ao mínimo suas perdas, o jogador II está motivado para fazer com que o ganho médio do jogador I se limite a V.
>
> DAVIS, 1973, p. 55

Jogador II - coluna

Jogador I linha	1	2	...	n		
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	$\min\limits_{j} a_{1j}$	
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	$\min\limits_{j} a_{2j}$	
:	:	:	a_{ij}	:	:	$\max\limits_{i}\min\limits_{j} a_{ij}$
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	$\min\limits_{j} a_{mj}$	
	$\max\limits_{i} a_{i1}$	$\max\limits_{i} a_{i2}$	...	$\max\limits_{i} a_{in}$		

$$\min_{j}\max_{i} a_{ij}$$

A primeira etapa para resolução de um jogo matricial consiste em verificar a existência de um ponto de sela. Através da existência de um ponto de sela, podemos encontrar o resultado de um jogo. A verificação de um ponto de sela é usualmente efetuada, escrevendo-se o mínimo de linha ao lado de cada linha e o máximo de coluna na base de cada coluna, determinando o máximo dos mínimos e o mínimo dos máximos. Um ponto de sela pode ser também determinado testando-se um elemento simultaneamente o mínimo da linha na qual ele ocorre e o máximo da coluna na qual ele ocorre. Essa resolução do jogo é baseada no princípio “melhor dos piores “

Quando um jogo possui um ponto de sela diz-se que este jogo é estritamente determinado. O resultado de um jogo estritamente determinado é o valor de seu ponto de sela.

Em um jogo de soma nula e dois jogadores em que Minmax=Maxmin, possui um ponto de sela (ponto ótimo), a este ponto correspondem às estratégias ótimas. O ponto é ótimo, pois nenhum jogador mudará sua estratégia, uma vez que o resultado será pior caso o outro jogador mantenha a estratégia.

3.Equilíbrio de Nash

O equilíbrio de Nash se refere à análise que cada jogador faz das melhores respostas que o outro jogador dá às ações do primeiro.

> Nash definiu equilíbrio como uma situação em que nenhum jogador poderia melhorar sua posição escolhendo uma estratégia alternativa disponível, sem que isso implique que a melhor escolha feita particularmente por cada pessoa levará a um resultado ótimo.Ele provou que para uma determinada categoria muito ampla de jogos com qualquer número de jogadores, existe pelo menos um ponto de equilíbrio – desde que sejam permitidas estratégias mistas. Mas alguns jogos têm muitos pontos de equilíbrio e outros, aqueles relativamente raros que não se enquadram na categoria que ele definiu, talvez não tenham nenhum.
>
> NASAR, 2002, p.122.

3.1.Dilema do Prisioneiro

Este jogo foi concebido em parte na Rand em 1950, alguns meses antes da chegada de John Nash, por Merrill Flood e Melvin Dresher, dois matemáticos da empresa. A história real dos prisioneiros usada para ilustrar a importância do jogo foi inventada pelo mentor de Nash em Princeton, Albert W. Tucker, que a usou para explicar do que se tratava a Teoria do Jogo para uma platéia de psicólogos de Stanforf (NASAR, 2002, p. 147)

O Dilema dos Prisioneiros foi inspirado pelo resultado do equilíbrio de Nash, conforme cita Silvia Nasar.

O Dilema dos Prisioneiros é a situação em que a polícia prende dois comparsas, João e Maria, por suspeitar que eles cometeram um crime grave, mas tem provas insuficientes para condená-los por este crime, mas pode deixá-los na prisão por um crime menor. Levados à delegacia e colocados em celas separadas, o promotor oferece a ambos o mesmo acordo; se um dos prisioneiros testemunhar para a procuradoria contra o outro e o outro permanecer calado, o traidor pega apenas dois anos de cadeia e o seu cúmplice, se não o trair, pega oito anos de cadeia.

Se ambos ficarem em silêncio, podem ser condenados somente a quatro anos de prisão cada um. Se ambos traírem o comparsa, cada um leva seis anos de prisão.

As decisões são simultâneas e um não sabe nada sobre a decisão do outro. O Dilema dos Prisioneiros mostra que, em cada decisão, o prisioneiro pode satisfazer o seu próprio interesse (trair) ou atender ao interesse do grupo (cooperar). Apresentamos abaixo os possíveis resultados :

		João	
		Confessa	Não confessa
Maria	Confessa	6 anos para Maria 6 anos para João	2 ano para Maria 8 anos para João
	Não confessa	8 anos para Maria 2 ano para João	4 anos para Maria 4 anos para João

Tabela 3 -Forma normal ou estratégica

É importante salientar que as decisões de ambos são estritamente racionais, não havendo nenhuma interferência de ordem afetiva, moral ou religiosa. Assim, podemos fazer as considerações (lógico-matemáticas) que cada prisioneiro faz sobre sua situação.

Em primeiro lugar, a opção mais interessante parece ser a cooperação recíproca, Maria e João não confessam, pegando cada um deles quatro anos de prisão, mas...

Mas se eu sou a Maria e penso que o João não vai confessar, eu me saio melhor confessando (traindo), minha confissão (trair o João), aconteceria simultaneamente à cooperação de João (não confessa), resultando um melhor pagamento para mim. Da mesma forma...

Se eu me coloco no lugar de João e penso que é a Maria quem não vai confessar (não trai), eu, João confesso e pego somente dois anos de prisão, ao passo que Maria pega oito anos de prisão. Mas, também...

Se eu (Maria ou João) penso o oposto e acredito que o outro vai confessar, eu não posso ficar calado (não confessar), pois, assim, eu é que vou ficar oito anos na prisão, enquanto o outro fica apenas dois.

Von Neumann e Morgenstern propuseram um modelo matemático interativo, que os levariam a descrição acima. Mas Nash resolveu este problema propondo:

Se eu (Maria ou João) achar que meu cúmplice pensa exatamente como eu, concluo que ele vai confessar, o que me leva a um impasse. Na prática, eu só posso confessar! E é efetivamente o que acontece, ambos confessam e passam seis anos presos. A isso, chama-se equilíbrio de Nash : a melhor decisão possível levando-se em conta a decisão que o outro deve tomar.

A questão que o dilema propõe é: o que vai acontecer? Como o prisioneiro vai reagir? Os prisioneiros confiarão no seu cúmplice e negarão o crime, mesmo correndo o risco de serem colocados numa situação ainda pior, ou confessarão , apesar de que, se o outro fizer o mesmo, ambos ficarão numa situação pior do que se permanecessem calados?

Nesse jogo, não importa os valores das penas, mas o cálculo das vantagens de uma decisão cujas conseqüências estão atreladas às decisões de outros agentes, em que confiança e traição fazem parte da estratégia do jogo.

No jogo, quando cada pessoa persegue seu próprio interesse particular, ela não promove, necessariamente, o melhor interesse da coletividade (NASAR, 2002 p. 148).

A teoria de Nash previa que os dois jogadores escolhessem suas estratégias dominantes, embora obtivessem um resultado melhor se escolhessem as estratégias dominadas.

De nada adianta um dos prisioneiros prometer ficar calado se o outro também ficar, pois sua estratégia estritamente dominante está na deserção. Apenas quando rodadas sucessivas do Dilema dos Prisioneiros são permitidas é que a comunicação poderia servir para alinhar os interesses contrários em torno da cooperação mútua, mas isso envolve outros fatores típicos da iteração do jogo. No Dilema dos Prisioneiros, a comunicação pode ajudar no aparecimento da cooperação, sem a necessidade de firmar acordos, apenas pela implementação de ações de reciprocidade.

A previsão da Teoria dos Jogos e do equilíbrio de Nash era que jogadores racionais egoístas optassem sempre por uma estratégia dominante quando esta existisse, independente do que o outro fizesse. No Dilema dos Prisioneiros, as duas partes possuem estratégias desse tipo e o resultado esperado é a deserção mútua e a punição com a condenação dos dois presos pelo crime mais grave, ao invés de uma pena leve relativa ao delito pelo qual foram capturados. A partir da interface policial montada por Albert Tucker, logo se compreendeu que o Dilema dos Prisioneiros poderia ser a estrutura simplificada de uma série de interações entre pessoas, empresas e até mesmo nações, em larga escala.

CAPÍTULO V

1. Determinação do resultado de um jogo

Neste trabalho, discutiremos somente as soluções de jogos com dois jogadores, quando a matriz de pagamentos é de dimensão 2 x *n* ou *m* x 2.

1.1. Método minimax e maximin

Nos jogos de soma zero com duas pessoas, podemos encontrar a solução pelo método minimax, para tanto é necessário que primeiro sejam definidos os padrões de comportamento dos dois jogadores. A Teoria dos Jogos supõe que os jogadores vão agir de forma racional. Para determinação do resultado, exemplificamos o problema da Campanha Publicitária.

Problema: Campanha Publicitária

Duas empresas A e B, vendem duas marcas de perfume. A empresa A pode anunciar seu produto no rádio (estratégia A_1) , na televisão (estratégia A_2) ou no jornal (estratégia A_3).

A empresa B pode anunciar o seu produto no rádio (estratégia B_1), na televisão (estratégia B_2), no jornal (estratégia B_3), ou via e-mail (estratégia B_4)

A matriz de resultados abaixo resume a porcentagem de mercado ganho ou perdido pela empresa A.

		Empresa B			
		B_1	B_2	B_3	B_4
	A_1	10	0	11	-1
Empresa A	A_2	8	7	8	10
	A_3	0	6	-7	7

Tabela 4

Se a empresa A anunciar no jornal (A_3) e a empresa B anunciar via e-mail (B_4), a empresa A ganha 7% e a empresa B perde 7% da quota do mercado.

Solução:

Nesse tipo de jogo, a empresa A ignora os planos da empresa B então, ela pode proceder da seguinte maneira: (1) determinar o menor pagamento que ela pode receber em cada uma de suas próprias estratégias (o mínimo de cada linha de A) e (2) escolher uma estratégia (linha) que possui o mais alto mínimo. Sendo assim:

Se a empresa A escolher a estratégia A_1, então, independentemente da escolha de B, o pior que pode acontecer é perder 1% do seu mercado e se, escolher a estratégia A_3, o pior que pode acontecer é ela perder 7% de seu mercado para a empresa B.

		Empresa B					
		B_1	B_2	B_3	B_4	Min Linha	
Empresa A	A_1	10	0	11	-1	-1	
	A_2	8	7	8	10	7	→ Maxmin
	A_3	0	6	-7	7	-7	

Tabela 5

Portanto, a empresa A deve escolher a estratégia A_2 pois representa o melhor dos piores resultados para ela.

Como a matriz apresenta os resultados para a empresa A, a empresa B deve seguir o princípio “pior entre os melhores”.

		Empresa B			
		B_1	B_2	B_3	B_4
Empresa A	A_1	10	0	11	-1
	A_2	8	7	8	10
	A_3	0	6	-7	7
	Max coluna	10	7	11	10

Tabela 6

Minmax

A empresa B deve escolher a estratégia B_2 pois representa o menor dos melhores resultados da empresa A.

A solução ótima do jogo é que as duas empresas devem anunciar o seu produto na televisão (estratégias A_2 e B_2). O resultado está a favor da empresa A que ganha 7% da quota de mercado.

		Empresa B				
		B_1	B_2	B_3	B_4	Min Linha
Empresa A	A_1	10	0	11	-1	-1
	A_2	8	7	8	10	7
	A_3	0	6	-7	7	-7
	Max coluna	10	7	11	10	

Tabela 7

Minmax=Maxmin

1.2. Método da eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas.

Um dos métodos utilizados para determinar o resultado de um jogo, é chamado método de *eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas.* Dado que a matriz das recompensas é de conhecimento comum, os jogadores podem desconsiderar as estratégias cujas recompensas são menores que outras.

O jogo que iremos apresentar é originário do livro de Peter Ordershook (1992:111 apud Bêrni 2004:59)

Na representação de recompensas do jogo abaixo, temos a determinação de pagamentos da jogadora Ana, em primeiro, separados por vírgula dos pagamentos do jogador Beto que está representado em segundo.

		Jogador Beto			
	Estratégias	b_1	b_2	b_3	b_4
Jogadora Ana	a_1	(3,3)	(2,2)	(4,3)	(3,4)
	a_2	(2,0)	(1,3)	(0,2)	(2,0)
	a_3	(3,4)	(4,2)	(2,2)	(0,3)
	a_4	(4,3)	(2,1)	(3,1)	(4,2)

Tabela 8 - Jogo com estratégias dominadas

Se for feita uma comparação elemento por elemento entre as linhas e entre as colunas da matriz, podemos perceber que Beto não tem nenhuma estratégia dominada, mas Ana tem, pois a estratégia a_1 será sempre melhor que a estratégia a_2 , independente de Beto escolher b_1, b_2 , b_3 , b_4, pois ela estará ganhando mais. Então, podemos eliminar a estratégia a_2, ficando com o jogo:

		Jogador Beto			
	Estratégias	b_1	b_2	b_3	b_4
Jogadora Ana	a_1	(3,3)	(2,2)	(4,3)	(3,4)
	a_3	(3,4)	(4,2)	(2,2)	(0,3)
	a_4	(4,3)	(2,1)	(3,1)	(4,2)

Tabela 9 - Eliminação da estratégia a_2 de Ana

Analisando o jogo agora, para qualquer estratégia de Ana, Beto não jogará b_2, pois a estratégia b_1 a domina totalmente. Então, iremos eliminar a estratégia b_2 e teremos:

		Jogador Beto		
	Estratégias	b_1	b_3	b_4
Jogadora Ana	a_1	(3,3)	(4,3)	(3,4)
	a_3	(3,4)	(2,2)	(0,3)
	a_4	(4,3)	(3,1)	(4,2)

Tabela 10 - Eliminação da estratégia b_2 de Beto

A figura mostra claramente que a_3 é dominada por a_4 , ao mesmo tempo que b_3 também é dominada por b_4 , o que reduz ainda mais o jogo para o quadro abaixo.

		Jogador Beto	
	Estratégias	b_1	b_4
Jogadora Ana	a_1	(3,3)	(3,4)
	a_4	(4,3)	(4,2)

Tabela 11 - Eliminação das estratégias a_3 de Ana e b_3 de Beto.

Agora a estratégia a_4 de Ana domina a_1 , apresentando a situação em que se percebe que Beto deve escolher b_1 , ganhando 3, contrastando com b_4 que ganharia 2. Assim, o jogo original, como diz Bêrni, reduz-se a uma escolha a ser feita por Beto.

		Jogador Beto	
	Estratégias	b_1	b_4
Ana	a_4	(4,3)	(4,2)

Tabela 12 - Ana não tem escolha

Bêrni cita que pode ocorrer um problema ao tentar encontrar a solução do jogo por meio da eliminação das estratégias fracamente dominadas, pois estas, podem conter o equilíbrio de Nash.

Para este tipo de solução de jogos, uma estratégia dominada não necessita ser inferior em todos os seus elementos, pois, na medida que uma estratégia qualquer não é melhor nem pior que a outra, ela pode ser considerada dominada. Entretanto, quando uma estratégia possui alguns elementos maiores, mas alguns menores do que os elementos correspondentes de uma outra estratégia, nenhuma delas domina a outra.

1.3. Método gráfico

Podemos encontrar a solução do jogo através do método gráfico.Para essa solução, utilizaremos os dados apresentados no jogo o Dilema dos Prisioneiros, conforme a tabela abaixo:

		João	
		Confessa	Não confessa
Maria	Confessa	6,6	2,8
	Não confessa	8,2	4,4

Tabela 13

Para visualizar o jogo Dilema dos Prisioneiros na forma gráfica, colocamos seus pagamentos num sistema de eixos cartesianos em que p_J informa os pagamentos de João apresentados no eixo vertical e p_M mostra os pagamentos de Maria, assinalados no eixo horizontal. Em seguida, plotamos cada um dos quatro pontos, unindo-os, fechamos os contornos de um paralelogramo com as equações das retas:

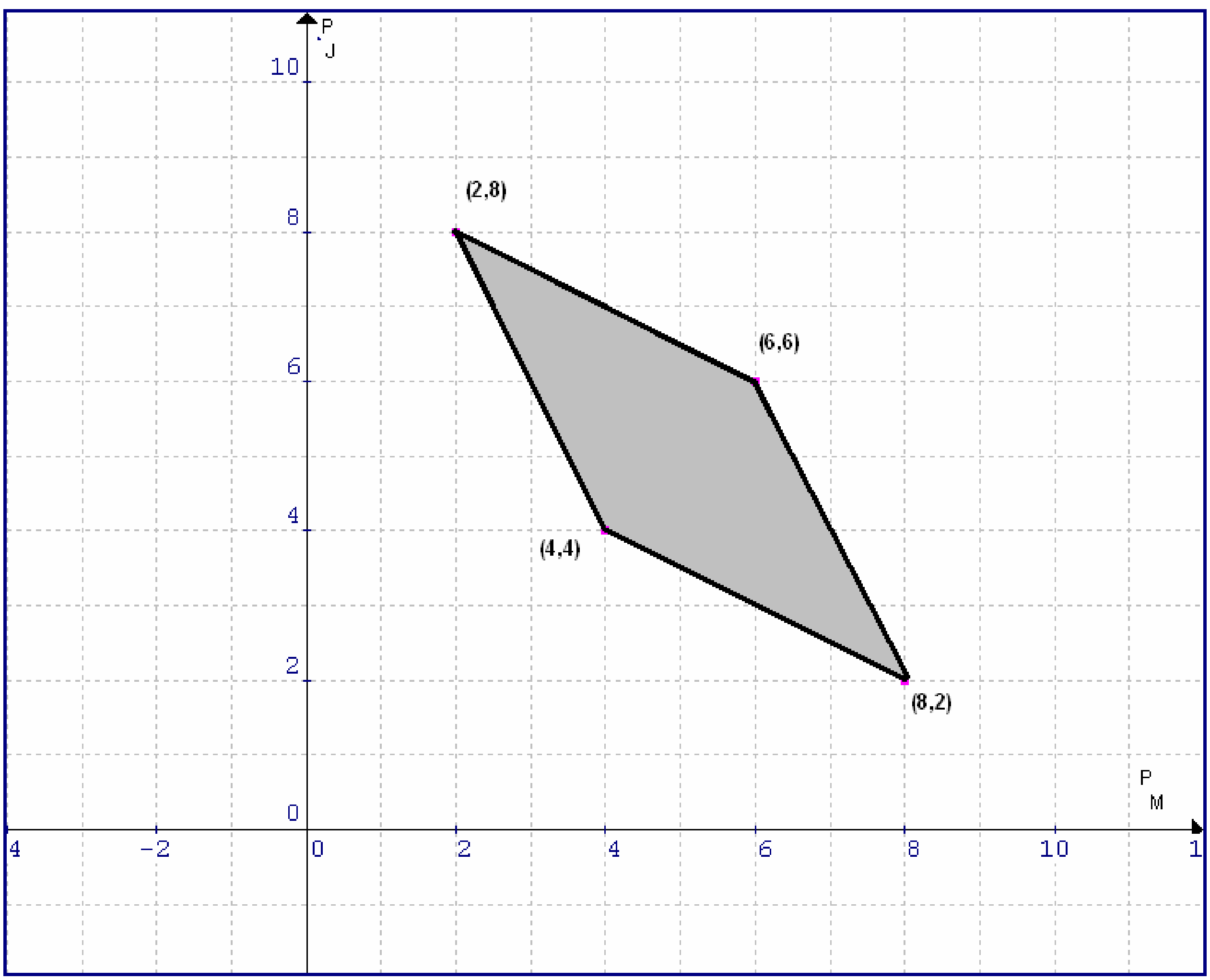
$$p_J = -\frac{1}{2}p_M + 9$$

$$p_J = -2p_M + 18$$

$$p_J = -\frac{1}{2}p_M + 6$$

e

$$p_J = -2p_M + 12$$



Os pontos situados fora da área do paralelogramo ou são inacessíveis ou são indesejáveis por Maria e João. No caso dos pontos inacessíveis, temos como exemplo o ponto (0,0) origem do sistema, em que os dois sairiam livres da cadeia. No segundo caso, para os pontos indesejáveis, temos como exemplo o ponto (9,10) em que Maria pegaria nove anos de prisão e João pegaria dez anos. Porém, podemos analisar alguns pontos situados sobre as partes relevantes das quatro retas.

Só faz sentido João não confessar, se ele tiver certeza de que Maria não vai confessar. Mas, infelizmente, raramente temos certeza sobre alguém ou algo. Em seu livro, Bêrni escreve que *"as certezas factuais dependem da interpretação dos fatos, enquanto mesmo, as verdades lógicas podem ser objetos de mal-entendido*". Assim, se nenhum confessa, eles podem ser responsabilizados somente pelo crime menor e cada um deles pega quatro anos de cadeia.

1.4. Solução do jogo para matriz de pagamento que não contém ponto de sela.

Veremos agora, como proceder para encontrar a solução para jogos que não possuem nenhum ponto de sela em sua matriz de pagamentos.

Consideremos um jogo com a seguinte matriz de pagamentos:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Podemos verificar que o maximin do jogador 1 é $a_{21} = 3$ e o minimax do jogador 2 é $a_{22} = 4$. Portanto, não existe ponto de sela. A estratégia ótima dos dois jogadores é a segunda estratégia de cada um ; mas se os dois jogadores adotassem essas estratégias, o resultado seria um pagamento $a_{22} = 4$ para o jogador 1, embora ele esperasse um pagamento de 3 ao invés de 4. Dessa forma, ele continuará utilizando a segunda estratégia pois estará sempre ganhando mais do que o esperado, mas o jogador 2 irá logo perceber e mudará para a estratégia 1, diminuindo o pagamento para o jogador 1. Desta forma, o jogador 1 irá também mudar para a estratégia 1, o que aumentará seu pagamento para 5 , combinado com a estratégia 1 do jogador 2. Isso causará uma nova mudança de estratégia por parte do outro jogador em sucessivas rodadas.

Para este tipo de jogo, é preciso que os jogadores evitem usar a mesma estratégia em jogadas sucessivas, devem adotar então estratégias mistas.

Supondo que o jogador 1 decida utilizar a estratégia 1 em 25 vezes de um total de 40 e a estratégia 2 nas outras 15 vezes, mas que a seqüência exata dessas jogadas não seja conhecida, podemos representar a freqüência relativa desejada da i-ésima estratégia pelo símbolo x_i . Assim, no nosso exemplo temos:

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{25}{40}, \frac{15}{40}\right) = \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right),$$

em que x_i, é um número entre 0 e 1, tendo as freqüências relativas as propriedades:

$$x_i \geq 0 \text{ e } \sum_i x_i = 1$$

Durante o jogo, se o jogador 2 utilizar somente a estratégia 1 na forma pura, o jogador 1 deve obter um pagamento de 5 em cinco oitavos de todas as jogadas e um pagamento de 3 em três oitavos do jogo. Assim sendo, o pagamento esperado por jogada (E) deve ser a média ponderada.

$$E_1 = \frac{5}{8}(5) + \frac{3}{8}(3) = \frac{17}{4} \ ,$$

em que o subscrito em E_1 indica que o jogador 2 irá usar somente a estratégia 1.

Da mesma maneira, se o jogador 2 utilizar somente a estratégia 2 na forma pura. Podemos calcular o pagamento esperado pelo jogador 1.

$$E_2 = \frac{5}{8}(2) + \frac{3}{8}(4) = \frac{11}{4}.$$

Porém, se o jogador 2 também misturar as suas estratégias, o pagamento esperado do jogador 1 estará entre as duas médias ponderadas acima. Mas podemos supor uma segunda escolha de estratégias. Se o jogador 1 decidir agora, que irá utilizar uma outra escolha de estratégias, na seguinte forma:

$$(x_1^{'}, x_2^{'}) = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right),$$

nesse caso, os pagamentos esperados são:

$$E_1^{'} = \frac{2}{5}(5) + \frac{3}{5}(3) = \frac{19}{5}$$

$$E_2^{'} = \frac{2}{5}(2) + \frac{3}{5}(4) = \frac{16}{5}$$

Analisando os resultados; no segundo caso, o pagamento mínimo esperado $E_1^{'}$ pelo jogador 1 é melhor que o pagamento esperado E_1, mas não existe garantia que essa é a melhor escolha a ser feita pelo jogador 1. Empregamos então o princípio do maximin ao pagamento esperado ao invés de utilizar o princípio nas entradas da matriz de pagamento.

Podemos encontrar uma solução gráfica para encontrar a estratégia mista de maximin para o jogador 1.

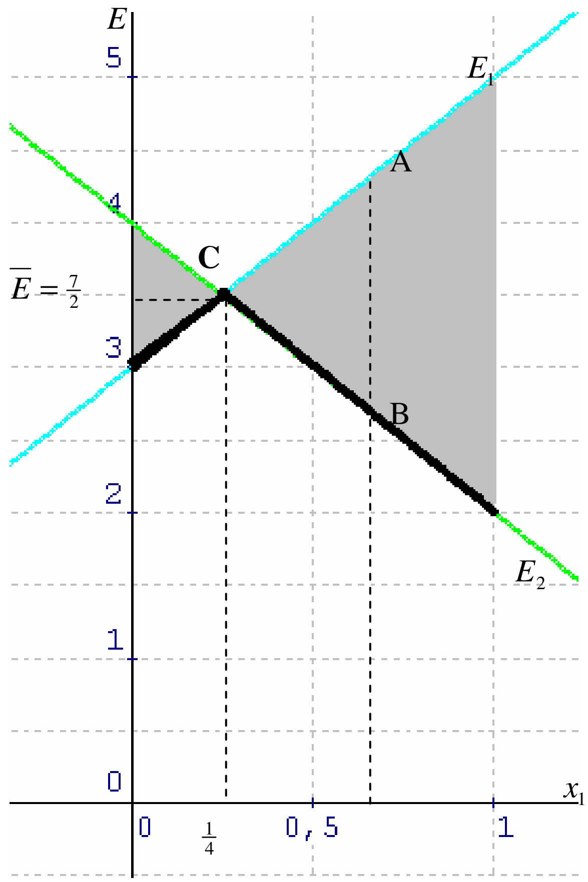
Devemos achar os valores ótimos das duas variáveis x_1 e x_2, sabemos que $x_1 + x_2 = 1$, portanto, basta encontrar o valor de $\overline{x_1}$ que encontraremos o valor de $\overline{x_2} = 1 - \overline{x_1}$, assim, podemos representar a variável E (pagamento esperado) contra a variável independente x_1.

No exemplo dado, a matriz de pagamentos $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ terá representado os seus pagamentos esperados, E_1 e E_2 em termos das freqüência relativas x_1 e $(1 - x_1)$:

$$E_1 = x_1.5 + (1 - x_1).3 = 2x_1 + 3$$

e

$$E_2 = x_1.2 + (1 - x_1).4 = -2x_1 + 4$$



As duas representações E são expressas como uma função linear de x_1. Para qualquer valor que x_1 escolha na linha E_1, podemos encontrar o pagamento esperado. O ponto A, por exemplo, indica o pagamento esperado do jogador 1, quando o jogador 2 adota a estratégia pura 1, e o ponto B na linha E_2 indica o pagamento esperado quando o jogador 2 utiliza a estratégia 2 puramente. A área sombreada mostra o conjunto de todos os pagamentos esperados possíveis. Pelo princípio do maximin, o jogador 1 deve definir o conjunto de todos os pagamentos mínimos possíveis, ou seja, o conjunto dos pontos situados na fronteira inferior da área sombreada. Como podemos observar, o máximo é o ponto C.

Como a intersecção das linhas E_1 e E_2 é o ponto C, podemos obter o valor da solução de x_1 igualando E_1 e E_2. Assim teremos:

$$2x_1 + 3 = -2x_1 + 4$$

$$\overline{x_1} = \frac{1}{4}$$

Podemos, então, encontrar os valor ótimo de x_2 e E:

$$\overline{x_2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\overline{E}(\overline{E_1}) = 2x_1 + 3 = \frac{7}{2}$$

Encontramos então, a estratégia ótima, $\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

Nessa representação gráfica, podemos também encontrar a estratégia mista ótima do jogador 2. Aplicando o princípio do minimax, ele deve achar um par de freqüências relativas para as suas estratégias $\left(y_1, y_2\right)$, com as propriedades

$$y_j \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_j y_j = 1$$

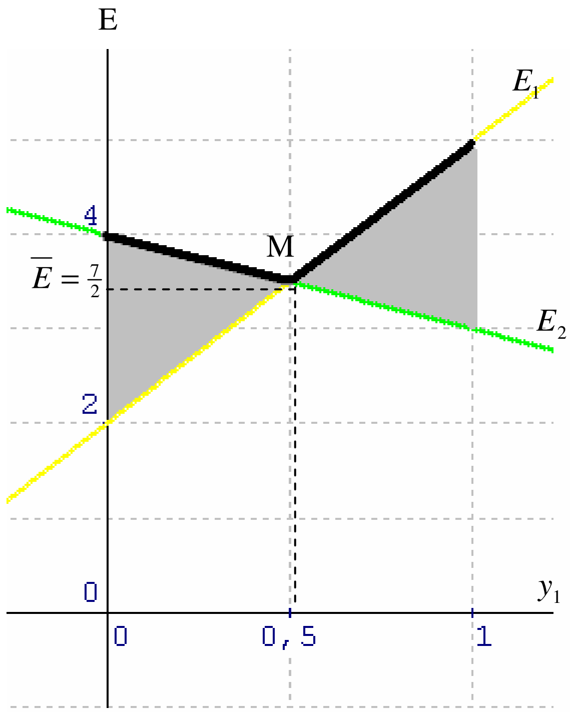
que minimizem os pagamentos máximos esperados pelo jogador 1.

Podemos, novamente, escrever os pagamentos esperados E_1 e E_2 para o jogador 2, em termos das freqüências relativas y_1 e $(1 - y_1)$, determinando:

$$E_1 = y_1.5 + (1 - y_1).2 = 3y_1 + 2$$

e

$$E_2 = y_1.3 + (1 - y_1).4 = -1y_1 + 4$$



De acordo com o princípio minimax, o jogador 2 precisa primeiro definir o conjunto de pagamentos máximos esperados pelo jogador 1 e que correspondem a todos os valores possíveis de y_1, no intervalo [0,1]. A fronteira superior da área sombreada representa esse conjunto. Logo, o mínimo desse conjunto ocorre no ponto M. A intersecção entre E_1 e E_2, nos permite igualar as freqüências relativas e encontrar o valor de $\overline{y_1}$ e $\overline{y_2}$:

$$3y_1 + 2 = -1y_1 + 4$$

$$\overline{y_1} = \frac{1}{2}$$

e

$$\overline{y_2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Então,

$$\overline{E}(=\overline{E}_1) = 3y_1 + 2 = \frac{7}{2}$$

Portanto, se o jogador 2 adotar a estratégia mista ótima $(\overline{y_1}, \overline{y_2}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, ele pode manter o pagamento esperado do jogador 1 em no máximo $\frac{7}{2}$ por jogada em rodadas repetidas do jogo, independente do que o jogador 1 faça. Podemos perceber que o valor do minimax do pagamento esperado pelo jogador 1 e o valor maximin esperado são o mesmo.

2. Tipos de jogos

Além do jogo Dilema dos Prisioneiros um dos mais populares na Teoria dos Jogos, há, também, outros que são bastante utilizados na teoria, neste capítulo, iremos apresentar alguns deles.

2.1. Batalha dos sexos

Um casal decidiu que iria, naquela noite, ao cinema ou ao jogo de futebol. O marido, João e a mulher, Maria, preferem ir juntos a ir sozinhos. Embora João prefira ir com Maria ao futebol, preferiria ir com ela ao cinema do que ir sozinho ao futebol. Da mesma forma, a primeira preferência de Maria é a de irem juntos ao cinema, mas ela também preferiria ir ao jogo de futebol com João do que ir sozinha ao cinema. A matriz que representa esse jogo é apresentada na tabela abaixo. Os resultados refletem a ordem das preferências dos jogadores.

	João	
Maria	Futebol	Cinema
Futebol	(2,3)	(1,1)
Cinema	(1,1)	(3,2)

Tabela 14 - Batalha dos Sexos

Na Batalha dos Sexos, a melhor recompensa seria ambos escolherem o mesmo programa, mesmo que Maria prefira ir ao cinema a ir ao jogo de futebol, e João prefira ir ao futebol ou ao cinema. Mas, nenhum dos dois quer ir ao seu programa preferido sozinho, assim, João prefere ir ao cinema com Maria a ir ao futebol sozinho e Maria prefere ir ao futebol com João a ir sozinha ao cinema.

Este jogo possui dois equilíbrios de Nash: (futebol, futebol) e (cinema, cinema).

> O jogo batalha dos sexos serve como representação geral daquelas situações de interação estratégica em que os jogadores ganham sempre que coordenam suas decisões, mas têm preferências distintas sobre que tipo de coordenação deve ser adotada.
>
> FIANE, 2006, p. 110

2.2.Tragédia dos comuns

A Tragédia dos Comuns, também conhecida como "tragédia dos baldios", pois teve sua origem no estudo do uso da terra por pastores da Idade Média.

> Naquela época, propriedade privada era coisa rara. Havia terrenos baldios onde os criadores de gado podiam levar seus rebanhos para pastar livremente. Mas, como todos sabem, existe um limite para colocar um rebanho em uma determinada área. A partir de um certo número de cabeças, o pasto se torna escasso, e o gado passa a não engordar, e pode até morrer. Para cada pastor individualmente, porém, sempre é vantajoso colocar mais cabeça no terreno, mesmo que, em determinado momento, todo o grupo saia prejudicado. E se ele não colocar sua vaquinha adicional, outros irão fazê-lo, então...
>
> MARINHO, 2005, p 30

A tragédia dos comuns é uma boa aplicação da Teoria dos Jogos porque reflete o comportamento "instintivo" e mostra que o comportamento humano pode ser representando pelas equações matemáticas dessa teoria. Ela aponta para um alto benefício individual contra um baixo custo para cada membro da comunidade.

Toda a política de proteção ao meio ambiente tem um mecanismo contra a "tragédia dos comuns".

2.3. Pedra, papel, tesoura

Neste jogo, originário do Japão, quem escolhe a estratégia “pedra” (mão fechada) quebra “tesoura” (dedos indicador e médio abertos), empata com “pedra” e perde de “papel” (mão aberta). “Papel” cobre “pedra”, empata com “papel” e perde de “tesoura”, que corta “papel”, empata com “tesoura” e perde de “pedra”.

		Jogador B		
		Pedra	Papel	Tesoura
Jogador A	Pedra	0	-1	1
	Papel	1	0	-1
	Tesoura	-1	1	0

Tabela 15 – Pedra, papel, tesoura

O jogo de pedra , papel, tesoura, é um jogo de soma zero. Não é um jogo estritamente determinado por ser simultâneo e, portanto, de informação imperfeita, pois, qualquer estratégia que venha a ser adotada pode ser vencida por uma outra adequada do adversário. Ambos escolhem suas ações ao mesmo tempo, sem saber qual será a decisão do outro, o que torna impossível uma solução usando apenas as estratégias puras. Não há, uma estratégia dominante, ponto de sela, ou equilíbrio entre as opções dos jogadores nessa circunstância.

2.4. Jogo chicken (jogo da galinha): Ou competição destrutiva

O jogo “chicken” é uma representação de uma competição entre os adolescentes norte-americanos na década de 1950, representada no cinema, no filme *Rebelde sem Causa* (Rebel without a cause-1955) protagonizado por James Deane e dirigido por Nicholas Ray e o filme *Footloose* (1984), com Kevin Bacon e dirigido por Herbert Ross.

Nesse jogo, temos dois adolescentes, João e Pedro, que dirigem seus carros em alta velocidade um em direção ao outro. O objetivo é identificar quem desviará primeiro: este será o covarde ou “galinha”. O que não desviará será o durão.

Se ambos desviarem ao mesmo tempo, ninguém perde o jogo, mas se ambos forem “durões” e não desviarem, sofrerão um acidente gravíssimo, visto a alta velocidade dos carros, pondo em risco suas próprias vidas. As recompensas podem ser representadas na forma estratégica ou normal.

	Pedro	
João	Não Desvia	Desvia
Não Desvia	(-2,-2)	(2,-1)
Desvia	(-1,2)	(0,0)

Tabela 16 - Jogo da galinha

No jogo, a recompensa sobre as escolhas de ambos não desviarem é a pior possível, visto que o resultado seria o acidente , representado por um valor numérico somente para ordenar as preferências. Não tão ruim, seria desviar se o outro desvia, mas a preferência seria não desviar se o outro desvia.

Existem dois equilíbrios de Nash no jogo, (não desvia, desvia) e (desvia, não desvia).

> O jogo do “galinha” tem sido empregado não apenas para descrever situação no mundo econômico nas quais é melhor evitar o enfrentamento, como também foi muito popular na época da guerra fria entre os Estados Unidos e a antiga União Soviética, para descrever os riscos de um conflito termonuclear e a necessidade de mecanismos que evitassem o confronto.
>
> FIANE, 2006, p.113

2.5. Pôquer Simplificado

O pôquer tem apenas 150 anos. David Hayano (apud Bernstein) descreveu o pôquer como "*tramas secretas, fraudes monumentais, estratégias calculadas e crenças cegas com estruturas profundas e invisíveis... Um jogo para se experimentar, e não meramente observa*r".

No pôquer simplificado, só existem dois jogadores, João e Maria. Inicialmente, cada um coloca na mesa R$ 5,00, em seguida, escolhem uma carta que pode ser Ás (=um) ou dois. Nenhum dos jogadores conhece o resultado do outro.

João começa primeiro. Ele pode decidir passar ou apostar mais R$ 3,00. Se ele passar, os números obtidos pelos dois jogadores são comparados. O número maior permite recolher os R$ 10,00 que estão na mesa; se os números são iguais , cada um volta a retirar os seus R$ 5,00.

Se João apostar mais R$ 3,00, Maria poderá decidir ver ou desistir. Se desistir, João receberá os R$ 10,00, independente dos números obtidos. Se Maria decidir ver, ela acrescentará mais R$ 3,00 aos R$ 13,00 que estão na mesa. Os números são, então, comparados e quem tiver o número maior ganha os R$ 16,00; se houver empate, cada um recolhe o dinheiro que colocou. Nesse jogo, cada jogador dispõe de quatro estratégias. João pode decidir passar sempre (PP), pode passar com Ás (um) e apostar com 2 (PA), apostar com Ás e passar com 2 (AP) ou apostar sempre. Maria pode desistir sempre (DD), ver sempre (VV), ver com Ás e desistir com 2 (VD) e ver com dois e desistir com Ás (DV).

		Estratégias de Maria			
		DD	VV	VD	DV
Estratégias de João	PP	0	0	0	0
	AA	5	0	9/2	1/2
	PA	5/4	3/4	2	0
	AP	15/4	-3/4	5/2	1/2

Tabela 17

Com base nos resultados acima, notamos que AA domina PP e AP enquanto, DV domina VD e DD. Então, sempre que João obtiver 2 em sua jogada, deverá apostar; e sempre que Maria obtiver 2 em sua jogada deverá ver.

2.6. Jogo da Caça ao Cervo (stag hunt) : O Dilema do Contrato Social

O jogo da Caça ao Cervo é bastante utilizado pelos cientistas sociais que estudam contrato social.

O contrato social é um acordo entre os indivíduos de uma sociedade. Nesse contrato, os indivíduos definiriam seus direitos e deveres, ou seja, criariam um conjunto de regras, de forma a tornar possível a vida em sociedade. O contrato social parte do pressuposto de que os indivíduos irão respeitar as regras e o Estado será o encarregado de garantir o contrato social. O primeiro autor a escrever sobre contrato social foi o filósofo franco-suíço Jean-Jacques Rousseau (1712-1778), "embora Rousseau não tenha apresentado a situação que deu origem ao chamado jogo da caça ao cervo como um "jogo", e sim como um problema" (FIANE, 2006, p. 113)

Para que o cervo seja pego, é necessário que cada caçador ocupe sua posição no bosque e mantenha a atenção no cervo. Mas, ocorre também, que cada caçador pode aproveitar seu tempo para caçar uma lebre, muito mais fácil de caçar, podendo ser capturada por apenas um caçador. A lebre é uma caça de menor valor; uma lebre representa uma quantidade de carne bem menor que a metade de um cervo.

Se qualquer um dos caçadores, optar por caçar uma lebre, ele deixa seu posto de caça e o cervo escapa, mas o caçador que capturou a lebre não é obrigado a dividi-la com o outro caçador.

Supondo que metade de um cervo possui três vezes mais valor para os caçadores, podemos representar o jogo na forma normal ou estratégica.

	Caçador B	
Caçador A	Cervo	Lebre
Cervo	(3,3)	(0,1)
Lebre	(1,0)	(1,1)

Tabela 18 - Jogo da Caça ao Cervo

Se os caçadores permanecerem atentos, terão o cervo como recompensa, ou seja, cada um fica com a metade. Se qualquer um deles deixar seu posto para caçar uma lebre, o que ficou em seu lugar não ganha nada (ganho de 0) e o que caçou a lebre tem um ganho de 1, pois ele pegou a lebre. E, finalmente, se ambos deixarem seu posto para caçar a lebre, então cada um deles tem um ganho de 1, pois cada um pegou uma lebre.

No jogo da caça ao cervo

> "cada um sentia que para tanto devia ficar em seu lugar, mas, se uma lebre passava ao alcance de um deles, não há dúvida de que ele a perseguiria sem escrúpulos e, tendo alcançado sua presa, pouco se lhe dava faltar a dos companheiros".
>
> ROUSSEAU, apud FIANE, 2006, p. 114

Nesse jogo, há dois equilíbrios de Nash, deixar seu posto e cada um pegar uma lebre ou não deixar seu posto e pegar o cervo.

Conforme cita Fiane, o jogo da caça ao cervo representa, situações de interação estratégica em que o melhor resultado depende da cooperação de todos e se alguém buscar um resultado individual mais imediato, aqueles que se mantiverem fiéis ao compromisso inicial serão prejudicados.

> O jogo da caça ao cervo indica assim situações nas quais o melhor resultado para todos somente é conseguido quando todos acreditam que todos irão se esforçar de acordo com o compromisso original, em vez de buscar ganhos imediatos que podem prejudicar aqueles que se mantiverem fiéis ao que foi acordado inicialmente.
>
> FIANE, 2006, p. 114

2.7. Ultimato e Bens Públicos

O jogo do Ultimato foi projetado pelos economistas alemães Werner Güth, Rolf Schmittberger e Bernd Schwarze, em seu artigo intitulado “An Experimental Analysis of Ultimatum Bargaining (Uma análise experimental da negociação do ultimato) escrito em 1982.

> No modelo de Bens Públicos, seria a extensão do jogo Dilema dos Prisioneiros para dilemas sociais, onde mais de duas partes devem decidir cooperar ou não em um empreendimento comum. Com muito jogadores envolvidos, os Bens Públicos mostram a necessidade de se ter um instrumento para impedir que desertores permaneçam explorando a cooperação na ausência de uma punição direta pela retaliação recíproca entre as partes.
>
> SILVA, 2006, p. 168

No Ultimato, dois jogadores têm a chance de dividirem entre si a quantia de R$ 100, em notas. Mas, para isso, é preciso que o primeiro jogador, o líder, faça uma proposta ao segundo jogador de como repartir tal valor. Se este aceitar, o jogo termina e os ganhos serão distribuídos. Porém, caso a oferta seja recusada, os R$ 100 desaparecem e ambos ficarão sem nada.

O jogo do Ultimato, conforme afirma Silva (p. 170), vem sendo aplicado por neurologistas que buscam localizar na atividade cerebral as áreas responsáveis pelo processo de decisão – observado por meio de tomografia computadorizada. .

O jogo do Bem Público , assim como do Ultimato, serve para analisar respectivamente o papel de um mediador e da equipe nas escolhas das estratégias.

Em microeconomia, um bem público é definido como uma externalidade, cujos benefícios ou malefícios devem ser distribuídos igualmente entre todas as partes envolvidas no consumo de seu produto ou serviço. Aqui, externalidades são situações em que uma ação individual afeta diretamente os outros jogadores, resultando conseqüências que lhes são boas ou más em comparação com a condição anterior. Cada um pode atribuir um valor próprio a sua parte, mas esta é fornecida e utilizada da mesma maneira por todos os envolvidos. A poluição do meio ambiente, a urbanização da cidade e a segurança são exemplos de bem público.

A utilidade individual, diferente dos bens privados, depende necessariamente da utilidade dos outros participantes, isso é, ninguém decide sozinho a quantidade de bens que será obtida. Todos deverão consumir obrigatoriamente a mesma fração do bem público.

O uso coletivo de um bem público faz com que apareçam oportunistas que “pegam carona” no investimento que os outros fazem na aquisição de algo que pode ser consumido em comum. Quando um número de participantes de um bem público cresce, também aumenta a tendência de novos caronas surgirem.

3.Ramos de Aplicação da Teoria dos Jogos

Podemos encontrar a aplicação da Teoria dos Jogos em vários campos de estudos.

Em Economia, a Teoria dos Jogos, tem sido utilizada para analisar os fenômenos econômicos, incluindo leilões, barganhas, oligopólio, formação de rede social e sistemas de votação.

Na Ciência Política, a Teoria dos Jogos tem sido usada para explicar que a paz democrática ocorre do debate público e aberto da democracia que envia informações claras e confiáveis a respeito de sua opinião em relação a outros estados. Em contraste, existe a dificuldade de se conhecer as intenções de lideres não democráticos, o que afeta as concessões a serem feitas, e se as promessas serão mantidas.

Na Biologia, a Teoria dos Jogos encontrou grande receptividade na zoologia (comportamento animal) e também na evolução das espécies por seleção natural. A partir de 1970, a Teoria dos Jogos passou a ser aplicada ao estudo do comportamento animal, incluindo a evolução das espécies por seleção natural (os mais adaptados ao ambiente tendem a superar os menos adaptados).

Os biólogos utilizam a Teoria dos Jogos para compreender e prever os acontecimentos da evolução de certas espécies. A aplicação da Teoria dos Jogos à Teoria da Evolução produziu conceitos como o de Estratégia Evolucionariamente Estável- EEE (estratégia que se perpetua no tempo por não ser vulnerável a estratégias alternativas), introduzida pelo biólogo John Maynard Smith no seu ensaio *Game Theory and the Evolution of Fighting.*(Teoria do Jogo e a Luta da Evolução).

Alem disto, biólogos têm usado Teoria dos Jogos evolucionários e a EEE para explicar o surgimento da comunicação nos animais (SMITH & HARPER, apud MARINHO, 2005).

As análises dos jogos de sinalização, e outros jogos de comunicação têm sido bastante utilizadas, no campo da evolução da comunicação entre animais,.

Os biólogos, também têm usado o Jogo da Galinha para analisar o comportamento de luta e territorialidade.

A sociobiologia, que é um ramo da biologia que estuda o comportamento social dos animais, usando conceitos da etologia, evolução, sociologia e genética de populações, também utiliza a Teoria dos Jogos em seus estudos. O termo sociobiologia foi utilizado por Edward Osborne Wilson, em seu livro Sociobiology: The new syntesis (*Sociobiologia: A nova Síntese*), lançado em 1975.

Nessa disciplina, a proposta é que comportamentos e sentimentos animais, também existentes nos seres humanos, como o altruísmo e a agressividade, são em parte, derivados da genética, e não apenas culturais ou socialmente adquiridos.

Um dos fundadores da Sociobiologia é Robert L. Trivers, nasceu em 19 de Fevereiro em Washington D.C, Estados Unidos. Trivers tornou-se professor em Harvard em 1971, atualmente é professor de Antropologia e Ciências Biológicas no departamento de Antropologia de Rutgers University em New Jersey, autor de vários artigos na década de 1970 sobre as bases genéticas do comportamento sexual e altruísmo recíproco, estuda as implicações da simetria em populações humanas e animais.

A teoria do altruísmo recíproco se baseia nos conceitos de economia e matemática como a teoria dos jogos.

O termo altruísmo foi concebido por Algusto Comte, fundador do positivismo, uma doutrina que propunha, entre outras coisas, a generosidade humana como norma, em contraponto ao "instinto natural" do ser humano para o egoísmo. Este termo ainda é utilizado nos dias de hoje, no sentido de beneficência, desprendimento, nos levando ao centro da fé cristã e humanista: "amar ao próximo como a si mesmo" (Evangelho de São Mateus, 5,43-48). Para Comte, o altruísmo só seria adotado como estratégia pelo ser humano por meio da educação positivista.

Embora o termo altruísmo tenha sido concebido na forma acima, William Donald Hamilton, um dos maiores biólogos do século XX (foi professor visitante da USP Universidade de São Paulo) e membro do The Galton Laboratory, da Universidade de Londres, definiu altruísmo como uma inclinação de determinadas espécies para agir cooperativamente com aqueles que forem mais próximos em termos de parentesco (de onde se originou o conceito de “seleção de parentesco” ou *“kin selection*”) . Trivers, entendeu que o altruísmo, particularmente o humano, não se restringe às boas ações entre parentes, estando disseminado por toda a população, acontecendo até mesmo entre membros de espécies diferentes. Trivers exemplifica que “*Um ser humano que pula na água (com algum perigo para sua própria vida) para salvar alguém não aparentado está demonstrando um comportamento altruísta. Porém, se esse mesmo indivíduo tivesse pulado na água para salvar o próprio filho, isso não poderia ser considerado um comportamento altruísta; nesse caso, ele estaria apenas contribuindo para a sobrevivência dos próprios genes*”. Acrescentando que o conceito de altruísmo englobaria até mesmo indivíduos de espécies diferentes. (MARINHO, 2005 , p 58)

Na Filosofia, a Teoria dos Jogos foi utilizada por David Lewis (1969) para dar uma explicação filosófica da Convenção (segunda fase da Revolução Francesa). Utilizando a Teoria dos Jogos, Lewis provou a primeira análise do senso comum (primeira compreensão do mundo resultante da herança fecunda de um grupo social e das experiências atuais que continuam sendo afetadas) e empregou nisso a análise utilizada no jogo da coordenação.

Na Ética, alguns autores têm tentado aplicar a Teoria dos Jogos, começando por Thomas Hobbes, para diferenciar a moralidade do auto-interesse. Jogos como o Dilema do Prisioneiro apresentam um aparente conflito entre a moralidade e o auto-interesse, explicando por que a cooperação é requerida pelo auto-interesse. A estratégia comum é um componente da visão do contrato social geral.

Na ciência da computação, inteligência artificial e cibernética, a Teoria dos Jogos é utilizada em importantes leis. Várias teorias lógicas têm uma base na semântica dos jogos. Os cientistas da computação têm usado os jogos para modelar a computação interativa.

Também, em Direito, podemos utilizar a Teoria dos Jogos. O professor de Direito da Universidade de Chicago, Eric Posner, propôs um dos mais curiosos modelos de jogos de repetição, em seu livro Law and social norms (Lei e normas sociais,2000), no qual utilizou o Dilema dos Prisioneiros repetidas vezes para demonstrar que, se o jogador estiver nas rodadas finais, a opção mais vantajosa é mudar seu comportamento de cooperativo para desertor.

A Teoria dos Jogos contribui para a formatação de concorrências públicas mais eficazes e contratos mais justos e aplicáveis, assim como está sendo mais fácil prever a ocorrência de crimes como estupro.(Raul Marinho, internet 2002).

CAPÍTULO VI

Teoria dos Jogos e o Ensino Médio: uma seqüência didática

Para desenvolver a proposta de introduzir a Teoria dos Jogos no Ensino Médio, elaboramos uma sequência didática, para nos auxiliar na inserção do novo conteúdo de forma mais simples, usando alguns conceitos que supomos que os alunos já devam dominar.

Esta sequência didática foi aplicada a três turmas da 3º série do Ensino Médio, no período da manhã, de uma Escola Pública no bairro da Penha na capital de São Paulo – SP. Foram utilizadas 12 aulas de 50 minutos para a aplicação desta seqüência.

A seqüência didática, é composta de 4 atividades divididas em subitens, entregues aos alunos conforme o desenvolvimento de cada atividade na aula.

Ao final de cada item das atividades da seqüência didática, a professora/pesquisadora fazia as intervenções necessárias para o desenvolvimento da seqüência, discutindo com os alunos suas respostas e soluções.

Na primeira aula, foi exposto aos alunos que esta seqüência didática fazia parte de um objeto de pesquisa para a dissertação de mestrado da professora de Matemática, o que foi aceito por todos. Também, salientamos que alguns conteúdos já estudados que aparecessem nas atividades, seriam revistos e discutidos, se necessário, além do novo conteúdo. Ao final, apresentamos a ordem das atividades.

A Sequência didática

A análise da seqüência didática, aplicada aos alunos, será apresentada de forma separada, para facilitar as explicações necessárias ao término de cada item.

1º) Introdução histórica e a Estrutura da Teoria dos Jogos

Para iniciar a seqüência didática, optamos por um breve relato histórico sobre a Teoria dos Jogos, sua definição, algumas áreas do conhecimento que podemos encontrá-la, qual é a estrutura da Teoria dos Jogos e quem são os principais teóricos dos jogos, principalmente John von Neumann , Oskar Mosgenstern e John F. Nash.

O objetivo desta primeira parte é apresentar a Teoria dos Jogos aos alunos, para que eles saibam sobre o que irão estudar, procurando desta forma evitar desinteresse já que a grande maioria dos alunos tem como justificativa o "não gostar de matemática", porque não sabem para que estão aprendendo "aquilo".

Introdução histórica da Teoria dos Jogos.

- Iniciou com o livro Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico (Theory of Games and Economic Behaviour) escrito por John von Neumann e Oskar Morgenstern em 1944;
- John F. Nash, Jr (livro e filme Uma Mente Brilhante): equilíbrio de Nash
- Além dos teóricos acima, podemos citar também John Harsanyi; Reinhard Selten; Robert Aumann, Thomas Shelling, Martin Schubik entre outras importantes personalidades da Teoria dos Jogos;

- A Teoria dos jogos tem como objetivo permitir uma abordagem dos problemas econômicos sob um novo ponto de vista, mas ela tem aparecido em diversas áreas de aplicação. Além da economia, podemos encontrá-la na ciência política, matemática pura, psicologia, sociologia, finanças, guerra e até mesmo na evolução biológica que tem fatores quantificáveis.

Estrutura da Teoria dos Jogos

- Foi desenvolvida com a finalidade de analisar situações competitivas que envolvem interesses conflitantes.
- Fornece um resultado do jogo, admitindo que cada um dos jogadores deseja maximizar seu lucro mínimo esperado, ou minimizar sua perda máxima esperada. Critério minimax ou maximin.
- Elementos necessários para a compreensão do objeto de estudo: regras, ações de cada jogador, jogador, racionalidade, comportamento estratégico.

2º) O valor de Utilidade

O objetivo da Atividade 1 é apresentar a definição de valor de utilidade. Sendo assim, elaboramos um exercício em que o aluno deve pontuar suas preferências em relação a determinadas escolhas.

Nessa atividade, espera-se que os alunos expressem algumas preferências em forma de valor numérico, levando-os a perceber que as escolhas pessoais podem ser quantificadas.

Atividade 1- Utilidade

1. Em cada item abaixo, expresse em forma de valor numérico de 1 a 3 , escrevendo 3 para o que você prefere mais 1 para o que é menos preferível por você.

a) shopping ( )	barzinho ( )	praia ( )
b) Rap ( )	rock ( )	samba ( )
c) maçã ( )	pêra ( )	laranja ( )
d) ir a escolar ( )	sair com amigos ( )	ficar em casa ( )
e) amizade ( )	honestidade ( )	respeito ( )
f) aprender ( )	ser aprovado na escola ( )	satisfazer sua família ( )

Definição: "utilidade é a força de nosso desejo de algo" (Bêrni, D.A: 1997)

No início da atividade, os alunos sentiram alguma dificuldade, pois acharam estranho quantificar gosto, sentimento etc. Eles queriam dar valores iguais a mais de um dado no mesmo item. Alguns discutiam que não havia nenhum dado que eles preferissem naquele item, mas logo foram percebendo que nem sempre a nossa preferência está entre as nossas possibilidades de escolha, mesmo assim, uma escolha deve ser feita. No final desta atividade, a professora/pesquisadora explicou o que era um valor de utilidade para a Teoria dos Jogos.

Após o término dessa atividade, discutimos sobre o respeito que deve ser dado à preferência do outro, pois nem tudo o que uma pessoa fala, gosta ou prefere é exatamente o que os outros falam, gostam ou preferem.

O tempo utilizado para os itens 1º) e 2º) foi de uma aula de 50 minutos.

3º) Estratégias

A atividade 2 tem como objetivo compreender noções sobre "Estratégias", bem como diferenciar Estratégia Pura de Estratégia Mista. Desta forma resolvemos iniciar esta atividade apresentando uma definição sobre o que é Estratégia para depois dar seqüência à atividade.

Neste exercício, os alunos devem "brincar" de "Par" ou "Impar", em dupla, mas utilizando somente um ou dois dedos, para facilitar a representação do jogo e em seguida justificar a escolha de sua estratégia.

Utilizamos para esta atividade uma aula de 50 minutos.

Atividade 2. Estratégias.

Descrição completa de como um jogador deverá agir sob quaisquer circunstâncias possíveis.

Vamos jogar "Par" ou "Impar"

1.Jogue com o seu amigo ao lado "Par" ou "Impar" uma única rodada e anote sua estratégia no quadro abaixo:

Eu	Meu parceiro	Resultado (Ganhei/Perdi)

Responda:

Por que você optou por esta estratégia?...

....

Neste momento, os alunos brincaram uma única vez para anotar o resultado. Apresentamos abaixo algumas justificativas dos alunos, em relação às escolhas estratégicas no jogo do “Par” ou “Impar”.

> *Eu deduzi que ele iria por um número par e perdi.*
> *Eu sempre uso o número par, pois tenho 50% de acerto em todas as chances*
> *Porque eu pedi par e joguei um número impar, e o resultado foi par*
> *Eu coloquei 1 e ganhei porque 1 é impar*
> *Porque eu gosto de par*
> *Porque eu achei melhor*
> *Optei por um número impar já que tinha escolhido impar*
> *Pelo motivo de sempre, quando a pessoa pedir impar eu colocar par*
> *Joguei um número qualquer*
> *Porque eu imaginei que meu parceiro jogaria 2 já que ele pediu par, assim eu ganhei o jogo.*
> *Porque pondo 1 e pedindo impar as minhas probabilidades são maiores*
> *Porque foi o número 1 que me veio na cabeça*
> *Coloquei dois porque eu gosto de números pares, mas eu perdi o jogo.*
> *Porque havia a possibilidade dela me imitar e colocar 2 assim eu ganharia, mas perdi o jogo.*
> *Porque se seu pedi par imaginei que ela iria colocar um, para sair o resultado “impar” no qual ela ganharia.*
> *Impulso*
> *Porque eu acreditei que ela fosse colocar dois.*
> *Pedi “par” e pensei ter mais probabilidade de sair par com um número par.*
> *Porque ela era Par e pra me confundir colocaria 1 para eu por 1 também e ela ganharia.*
> *Foi aleatório*
> *Foi no chute*
> *Porque eu sempre coloco o que meu adversário pede.*
> *Porque eu imaginei que ela fosse por a opção que eu escolhi, assim eu joguei a minha própria opção.*

Poucos alunos não responderam esta questão, percebemos que muitos falaram sobre jogar aleatório. Algumas palavras surgiram neste item como probabilidade, aleatório, porcentagem de acerto. Alguns alunos já começaram a perceber, nessa atividade, que um simples jogo pode conter muito mais detalhes que o simples fato de brincar.

Algo que achamos interessante, foi que, os alunos queriam continuar brincando com outros pares e também com a professora/pesquisadora, ao término dessa atividade, esse foi um fato que não esperávamos nos alunos do terceiro ano do ensino médio. Geralmente, achamos que nessa faixa etária, 16 a 18 anos, os alunos já devem ter um pensamento mais adulto e cobramos determinadas atitudes que nem sempre eles podem nos dar, assim, acabamos esquecendo de dar a oportunidade a eles de se expressarem de outra forma e muitas vezes os avaliamos de forma errada.

4º) Estratégias puras e estratégias mistas

O objetivo deste item é conceituar estratégia pura e estratégia mista, para tal, continuamos com o jogo do “Par” ou “Impar”, utilizado no item anterior, referente a estratégias do jogo.

2. Jogue novamente, mas agora haverá cinco rodadas no jogo, não esqueça de anotar a estratégia em cada rodada.

Rodada	Eu	Meu parceiro	Resultado (Ganhei/Perdi)
1ª			
2ª			
3ª			
4ª			
5ª			

Responda:

Neste exercício você adotou a mesma estratégia para cada rodada?........................

Como você descreveria a sua estratégia para ganhar o jogo.....................................

Estratégias puras: adoção de uma estratégia em cada possível situação.

Estratégias mistas: alternância de estratégias aleatoriamente através de uma atribuição de probabilidade a cada estratégia escolhida.

Nesse item foi pedido aos alunos que jogassem o jogo do Par ou Impar novamente, com um ou dois dedos, mas agora eles deveriam jogar cinco vezes, anotando na tabela as estratégias dos dois jogadores e também o resultado do jogo para ele.

Logo após o jogo, os alunos deveriam responder a duas perguntas. A primeira tinha por objetivo levar o aluno a perceber qual é a diferença entre estratégia pura e estratégia mista. Na segunda questão, o aluno deveria descrever qual foi a sua estratégia para ganhar o jogo. Apresentamos abaixo algumas respostas para as questões do exercício:

Eu pensei na estratégia que ela fosse jogar e joguei um número contrário do que ela "supostamente" iria jogar.(aspas da aluna)
Escolho um número e jogo na sorte
Não utilizei nenhuma estratégia, fui apenas jogando
Se ela coloca 1 com certeza na próxima rodada vai jogar 2.
Impulso, dedução, presentimento.
Tentei nas quatro primeiras rodadas colocar a escolha do adversário e optei pela minha em último caso.
Colocava o contrario que meu parceiro pedia
Só colocar o mesmo número sempre
Fingir que vai colocar um número e colocar o outro.
Intercalei os valores em par ou impar
Tentei fazer aleatoriamente de modo que não se repetisse a seqüência.
Eu sempre escolhia números diferentes para confundir o adversário
Fiquei com o mesmo número para confundir meu adversário
Eu sempre coloco um número de acordo com o que eu escolho, se pedir par coloco 2 e pedir impar coloco 1
Sempre o mesmo número assim só ele mudaria, podendo aumentar minhas chances.
Fui pensando no que minha parceira poderia por.
Sempre colocar o número contrário. Exemplo: se eu for impar vou jogar um número par
Como meu parceiro sempre jogava um número par eu sempre jogava um número impar
Por exemplo, eu peço impar e coloco dois a, chance de que eu ganhe é maior pois estou "blefando"
Joguei aleatoriamente
Uma estratégia bem racional e criativa
Se o adversário pede ímpar eu coloco um número contrário quando o adversário percebeu a estratégia alternei as duas
Mudei várias vezes o número para ter mais chances de ganhar
Questão de lógica, se ela colocou dois na rodada anterior, ela iria colocar 1 na próxima.

Não apresentamos todas as respostas dos alunos, pois em sua grande maioria elas aparecem de forma igual ou parecida às que enunciamos aqui.

Ao final desta atividade, além de conceituar estratégias puras e mistas, discutimos sobre jogos repetidos e jogos simultâneos. Nossa expectativa em relação a esta atividade obteve êxito, pois os alunos começaram a entender o que era estratégia e qual era a diferença entre estratégia mista e estratégia pura.

5º) Representação dos jogos de estratégia

O objetivo dessa atividade é o de representar os jogos na sua forma normal ou estratégica, na forma estendida e na forma de matriz.

Para alcançar os objetivos propostos, serão utilizados os resultados das atividades 1 e 2 desenvolvidas anteriormente.

Essa atividade possui algumas variáveis matemáticas envolvidas como a leitura e interpretação do enunciado, a representação da tabela de dupla entrada, matrizes, pares ordenados, árvore de possibilidades entre outras.

Para esta atividade também utilizamos uma aula de 50 minutos.

5º A) Representação dos jogos de estratégia na forma normal ou estratégica.

O item 1 desta atividade, tem como objetivo a representação dos jogos na forma normal ou estratégica.

Os alunos devem representar os pares de estratégias do Jogador Linha (jogar um ou dois dedos) e do Jogador Coluna (jogar um ou dois dedos) , no jogo do “Par” ou “Impar”, na tabela de dupla entrada

Atividade 3 - Representação dos jogos de estratégia

1. Podemos representar o jogo do “Par” ou “Impar” na forma normal ou estratégica. As estratégias do jogador Linha , podem ser: jogar 1 ou jogar 2 e as estratégias do jogador Coluna podem ser: jogar 1 ou jogar 2. Preencha a tabela colocando o par ordenado (Jogador Linha, Jogador Coluna) nos espaços em branco.

Estratégias		Jogador Coluna	
		1	2
Jogador Linha	1		
	2		

“As matrizes servem para mostrar de forma clara e simples as respostas que podem ser esperadas em função das ações escolhidas simultaneamente.”

Nossa expectativa para este item era de que os alunos não tivessem muita dificuldade para sua resolução o que foi confirmada ao término deste item.

5º B) Representação dos jogos de estratégia na forma estendida.

Neste item, os jogos de estratégia serão representados na forma estendida.

2. Representação na forma estendida. Podemos representar os resultados do jogo através da árvore de possibilidades.
Represente as estratégias do exercício anterior e seus resultados , através de uma árvore de possibilidades.

Ao término deste item, os alunos deveriam representar os resultados dos jogos na forma estendida (árvore de possibilidades). Como já havíamos feito uma sondagem inicial sobre o fato de eles terem estudado probabilidade (na primeira aula introdutória) , o que tivemos uma resposta afirmativa, não esperávamos que houvesse dificuldades na resolução desse item, mas, detectamos que determinados conteúdos necessários para a resolução desta atividade, não estavam disponíveis ao aluno, sendo assim, foi necessária a intervenção da professora/pesquisadora.

Depois de feita a intervenção da professora/pesquisadora os alunos desenvolveram a atividade sem maiores problemas.

5º C) Representação dos jogos de estratégias na forma de matriz

O item 3 dessa atividade tem como objetivo representar os resultados do jogo na tabela de dupla entrada e matriz de pagamentos.

3. Representação na forma de matriz

Para o jogo "Par" ou "Impar", acima representaremos a matriz de pagamento do Jogador Linha quando ele joga "Par" , indicando +1 para "ganho" e –1 para "perda".

Estratégias		Jogador Coluna	
		1	2
Jogador Linha	1		
	2		

$$A = \begin{pmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

Nesse exercício, para um jogo de "Par" ou "Impar", que tivesse "Par" como jogada do Jogador Linha, o aluno deveria representar o resultado +1 para partida ganha ou –1 para partida perdida.

Este item foi desenvolvido sem problemas, pois os alunos tinham o conhecimento sobre matrizes, disponível.

6º) Determinação de um resultado do jogo

O objetivo da atividade 4 é determinar o resultado de um jogo de soma zero ou de soma não zero. Apresentamos no item 1 a resolução de um jogo de soma zero através do método minimax-maximin. No item 2, foi apresentado o método da eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas. A resolução de um jogo pelo método gráfico foi apresentada no item 3 e no item 4 apresentamos a solução de um jogo para matriz de pagamento que não contém ponto de sela, através de estratégia mista e pagamento esperado e por solução gráfica.

Sobre essa atividade, comentaremos cada item separadamente, devido a diversidade de expectativas que tínhamos em cada um.

Utilizamos, nessa atividade, 9 aulas de 50 minutos cada.

Destacamos algumas variáveis matemáticas envolvidas nessa atividade como : leitura e interpretação de texto; tabela de dupla entrada; valor mínimo; valor máximo; números inteiros, porcentagem, etc

6º A) Determinação do resultado do jogo pelo método minimax e maximin

O objetivo do item 1, é determinar o resultado ótimo de um jogo através de método do minimax e maximin desenvolvido por John von Neumann e encontrar o ponto de sela (se possível) para jogos de soma zero.

Nessa atividade, o aluno deve fazer a leitura do problema para entender como se utiliza uma matriz de pagamentos, respondendo a seguir as questões apresentadas.

Utilizamos um problema familiar, como a eleição do Grêmio Estudantil da escola onde eles estudam, para que possam perceber a relação da Teoria dos Jogos e sua vida cotidiana.

O tempo utilizado para esse item foi uma aula de 50 minutos.

Atividade 4. Determinação do resultado de um jogo

1. Método Minimax e Maximin para jogos de soma zero.

Na escola em que você estuda está acontecendo a eleição para o Grêmio Estudantil.Dois grupos estão participando, chamaremos os grupos de A e B. Para ganhar as eleições o grupo A pode fazer sua campanha através do jornal da escola (estratégia A_1) , panfleto (estratégia A_2) ou na rádio da escola (estratégia A_3).

O grupo B pode fazer sua campanha no jornal da escola (estratégia B_1), no mural da escola (estratégia B_2), na rádio da escola (estratégia B_3) ou por e-mail para os alunos (estratégia B_4).

A matriz de resultados abaixo resume a percentagem de votos ganhos ou perdidos pelo Grupo A.

		Grupo B			
		B_1	B_2	B_3	B_4
Grupo A	A_1	11	0	12	-1
	A_2	9	8	9	11
	A_3	0	7	-8	8

Obs. Esta é a matriz de pagamentos para o Grupo A, ou seja, se o Grupo A escolher o jornal da escola para fazer sua campanha (A_1) e o Grupo B escolher a rádio da escola (B_3) então o Grupo A ganha 12% dos votos e B perde 12 %.

1.A) . Copie a matriz de pagamento acima e encontre o valor mínimo de cada linha, escrevendo na coluna Min Linha.

		Grupo B				
		B_1	B_2	B_3	B_4	Min Linha
Grupo A	A_1					
	A_2					
	A_3					

b) Se o Grupo A escolher a estratégia A_1 , independente da escolha do Grupo B, o pior que pode acontecer é ....

c) Se o Grupo A escolher a estratégia A_2 , independente da escolha do Grupo B, o pior que pode acontecer é ....

d) Se o Grupo A escolher a estratégia A_3, independente da escolha do Grupo B, o pior que pode acontecer é ....

e) Entre os valores mínimos de cada linha, qual é o maior valor ?............................ Este valor é chamado Maxmin.

f) Portanto o Grupo A deve escolher a estratégia..............., que resulta no melhor dos piores resultados.

Nos exercícios (1A), os alunos deveriam copiar a matriz original e encontrar os valores mínimos de cada estratégia obtendo como resposta para as estratégias A_1, A_2 e A_3 os valores -1, 8 e –8 respectivamente. No item (e) deste exercício, o aluno deveria encontrar o maior valor entre estes valores (+8), resultando o máximo dos resultados mínimos do Grupo A , pois este seria o melhor dos piores resultados obtidos das estratégias do Grupo A, independente das escolhas do Grupo B. Ou seja, os alunos deveriam encontrar o Maximin, determinando no item (f) a estratégia A_2 como a melhor escolha para o Grupo A.

Nesta atividade, alguns alunos sentiram dificuldade somente em perceber que os valores negativos das estratégias A_1B_4 e A_3B_8 na realidade eram porcentagens de votos perdidos pelo Grupo A. Ao final deste item, foi feita uma discussão entre alunos e professora/pesquisadora para uma melhor compreensão sobre o que havia sido visto até o momento.

1.B). Agora, vamos pensar no Grupo B!

a) Copie a matriz de pagamento novamente e encontre o valor máximo de cada coluna, escrevendo na coluna Max Coluna.

		Grupo B			
		B_1	B_2	B_3	B_4
Grupo A	A_1				
	A_2				
	A_3				
	Max Coluna				

Obs. Não se esqueça que esta é a matriz de resultados do Grupo A

continuação do item 1.B)

b) se o Grupo B escolher a estratégia B_1 , pior que pode acontecer é ....
c) se o Grupo B escolher a estratégia B_2, o pior que pode acontecer é ....
d) se o Grupo B escolher a estratégia B_3 , o pior que pode acontecer é ....
e) se o Grupo B escolher a estratégia B_4, o pior que pode acontecer é ....
g) entre os valores máximos qual é o menor valor?..
Este valor é chamado Minimax.
h) o Grupo B deve escolher a estratégia ...., pois representa o menor dos melhores resultados do Grupo A.
i) qual deve ser a solução ótima do jogo?...

Dando sequência ao exercício, no item (1B), os alunos deveriam novamente copiar a matriz de pagamentos, mas agora encontrar o valor máximo de cada coluna, estratégias do Grupo B, e entre esses valores o mínimo deles, ou seja, o Minimax.

Os resultados das estratégias B_1, B_2, B_3 e B_4 são respectivamente 11, 8, 12 e 11. Entre esses valores o menor dos resultados é 8 , desta maneira a estratégia B_2 deve ser a melhor escolha para o Grupo B, pois é a menor entre as maiores perdas.

Neste item, os alunos sentiram um pouco mais de dificuldade pois ainda não conseguiam perceber que os resultados do jogo eram do grupo A , sendo assim, o grupo B deveria, entre os valores de máximo, encontrar o menor valor, ou seja, aquele que faria o grupo B perder menos , o melhor dos piores resultados.

No item (i) os alunos deveriam responder qual deveria ser a solução ótima do jogo, estratégias A_2B_2 ,o que não houve problemas.

1.C). Vamos agora, juntar todas as informações na tabela abaixo:

a) Copie a tabela com os valores dos resultados do jogos , preenchendo os valores Min Linha e Max Coluna.

		Grupo B				
		B_1	B_2	B_3	B_4	Min Linha
Grupo A	A_1					
	A_2					
	A_3					
	MaxColuna					

Maxmin
....

.

Minmax
....

Se MiniMax =Maximin temos um "ponto de sela" e esta será a solução do jogo

O objetivo do item 1C) indicado acima, é mostrar aos alunos que a resolução de jogos de soma zero, através do método Minimax=Maximin é feita na forma acima, sem todas as passagens dos itens anteriores.

Nessa atividade, os alunos, já familiarizados com a tabela de dupla entrada e valores de máximo e mínimo, deveriam encontrar o resultado do jogo de uma só vez, encontrando a intersecção entre os valores maximin (8) =minimax (8) que resulta num ponto de sela. Não houve problemas na resolução desta atividade.

Ao final, fizemos uma discussão sobre o método de resolução estudado . Os alunos estavam impressionados pelo fato de nunca terem imaginado que uma simples eleição do Grêmio Estudantil poderia ser representada e solucionada matematicamente.

6º B) Determinação do resultado do jogo pelo método da eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas.

O objetivo dessa atividade é determinar o resultado de um jogo através do método de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas.

Algumas variáveis matemáticas envolvidas nesse exercício são: leitura e compreensão do exercício apresentado na linguagem natural, tabela de dupla entrada, escrita de pares ordenados, representação de matrizes etc.

Começamos a atividade conceituando estratégia dominada e apresentando, logo após, um problema em que duas empresas fabricantes de carro, denominadas no problema como Empresa A e Empresa B, devem escolher qual a melhor estratégia para sua campanha publicitária no lançamento de um carro, modelo popular.

Nesse exercício, utilizamos uma aula de 50 minutos.

2. Método da eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas.
Duas empresas A e B , fabricantes de carros, lançaram sua nova versão de modelo popular este ano. Para sua campanha publicitária, a empresa A irá utilizar as estratégias A_1, A_2, A_3 e A_4 e a empresa B utilizará as estratégias B_1, B_2, B_3 e B_4. A matriz de pagamentos esperado (lucro em milhões) está representada abaixo:

Estratégias		Empresa B			
		B_1	B_2	B_3	B_4
Empresa A	A_1	(3,3)	(2,2)	(4,3)	(3,4)
	A_2	(2,0)	(1,3)	(0,2)	(2,0)
	A_3	(3,4)	(4,2)	(2,2)	(0,3)
	A_4	(4,3)	(2,1)	(3,1)	(4,2)

a) Compare as estratégias da empresa A (linha), elemento a elemento, independente da escolha da empresa B, existe alguma estratégia dominada entre as estratégias da empresa A?................. Se sim, qual?...............
b) Compare as estratégias da empresa B (coluna), elemento a elemento, independente da escolha da empresa A, existe alguma estratégia dominada entre as estratégias da empresa B?................. Se sim, qual?...............

Nos itens (a) e (b), os alunos deveriam fazer a leitura da tabela representada por pares ordenados (lucros em milhões) da Empresa A (linha) e Empresa B (coluna) e comparar os resultados elemento a elemento , linha a linha e elemento a elemento coluna a coluna.

Como, os alunos, após alguns minutos de discussão sobre como fariam esta comparação, estavam se perdendo entre as linhas e colunas, foi sugerido pela professora/pesquisadora que eles separassem os resultados dos pagamentos de cada empresa em matrizes diferentes, para uma melhor visualização. Abaixo estão as representações de cada matriz que eles fizeram para este item.

Empresa A

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Empresa B

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Logo após a construção das matrizes acima, os alunos não enfrentaram mais problemas com a visualização dos pagamentos de cada empresa, embora, no início, tenham sentido alguma dificuldade em perceber que havia linhas ou colunas que tinham todos elementos menores ou iguais a outras.

No item (a) deveriam encontrar para a Empresa A, a estratégia A_2 como estratégia dominada, eliminado-a, já que para a Empresa B, item (b) não havia estratégia dominada.

c) Copie a tabela novamente eliminando a estratégia dominada.

		Empresa B			
Empresa A					

d) Compare as estratégias da empresa A (linha), elemento a elemento, independente da escolha da empresa B, existe alguma estratégia dominada entre as estratégias da empresa A?................ Se sim, qual?...............

e) Compare as estratégias da empresa B (coluna), elemento a elemento, independente da escolha da empresa A, existe alguma estratégia dominada entre as estratégias da empresa B?................ Se sim, qual?...............

Para os itens (c), (d) e (e) os alunos já não sentiram tanta dificuldade, novamente construíram a matriz de pagamentos eliminando a estratégia A_2, conforme indicado abaixo:

Empresa A

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_3 \\ A_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Empresa B

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_3 \\ A_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Percebendo que para a Empresa A não havia estratégia dominada, mas para a empresa B a estratégia dominada era B_2. Sendo assim eliminaram-na.

f)Copie a tabela novamente eliminando a estratégia dominada.

Estratégias		Empresa B		
Empresa A				

g) Compare as estratégias da empresa A (linha), elemento a elemento, independente da escolha da empresa B, existe alguma estratégia dominada entre as estratégias da empresa A?................ Se sim, qual?..............

h) Compare as estratégias da empresa B (coluna), elemento a elemento, independente da escolha da empresa A, existe alguma estratégia dominada entre as estratégias da empresa B?................ Se sim, qual?..............

Eliminando as estratégias A_2 e B_2 , os alunos novamente copiaram a tabela de dupla entrada do lucro em milhões de cada empresa, e construíram as matrizes:

Empresa A

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Empresa B

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Analisando as duas matrizes, os alunos perceberam que havia duas estratégias dominadas, uma para cada empresa, a estratégia A_3 para a empresa A e a estratégia B_3 para a empresa B e as eliminaram.

i) Copie a tabela novamente eliminando a estratégia dominada.

Estratégias		Empresa B	
Empresa A			

j) Compare as estratégias da empresa A (linha), elemento a elemento, independente da escolha da empresa B, existe alguma estratégia dominada entre as estratégias da empresa A?................ Se sim, qual?..............

k) Compare as estratégias da empresa B (coluna), elemento a elemento, independente da escolha da empresa A, existe alguma estratégia dominada entre as estratégias da empresa B?................ Se sim, qual?..............

Nesses itens, os alunos já não sentiam mais dificuldades para perceber quais estratégias eram dominadas, mas mesmo assim, ainda construíram as matrizes :

Empresa A

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Empresa B

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Eliminado a estratégia dominada A_1 da empresa A , já que a empresa B não possuía estratégia dominada.

l) Copie a tabela novamente eliminando a estratégia dominada.

Estratégias		Empresa B	
Empresa A			

m) eliminando todas as estratégias dominadas, qual deve ser a estratégia utilizada pelas empresas A e B?..

n) a escolha da estratégia deve ser feita por qual empresa ?.........................

Uma estratégia dominada não precisa ser inferior em todos os seus elementos, ela pode ser igual, pois se ela não é nem melhor nem pior que a outra.

No item (l) as estratégias restantes eram A_4 para a empresa A e B_1 e B_4 para a empresa B resultando as matrizes das empresas conforme abaixo:

Empresa A

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_4 \end{array} \\ A_4 & \begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Empresa B

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_4 \end{array} \\ A_4 & \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Os itens (m) e (n) foram resolvidos de forma correta, embora alguns alunos, não estivessem percebendo que a escolha da estratégia deveria ser feita pela empresa B, pois para qualquer escolha de B a empresa A ganharia o mesmo valor (4) mas a empresa B poderia ganhar 3 com a estratégia B_1 em vez de 2, resultado da estratégia B_4.

Ao final desse exercício, conversamos sobre esse método de resolução de jogos e sobre algumas dificuldades já apresentadas aqui. Podemos perceber que até essa atividade, não houve, um aumento significativo do grau de dificuldade de aprendizado já apresentado anteriormente.

7º) Determinação do resultado de um jogo pelo método gráfico.

O objetivo desse exercício é apresentar a resolução de um jogo através do método gráfico, para tal utilizamos o jogo “Dilema do Prisioneiro”, um dos principais jogos utilizados na Teoria dos Jogos até hoje.

Após a leitura do que consiste o “Dilema dos Prisioneiros” e verificação da representação gráfica dos pagamentos obtidos para cada criminoso, o aluno deve representar estes pagamentos em um plano cartesiano e construir as equações das retas suportes de cada segmento de reta da figura encontrada como solução para o jogo, encontrando assim, os pontos inacessíveis e indesejáveis do jogo.

Algumas variáveis matemáticas que fazem parte desse exercício são: leitura e compreensão do enunciado, apresentado na linguagem natural; representação dos pagamentos do jogo na forma gráfica; plano cartesiano; pares ordenados; ponto; segmento de reta; reta; figura geométrica plana (quadrilátero); representação de variáveis no plano; equação de primeiro grau; representação dos pontos de intersecção de duas retas através de sistema de primeiro grau; resolução de sistemas de primeiro grau; operações no conjunto dos números reais; coeficiente angular e coeficiente linear; condição de paralelismo etc.

Analisaremos primeiro os itens (a) e (b) desse exercício e depois falaremos sobre os itens (c) e (d) sendo estes os itens no quais os alunos tiveram maior dificuldade.

Para os itens (a) e (b) utilizamos uma aula. Nesses itens, os alunos devem representar os pares ordenados no plano cartesiano com os pares (p_A, p_B) unindo os pontos , contornando a figura de quadrilátero (paralelogramo).

Utilizamos 3 aulas de 50 minutos para este exercício.

3. Método gráfico.

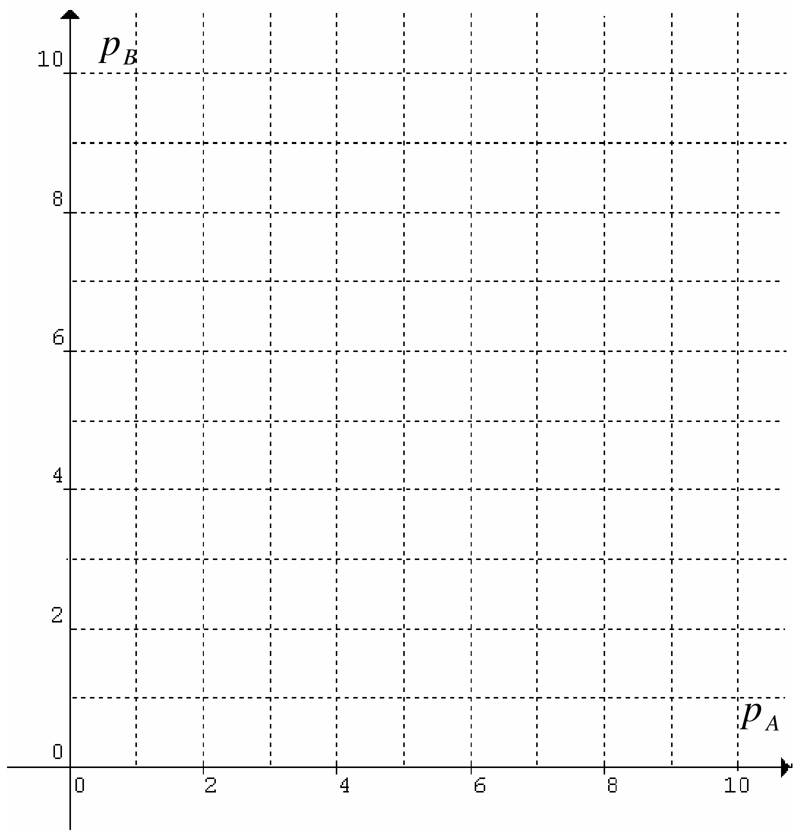
Na Teoria dos Jogos, existe um jogo chamado “Dilema do Prisioneiro”, vamos utilizá-lo como exemplo para este método.
O Dilema do Prisioneiro é a situação em que a polícia prende dois cúmplices, Al e Bob, por suspeitar que eles cometeram um crime considerado grave, mas tem provas insuficientes para condená-los por este crime, porém, pode deixá-los na prisão por um crime menor. Levados à delegacia e colocados em selas separadas, o promotor oferece a ambos o mesmo acordo: se um dos prisioneiros testemunhar para a procuradoria contra o outro e o outro permanecer calado, o traidor pega apenas dois anos de cadeia e o seu cúmplice, se não o trair pega oito anos. Se ambos ficarem em silêncio, podem ser condenados a quatro anos de prisão, cada um. Se ambos traírem o comparsa, cada um leva seis anos. As decisões são simultâneas e um não sabe nada sobre a decisão do outro.

A matriz abaixo representa o jogo Dilema dos Prisioneiros

Estratégias		Bob	
		Confessa	Não confessa
Al	Confessa	6,6	2,8
	Não Confessa	8,2	4,4

Método gráfico.- continuação

a) Coloque os resultados do jogo no sistema de eixos cartesianos abaixo (pares ordenados) , em que p_A informa os pagamentos de Al e p_B informa os pagamentos de Bob.

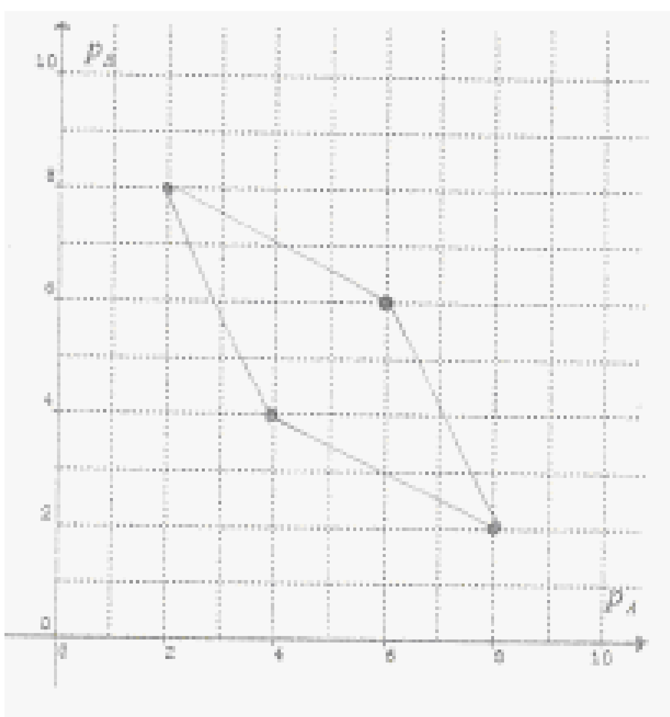


b) Unindo os pontos encontrados, feche os contornos desta figura.

Alguns alunos tiveram dificuldades em demonstrar os pares ordenados no plano cartesiano pois não estavam com os conhecimentos, par ordenado, eixo das abscissas e eixo das ordenadas, disponível, outros alunos, não conseguiam perceber a relação entre o valores do par ordenado (x,y) com o par ordenado (p_A, p_B), desta forma foi necessário que a professora/pesquisadora interviesse. Um outro problema encontrado foi à representação deste ponto, ao invés de utilizar os tracejados da figura para encontrar os pontos os alunos riscavam com a régua, confundindo-se desta forma com a figura contornada. Muitos justificavam que era a mesma coisa, que não havia problema, mostrando dessa forma a existência de alguns problemas referentes a conteúdos passados.

Nessa fase da seqüência de atividades, começamos a ter algumas dificuldades com alguns tópicos já estudados pelos alunos, o que nos justificou algumas intervenções no decorrer das atividades, relativos a conteúdos anteriores.

Abaixo apresentamos uma resolução do item a) feita por um aluno.



c) Através dos pontos (pares ordenados) , encontre a equação de cada reta que forma a figura encontrada.

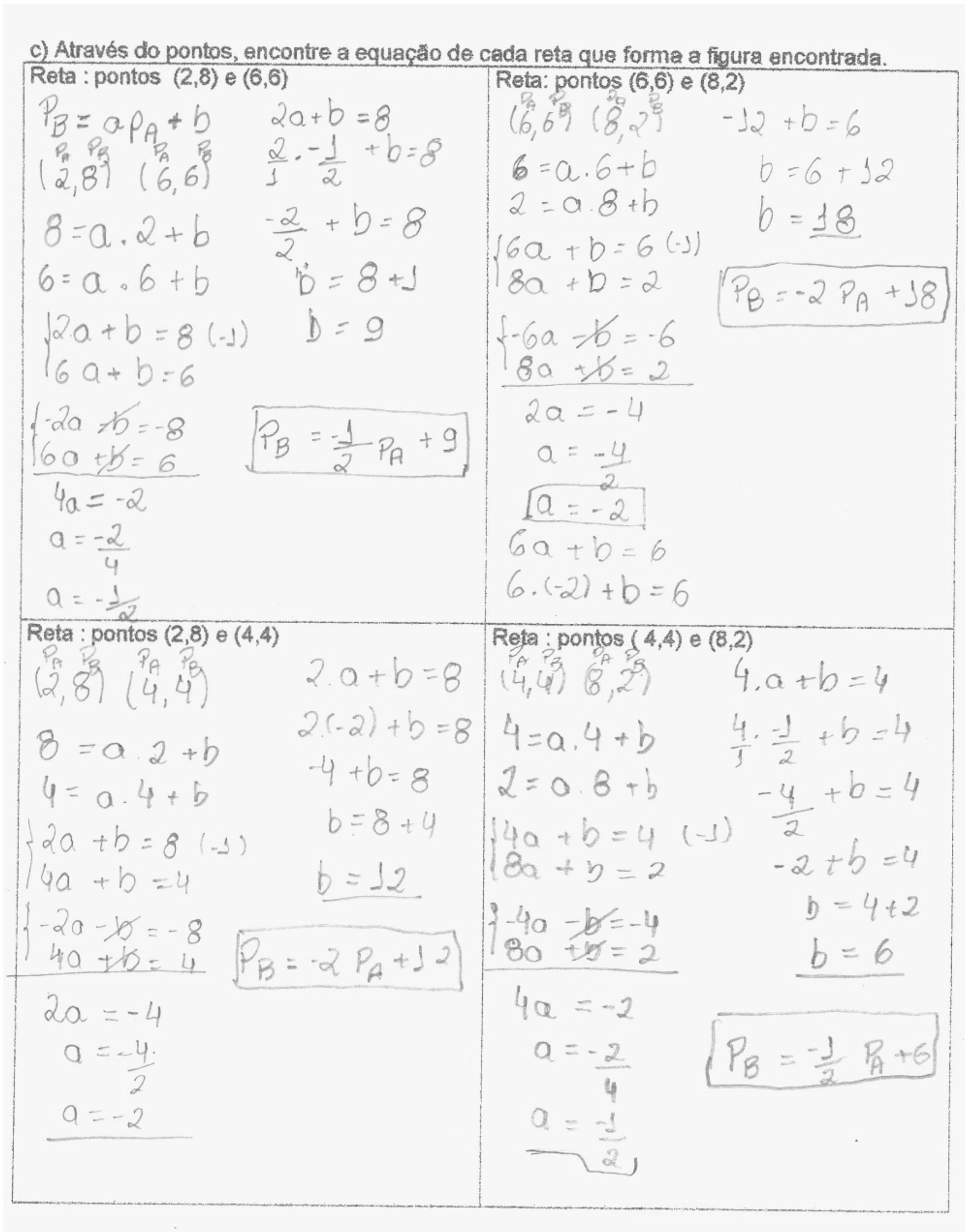
Reta : pontos (2,8) e (6,6)	Reta: pontos (6,6) e (8,2)
Reta : pontos (2,8) e (4,4)	Reta : pontos (4,4) e (8,2)

Esta atividade trouxe grande dificuldade, em primeiro lugar alguns alunos não tinham o conhecimento, que uma reta poderia ser representada na forma algébrica, disponível,ou tiveram dificuldade em relacionar este conteúdo ao exercício.

Para esta atividade, houve a intervenção da professora/pesquisadora que deu um exemplo na lousa, deixando os alunos fazerem a atividade em seguida.

Os alunos começaram a fazer o exercício, mas tiveram muitas dificuldades na resolução do sistema de primeiro grau, principalmente no que se referia às operações algébricas no conjunto dos números reais.

Apresentamos a resolução deste item feita por um aluno :



c) Através do pontos, encontre a equação de cada reta que forma a figura encontrada.

Reta : pontos (2,8) e (6,6)

$P_B = aP_A + b$

$(2,8)\ (6,6)$

$8 = a.2 + b$

$6 = a.6 + b$

$\begin{cases} 2a + b = 8\ (-1) \\ 6a + b = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} -2a \cancel{-b} = -8 \\ 6a \cancel{+b} = 6 \end{cases}$

$4a = -2$

$a = \frac{-2}{4}$

$a = -\frac{1}{2}$

$2a + b = 8$

$\frac{2}{1} \cdot -\frac{1}{2} + b = 8$

$\frac{-2}{2} + b = 8$

$b = 8 + 1$

$b = 9$

$\boxed{P_B = \frac{-1}{2} P_A + 9}$

Reta: pontos (6,6) e (8,2)

$(6,6)\ (8,2)$

$6 = a.6 + b$

$2 = a.8 + b$

$\begin{cases} 6a + b = 6\ (-1) \\ 8a + b = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} -6a \cancel{-b} = -6 \\ 8a \cancel{+b} = 2 \end{cases}$

$2a = -4$

$a = \frac{-4}{2}$

$\boxed{a = -2}$

$6a + b = 6$

$6.(-2) + b = 6$

$-12 + b = 6$

$b = 6 + 12$

$b = 18$

$\boxed{P_B = -2 P_A + 18}$

Reta : pontos (2,8) e (4,4)

$(2,8)\ (4,4)$

$8 = a.2 + b$

$4 = a.4 + b$

$\begin{cases} 2a + b = 8\ (-1) \\ 4a + b = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} -2a \cancel{-b} = -8 \\ 4a \cancel{+b} = 4 \end{cases}$

$2a = -4$

$a = \frac{-4}{2}$

$a = -2$

$2.a + b = 8$

$2(-2) + b = 8$

$-4 + b = 8$

$b = 8 + 4$

$b = 12$

$\boxed{P_B = -2 P_A + 12}$

Reta : pontos (4,4) e (8,2)

$(4,4)\ (8,2)$

$4 = a.4 + b$

$2 = a.8 + b$

$\begin{cases} 4a + b = 4\ (-1) \\ 8a + b = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} -4a \cancel{-b} = -4 \\ 8a \cancel{+b} = 2 \end{cases}$

$4a = -2$

$a = \frac{-2}{4}$

$a = \frac{-1}{2}$

$4.a + b = 4$

$\frac{4}{1} \cdot \frac{-1}{2} + b = 4$

$\frac{-4}{2} + b = 4$

$-2 + b = 4$

$b = 4 + 2$

$b = 6$

$\boxed{P_B = \frac{-1}{2} P_A + 6}$

Considerávamos esta questão um pouco simples, porque os alunos já haviam estudado este conteúdo em séries anteriores, mas nossas expectativas não foram confirmadas, ocasionando dessa forma o prolongamento do tempo neste item que estava previsto para uma aula e que acabou se entendendo por mais uma.

d) Os pontos situados fora do paralelogramo ou são inacessíveis ou são indesejáveis por Al e Bob. Dê um exemplo de um ponto inacessível?.......... e um ponto indesejável?............

Os alunos deveriam, neste item, encontrar valores inacessíveis ou indesejáveis por Al e Bob, fazendo uma análise do gráfico representado no item (a) deste exercício, eles sentiram dificuldades com a palavra inacessível mas após discussão entre eles, logo perceberam quais eram os pontos inacessíveis e indesejáveis. Dando valores como o ponto representado pelo par ordenado (1,1) para pontos inacessíveis e o par ordenado (9,9) representando valores indesejáveis.

Este item transcorreu sem maiores problemas.

8º) Solução do jogo para matriz de pagamento que não contém ponto de sela.

O objetivo desse item é encontrar a solução de um jogo com repetição e estratégias mistas para a matriz de pagamento que não contém ponto de sela.

O tempo necessário para esta atividade foi de 3 aulas de 50 minutos.

Algumas variáveis matemáticas necessárias para a resolução deste exercício são: matriz de pagamento; ponto máximo; ponto mínimo; ponto de sela; freqüência relativa; operações no conjunto dos números reais; média; média ponderada; representação gráfica dos pagamentos esperados no sistema cartesiano; variáveis; função linear; intervalo; intersecção de retas; pontos de fronteira entre regiões.

Apresentamos o item 4.1 que utiliza estratégia mista e pagamento esperado e o item 4.2 que apresenta a solução gráfica.

8º A) Solução de jogo para matriz de pagamento que não contém ponto de sela, utilizando estratégia mista e pagamento esperado.

Neste exercício, os alunos devem procurar uma estratégia mista e um pagamento esperado para algumas escolhas de estratégias mistas.

4. Solução do jogo para matriz de pagamento que não contém ponto de sela.
4.1. Estratégia mista e pagamento esperado.
Podemos considerar um jogo com estratégias mistas (com sucessivas rodadas) representado pela a matriz de pagamentos :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Sabendo que a linha representa as estratégias do jogador Linha e a coluna representa as estratégias do jogador Coluna. Complete:
a) o maximin do Jogador Linha é............ e o minmax do Jogador Coluna é ....

No item (a) o aluno deveria encontrar o maximin do jogador Linha (valor 3) e o minimax do jogador Coluna (valor 4), verificando que se o maximin era diferente do minimax portanto não existia ponto de sela para este jogo. Como já havia sido dado na atividade 4 (determinação do resultado de um jogo, exercício 1) o método do minimax e maximin, esperávamos que os alunos não tivessem tantos problemas ao responder essa questão, no que nossa expectativa foi confirmada. A maioria dos alunos não teve problema ao responder essa questão.

4.1. Estratégia mista e pagamento esperado. (continuação)

Como este é um jogo de rodadas sucessivas, vamos supor que o Jogador Linha utilize a estratégia 1 em 25 vezes de um total de 40 e a estratégia 2 nas outras 15 vezes, mas que a seqüência exata dessas jogadas não seja conhecida. Podemos representar a freqüência relativa desejada da i-ésima estratégia pelo símbolo x_i.

c) represente a freqüência relativa do jogador linha:

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{}{}, \frac{}{} \right) = \left(\frac{}{}, \frac{}{} \right)$$

onde x_1 é um número entre 0 e 1, tendo as freqüências relativas as propriedades:

$x_i \geq 0$ e $\sum_i x_i = 1$

Obs.: o símbolo Σ representa somatória

d) Durante o jogo, se o jogador Coluna utilizar somente a estratégia 1 na forma pura, o jogador Linha deve obter um pagamento de 5 em .... de todas as jogadas e um pagamento de 3 em ....do jogo. Assim podemos encontrar o pagamento esperado por jogada (E) que será a média ponderada:

$$E_1 = \frac{}{}(......) + \frac{}{}(.......) = \frac{}{}$$

onde o subscrito em E_1 indica que o jogador Coluna irá usar somente a estratégia pura 1.

Nessa atividade, os alunos deveriam perceber que em jogos com jogadas sucessivas, nem sempre o jogador joga a mesma estratégia, e que essas estratégias (mistas) podem ser representadas por uma freqüência relativa.

No item (c), o aluno deveria representar a freqüência relativa do jogador Linha e simplificar as frações encontradas, encontrando frações equivalentes à primeira, obtendo como resposta as freqüências:

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{25}{40}, \frac{15}{40} \right) = \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8} \right),$$

além de perceber que a freqüência relativa de cada estratégia, está entre 0 e 1.

No item (d), o objetivo era encontrar o valor do pagamento esperado por jogada quando o jogador Coluna utilizasse somente a estratégia 1 na forma pura. Levando o aluno a perceber que o valor esperado do jogador Linha, era a média ponderada das freqüências relativas das estratégias do jogador Linha, tendo como resultado o valor $\frac{17}{4}$.

Como os alunos não tinham disponíveis, alguns conceitos sobre média ponderada e freqüência relativa, foi necessário a intervenção da professora/pesquisadora, que explicou alguns conceitos necessários para a resolução desse exercício.

e) da mesma forma, se o jogador Coluna utilizar somente a estratégia 2 pura. Calcule o pagamento esperado pelo jogador Linha. $E_2 = \frac{\quad}{\quad}(......) + \frac{\quad}{\quad}(.......) = \frac{\quad}{\quad}$

Neste item, os alunos deveriam calcular o pagamento esperado pelo jogador Linha, quando o jogador Coluna utilizasse somente a estratégia 2 na sua forma pura. Encontrando como resultado o pagamento $\frac{11}{4}$. Como os alunos já haviam feito o item (d), não tiveram problema em resolver este.

f) Mas, se o jogador Coluna também misturar as suas estratégias, o pagamento esperado do jogador Linha estará em algum valor entre as duas médias ponderadas acima. Qual é o pagamento mínimo esperado pelo jogador Linha ao adotar a estratégia mista (x_1, x_2)?..........

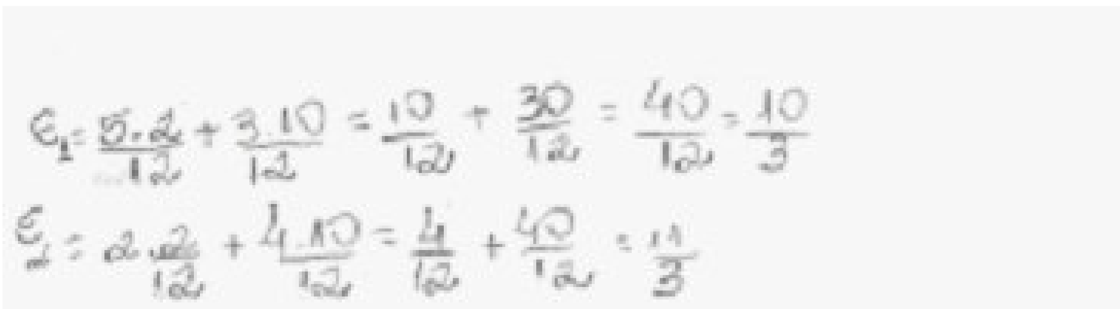
O objetivo desse item é levar o aluno a perceber que assim como o jogador Linha, o jogador Coluna também pode variar as suas estratégias (forma mista). Sendo assim, o aluno deveria verificar , entre os dois pagamentos esperados, qual era o pagamento mínimo. Obtendo como resposta o valor $\frac{11}{4}$.

Neste item, o problema que encontramos foi levar o aluno a perceber a diferença entre o pagamento esperado pelo jogador Linha, quando o jogador Coluna jogasse a estratégia 1 na forma pura, quando o jogador Coluna jogasse a estratégia 2 na sua forma pura ou quando o jogador Coluna também jogasse na forma de estratégias mistas. Neste ponto, alguns alunos acabavam se confundindo, não conseguiam dar seqüência ao raciocínio lógico, dessa forma também houve a intervenção da professora/pesquisadora para auxiliar no desenvolvimento do raciocínio.

g) supondo agora que o jogador Linha, irá utilizar uma outra escolha de estratégias na seguinte forma:

$(x_1', x_2') = \left(\frac{2}{12}, \frac{10}{12}\right)$, nesse caso, calcule os pagamentos esperados E_1 e E_2.

Para este item, o aluno deveria encontrar o pagamento esperado para as duas estratégias, como nos itens anteriores, só que desta vez, eles, desenvolveriam sozinhos o exercício. Os alunos, também, deveriam perceber que as escolhas estratégicas poderiam ser diferentes. Apresentamos a resolução do exercício feito por um dos alunos.



Os alunos não apresentaram grande dificuldade, neste item, pois já haviam resolvido os itens (d) e (e).

h) analisando os resultados, qual é o pagamento mínimo esperado?
Você poderia garantir que este pagamento mínimo esperado é a melhor escolha? Por quê?....
Desta forma, o jogador Linha deve buscar uma mistura particular que lhe dê o maior pagamento mínimo esperado possível por jogada, isto é, que gere o maximin.

Após resolução do item (g), o aluno deveria encontrar no item (h) o pagamento mínimo esperado, que seria o valor $\frac{10}{3}$, para em seguida responder a pergunta se essa era a melhor escolha estratégica.

O aluno deveria concluir que havia várias combinações de estratégias possíveis para o jogo, e perceber que dessa maneira, é difícil fazer a melhor escolha, analisando somente os resultados de duas combinações de estratégias. Abaixo, apresentamos algumas respostas dadas pelos alunos e suas justificativas.

Não, porque você pode ter infinitas escolhas.
Não, porque podem existir outras escolhas
Não, porque posso mudar para outras estratégias
Não, porque tem estratégia melhor

Notamos ao término desse exercício, que os alunos perceberam que as mudanças de estratégias resultam em um pagamento esperado diferente, compelindo o jogador Linha a buscar uma mistura particular de estratégias que lhe dê o maior pagamento mínimo esperado possível por jogada, isto é, que lhe dê o maximin.

8º B) Solução de jogo para matriz de pagamento que não contém ponto de sela: solução gráfica.

O objetivo deste exercício é apresentar uma solução gráfica para jogos que não possuem ponto de sela. Para tal foram utilizados os mesmos dados do exercício 4.1. O método gráfico é utilizado para encontrar valores ótimos das duas variáveis estratégicas envolvidas x_1 e x_2.

4.2. Solução gráfica.

Se existir somente duas linhas na matriz de pagamentos, podemos utilizar o método gráfico que consiste em encontrar os valores ótimos das duas variáveis x_1 e x_2. Como $x_1 + x_2 = 1$ podemos simplesmente encontrar apenas o valor de $\overline{x_1}$ e logo após, obter o valor de $\overline{x_2} = 1 - \overline{x_1}$, podendo assim representar a variável E (pagamento esperado) contra a variável independente x_1.

a)utilizando a matriz de pagamento $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ escreva os pagamentos esperados

E_1 e E_2 em termos das freqüências relativas x_1 e $(1 - x_1)$.

$E_1 = x_1.(......) + (1 - x_1).(.......) = ...$

e

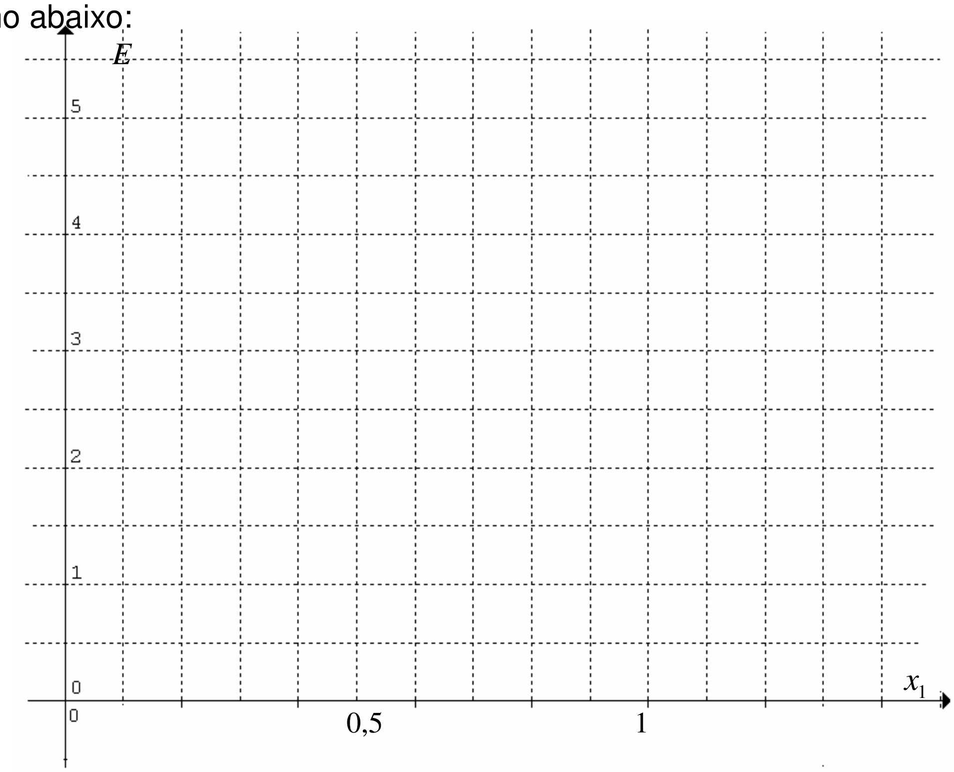
$E_2 = ...= ....$

Cada uma delas expressa o pagamento esperado E como uma função linear de x_1 e é representada por uma linha reta.

Os alunos deveriam escrever os valores dos pagamentos esperados para E_1 e E_2 em função das variáveis x_1 e x_2, encontrando a função linear de cada uma delas, obtendo como resposta $E_1 = 2x_1 + 3$ e $E_2 = -2x + 4$.

Nesse item, os alunos sentiram bastante dificuldade, pois não tinham o conhecimento de como representar o pagamento esperado em função de variáveis. Desta forma, a professora/pesquisadora interveio, apresentando um outro exemplo na lousa, com uma resolução parecida. Alguns tiveram problemas para trabalhar com as operações algébricas o que dificultou um pouco o andamento do exercício. Mas, ao final, a grande maioria conseguiu resolver.

b) represente os pagamentos esperados encontrados no item anterior no sistema cartesiano abaixo:



Neste exercício, os alunos deveriam representar no plano cartesiano os pagamentos esperados encontrados no item (a).

Nossa expectativa para a resolução desse exercício era de que os alunos não tivessem grandes dificuldades, mas não foi o que ocorreu. O conteúdo, representação gráfica de funções, não estava disponível aos alunos. Dessa forma, a professora/pesquisadora, novamente fez uma intervenção, com um exemplo parecido na lousa, para auxiliá-los na resolução desse item.

Depois da intervenção da professora pesquisadora, a maioria dos alunos não teve mais problemas, embora houvesse alguns alunos que ainda continuavam com dúvidas. Para estes, a professora/pesquisadora explicou novamente, mas em particular, ao final do exercício e da aula.

c) Como x_1 não pode estar abaixo de 0 e também não pode estar acima de 1 , podemos analisar somente o intervalo [0,1]. Hachure a área formada pelo conjunto de todos os pagamentos esperados possíveis. O princípio do maximin determina que o jogador Linha defina o conjunto de todos os pagamentos mínimos esperados e, então, encontre o valor de que maximiza o pagamento esperado entre esses mínimos.

d) O conjunto de mínimos é o conjunto dos pontos situados na fronteira inferior da região sombreada. Denomine o ponto máximo dessa fronteira por M.

Para os itens (c) e (d) os alunos deveriam hachurar a área formada pelo conjunto de todos os pagamentos esperados possíveis, encontrando desta forma, o pagamento máximo esperado entre os pagamentos mínimos esperados, denominando esse ponto pela letra M.

No item (c) os alunos tiveram dificuldades para perceber qual seria a região a ser hachurada, ou seja, qual seria o conjunto de todos os pagamentos mínimos esperados, somente após análise e reflexão sobre o gráfico é que eles entenderam este item.

e) Já que M é a intersecção das retas E_1 e E_2, então encontre o valor de $\overline{x}_1$.

f) por dedução encontre o valor de $\overline{x_2}$

Neste item, os alunos deveriam perceber que como M era a intersecção das retas E_1 e E_2 então poderiam encontrar o valor de $\overline{x_1}$ e de $\overline{x_2}$.

Os alunos tiveram um pouco de dificuldade por não se lembrar como encontrar os valores de $\overline{x_1}$ e de $\overline{x_2}$. Mas, após breve discussão sobre esse problema com a professora/pesquisadora não houve maiores dificuldades.

g) então a estratégia ótima será $\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}\right) = \left(\frac{}{}, \frac{}{}\right)$

Sabendo-se que há apenas duas colunas na matriz de pagamento, este método também pode ser utilizado para determinar a estratégia mista ótima do Coluna.

Os alunos deveriam obter a estratégia ótima $\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ para o jogador Linha, percebendo que é possível encontrar a estratégia ótima de um jogo que não contém ponto de sela.

h) encontre a estratégia ótima do jogador Coluna para a matriz de pagamentos $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Após resolução dos itens anteriores, os alunos já deveriam estar aptos a encontrar o valor da estratégia ótima para o jogador Coluna, porém, o único fato que os atrapalhou foi não perceber que as estratégias do jogador Coluna tinham pagamento esperado do jogador Linha. Mas, após discussão sobre esse problema os alunos resolveram sem maiores dificuldades.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscou-se nesta dissertação aplicar a Teoria dos Jogos no Ensino Médio, para responder as perguntas: Será possível ensinar a Teoria dos Jogos para alunos do Ensino Médio? Para que ensinar a Teoria dos Jogos? e Como poderia ser feito isto?. Assim, utilizamos uma seqüência de atividades que foi aplicada durante as aulas de matemática com o consentimento e aprovação dos alunos.

Os resultados dessa seqüência foram analisados de forma gradativa, sempre ao final de cada atividade ou item, revelando que a seqüência foi adequada aos objetivos propostos.

Os alunos, logo no início, mostraram-se bastante interessados, prestando atenção a tudo que dizíamos, o que foi interessante, pois, geralmente é difícil conseguir a atenção deles durante muito tempo, principalmente, nas aulas de matemática.

No jogo do Par ou Impar, eles queriam brincar com a professora e com os colegas, nós achamos que eles já estão crescidos e que não precisam mais brincar e que nossa presença não é importante, mas acredito que é. Vemos nossos alunos simplesmente como máquinas que precisam ser ensinadas para dar determinadas respostas, mas eles, na verdade, são "crianças grandes" que na maioria das vezes, não tiveram o amor e afeto de seus familiares e acabam procurando chamar nossa atenção de alguma maneira. Eles precisam saber que são importantes para alguém.

Ao final das aulas, alguns alunos sempre comentavam sobre não ter visto o tempo passar. Alguns alunos procuraram a professora/pesquisadora na hora do intervalo das aulas, para falar sobre estar gostando das aulas de matemática e do conteúdo apresentado. Gostaram, também, de trabalhar com uma seqüência de atividades, levando-os a prestar mais atenção no que estavam fazendo.

Embora, acreditemos, que após os resultados obtidos nesse trabalho, seja possível ensinar a Teoria dos Jogos para alunos do Ensino Médio, detectamos várias dificuldades na aplicação da seqüência didática, uma vez que supondo que os alunos dominassem determinados conteúdos, noções e procedimentos, tais como: interpretação do enunciado do problema apresentado na linguagem natural; cálculo do valor numérico, resolução de operações com expressões algébricas e numéricas no conjunto dos números reais; obtenção de expressões algébricas; localização de pontos no gráfico; identificação da reta como sendo a representação gráfica de uma função do 1º grau, interpretação do resultado obtido; dar significado à intersecção dos gráficos obtidos construídos no plano cartesiano, que representavam as funções dadas; representação de freqüência relativa, determinação de média ponderada.

Nenhuma dessas dificuldades fazia parte do nosso objeto de estudo, o que interferiu no ritmo do nosso trabalho, mostrando-nos que se tornam necessários complementos, nessa seqüência, que contemple a aquisição destes conteúdos paralelamente com a Teoria dos Jogos.

Após a aplicação da seqüência didática, percebemos que os alunos demonstraram maior interesse e empenho no estudo da Matemática.

O estudo da Teoria dos Jogos desenvolveu, no aluno, um maior senso crítico, ajudando-os na tomada de decisão em situações da vida cotidiana, principalmente porque a Teoria dos Jogos tem como princípio básico utilizar conceitos matemáticos para analisar situações de interação entre indivíduos.

Acreditamos que a Teoria dos Jogos pode ser ensinada no Ensino Médio, não como mais um instrumento utilizado para rever conteúdos, mas como um novo conceito, uma nova maneira de se ensinar Matemática, com o objetivo de desenvolver no aluno, o interesse pela Matemática e por tudo o que ela representa na construção do conhecimento.

Com os resultados desta pesquisa, acreditamos que a Teoria dos Jogos pode ser ensinada no Ensino Médio, de maneira introdutória, utilizando os métodos minimax e maximin para jogos de soma-zero, e eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas, além dos outros métodos descritos neste trabalho.

Isso pode ser feito através de uma seqüência didática, conforme demonstramos.

BIBLIOGRAFIA

AUMANN,R.J. Autobiography. Disponível em http://nobelprize.org/nobel. Acesso em: 26 de Janeiro de 2007.

BEKMAN, O.R. e NETO, P.C. *Análise Estatística da Decisão*. São Paulo.Edgard Blücher, 1980.

BENTHAN, J. *An Introduction to the principles of Morals and Legislation*. Disponível em http://www.constitution.org/jb/pml.htm, Acesso em: 08 de Janeiro de 2007.

BÊRNI, D.A. *Teoria dos Jogos: Jogos de Estratégia, Estratégia Decisória , Teoria da Decisão*. Rio de Janeiro, Reichmann & Affonso, 2004.

BERNSTEIN, P.L. *Desafio aos Deuses:a Fascinante Historia do Risco*. Trad. Ivo Korytowski.Rio deJaneiro, Campus, 1997.

BOYER, C.B. *História da Matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo,Edgar Blücher Ltda., 1999.

CARVALHO, H. e MACHADO, V.C. Teoria dos Jogos. Disponível em

CHIANG. A.C.*Matemática para Economistas*. Trad. Luiz Salvador Lopes. São Paulo, McGraw Hill, 1982.

D'AMBROSIO,U. *Educação Matemática:Da teoria à prática.*São Paulo, Papirus, 2006.

_____________. A matemática como prioridade numa sociedade moderna. Revista Dialogia ,v. 4, 2005.

DAVIS, M.D. *Teoria dos Jogos, Uma Introdução não-técnica*. Trad. Leônidas Hegenber e Octanny Silveira da Mota. São Paulo, Cultrix, 1973.

FEITEIRA, R. *Programação Linear e Teoria dos Jogos: que lugar podem ocupar nos actuais programas de Matemática?* Revista Educação e Matemática. V. 88, pp. 01-06, 2006.

FIANI, R. *Teoria dos Jogos: para Cursos de Administração e Economia*. Rio de Janeiro, Elsevier, 2006.

GURA, E. *Game Theory as A "Different"" mathematical experience for high school students*. 2005

________.Using *Game Theory to increase students' motivation to learn mathematics*. 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education. pp. 515-520

________. Changing *ways of thinking about mathematics by teaching game theory*. Jerusalém,1989. Unpublished doctirial dissertation, 1989.

_________. *Teaching mathematics in natural language*. Jerusalém. 2006

HARSANYI, J.C. *Autobiography*. Disponível em http://nobelprize.org/nobel. Acesso em: 26 de Janeiro de 2007.

HUNT, E.K. *História do Pensamento Econômico*. Trad. José Ricardo Brandão Azevedo. Rio de Janeiro, Campus, 1981.

LEONARD, R.J. *Reading Cournot, reading Nash: The Creation and Stabilisation of the Nash Equilibrium*. The Economic Journal, v. 104 pp. 492-511, 1994.

________. *From de Parlor Games to Social Science: Von Neumann, Morgenstern, and the Creation of Game Theory*. Journal of Economic Literature, v. XXXIII, pp. 730-761, 19995.

MARINHO, R. *Prática na Teoria: Aplicações da Teoria dos Jogos e da Evolução aos Negócios*. São Paulo, Saraiva, 2005.

_______. *Uma estratégia brilhante*. http:/vocesa.abril.uol.com.Br/aberto/online/ Acesso em: 05 de Setembro de 2006.

MYERSON, R.B. *Nash Equilibrium and the History of Economic Theory*. Journal of Economic Literature. Vl XXXVII pp. 1067-1082, 1999.

NASAR,S. *Uma Mente Brilhante*. Trad. Sergio Moraes Rego. Rio de Janeiro, Record, 2002.

von NEUMANN, J. e MORGENSTERN, O. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 2004.

SANTOS, P.A. Uma Introdução a Teoria dos Jogos. Disponível em www.uesc.br/arbelos/arquivo/monografias/2003.2/teoria-dos-jogos.pdf. Acesso em: 17 de Janeiro de 2007.

SELTEN, R. *Autobiografy*. Disponível em http://nobelprize.org/nobel. Acesso em: 26 de Janeiro de 2007.

SILVA, A.R. *Teoria dos Jogos e da Cooperação para Filósofos*. Disponível em http://www.discursus.oi.com.br/tjcf/tjcfcur.html . Acesso em: 17 de Junho de 2006.

SOUSA, P.H. *Theory of Games and Economic Behaviour: A Idéia de Ciência de John von Neumann e Oskar Morgenstern*. Dissertação, São Paulo, PUC, 2005.

ZUGMAN, F. *Teoria dos Jogos: Uma introdução à disciplina que vê a vida como uma seqüência de jogos*. Disponível em http://www.iced.org.br/artigos/teoria_jogos.PDF. Acesso em: 05 de Setembro de 2006.

WEBER, J.E. *Matemática para Economia e Administração*. Trad. Seiji Hariki.São Paulo, Harbra. 1986.

http://br.geocities.com/discursus/archistx/sloveace.html acesso, 18 de Janeiro de 2007

Dr. Fantástico (*Dr. Strangelove, or How I Learned to Stop Worrying and Love the Bomb*, 1963/4)

http://pt.wikipedia.org/wiki/Uma_mente_brilhante, acesso em 18 de Janeiro de 2007

ANEXOS

1- Sequência Didática

Introdução histórica da Teoria dos Jogos.

- Iniciou com o livro Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico (Theory of Games and Economic Behaviour) escrito por John von Neumann e Oskar Morgenstern em 1944;
- John F. Nash, Jr (livro e filme Uma Mente Brilhante): equilíbrio de Nash
- Além dos teóricos acima, podemos citar também John Harsanyi; Reinhard Selten; Robert Aumann, Thomas Shelling, Martin Schubik entre outras importantes personalidades da Teoria dos Jogos;
- A Teoria dos jogos tem como objetivo permitir uma abordagem dos problemas econômicos sob um novo ponto de vista, mas ela tem aparecido em diversas áreas de aplicação. Além da economia, podemos encontrá-la na ciência política, matemática pura, psicologia, sociologia, finanças, guerra e até mesmo na evolução biológica que tem fatores quantificáveis.

Estrutura da Teoria dos Jogos

- Foi desenvolvida com a finalidade de analisar situações competitivas que envolvem interesses conflitantes.
- Fornece um resultado do jogo, admitindo que cada um dos jogadores deseja maximizar seu lucro mínimo esperado, ou minimizar sua perda máxima esperada. Critério minimax ou maximin.
- Elementos necessários para a compreensão do objeto de estudo: regras, ações de cada jogador, jogador, racionalidade, comportamento estratégico.

Atividade 1- Utilidade

1. Em cada item abaixo, expresse em forma de valor numérico de 1 a 3 , escrevendo 3 para o que você prefere mais 1 para o que é menos preferível por você.

a) shopping ( )	barzinho ( )	praia ( )
b) Rap ( )	rock ( )	samba ( )
c) maçã ( )	pêra ( )	laranja ( )
d) ir a escolar ( )	sair com amigos ( )	ficar em casa ( )
e) amizade ( )	honestidade ( )	respeito ( )
f) aprender ( )	ser aprovado na escola ( )	satisfazer sua família ( )

Definição: “utilidade é a força de nosso desejo de algo” (BÊRNI, 1997)

Atividade 2. Estratégias

Descrição completa de como um jogador deverá agir sob quaisquer circunstâncias possíveis.

Vamos jogar “Par” ou “Impar”

1.Jogue com o seu amigo ao lado “Par” ou “Impar” uma única rodada e anote sua estratégia no quadro abaixo:

Eu	Meu parceiro	Resultado (Ganhei/Perdi)

Responda:

Por que você optou por esta estratégia?..

....

2. Jogue novamente, mas agora haverá cinco rodadas no jogo, não esqueça de anotar a estratégia em cada rodada.

Rodada	Eu	Meu parceiro	Resultado (Ganhei/Perdi)
1ª			
2ª			
3ª			
4ª			
5ª			

Responda

Neste exercício você adotou a mesma estratégia para cada rodada?.....................

Como você descreveria a sua estratégia para ganhar o jogo..

....
....

Estratégias puras: adoção de uma estratégia em cada possível situação. Estratégias mistas: alternância de estratégias aleatoriamente através de uma atribuição de probabilidade a cada estratégia escolhida.

Atividade 3 - Representação dos jogos de estratégia

1. Podemos representar o jogo do “Par” ou “Impar” na forma normal ou estratégica. As estratégias do jogador Linha , podem ser: jogar 1 ou jogar 2 e as estratégias do jogador Coluna podem ser: jogar 1 ou jogar 2. Preencha a tabela colocando o par ordenado (Jogador Linha, Jogador Coluna) nos espaços em branco.

Estratégias		Jogador Coluna	
		1	2
Jogador Linha	1		
	2		

“As matrizes servem para mostrar de forma clara e simples as respostas que podem ser esperadas em função das ações escolhidas simultaneamente.”

2. Representação na forma estendida. Podemos representar os resultados do jogo através da árvore de possibilidades.

Represente as estratégias do exercício anterior e seus resultados , através de uma árvore de possibilidades.

3. Representação na forma de matriz

Para o jogo "Par" ou "Impar", acima representaremos a matriz de pagamento do Jogador Linha quando ele joga "Par" , indicando +1 para "ganho" e –1 para "perda".

Estratégias		Jogador Coluna	
		1	2
Jogador Linha	1		
	2		

$$A = \begin{pmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{pmatrix}$$

Atividade 4. Determinação do resultado de um jogo

1. Método Minimax e Maximin para jogos de soma zero.

Na escola em que você estuda está acontecendo a eleição para o Grêmio Estudantil.Dois grupos estão participando, chamaremos os grupos de A e B. Para ganhar as eleições o grupo A pode fazer sua campanha através do jornal da escola (estratégia A_1) , panfleto (estratégia A_2) ou na rádio da escola (estratégia A_3).

O grupo B pode fazer sua campanha no jornal da escola (estratégia B_1), no mural da escola (estratégia B_2), na rádio da escola (estratégia B_3) ou por e-mail para os alunos (estratégia B_4).

A matriz de resultados abaixo resume a percentagem de votos ganhos ou perdidos pelo Grupo A.

		Grupo B			
		B_1	B_2	B_3	B_4
Grupo A	A_1	11	0	12	-1
	A_2	9	8	9	11
	A_3	0	7	-8	8

Obs. Esta é a matriz de pagamentos para o Grupo A, ou seja, se o Grupo A escolher o jornal da escola para fazer sua campanha (A_1) e o Grupo B escolher a rádio da escola (B_3) então o Grupo A ganha 12% dos votos e B perde 12 %.

1.A) . Copie a matriz de pagamento acima e encontre o valor mínimo de cada linha, escrevendo na coluna Min Linha.

		Grupo B				
		B_1	B_2	B_3	B_4	Min Linha
Grupo A	A_1					
	A_2					
	A_3					

b) Se o Grupo A escolher a estratégia A_1 , independente da escolha do Grupo B, o pior que pode acontecer é ....

c) Se o Grupo A escolher a estratégia A_2 , independente da escolha do Grupo B, o pior que pode acontecer é ....

d) Se o Grupo A escolher a estratégia A_3, independente da escolha do Grupo B, o pior que pode acontecer é ....

e) Entre os valores mínimos de cada linha, qual é o maior valor ?............................

Este valor é chamado Maximin.

f) Portanto o Grupo A deve escolher a estratégia..............., que resulta no melhor dos piores resultados.

1.B). Agora, vamos pensar no Grupo B!

a) Copie a matriz de pagamento novamente e encontre o valor máximo de cada coluna, escrevendo na coluna Max Coluna.

		Grupo B			
		B_1	B_2	B_3	B_4
Grupo A	A_1				
	A_2				
	A_3				
	Max Coluna				

Obs. Não se esqueça que esta é a matriz de resultados do Grupo A

b) se o Grupo B escolher a estratégia B_1 , pior que pode acontecer é ....

c) se o Grupo B escolher a estratégia B_2, o pior que pode acontecer é ....

d) se o Grupo B escolher a estratégia B_3 , o pior que pode acontecer é ....

e) se o Grupo B escolher a estratégia B_4, o pior que pode acontecer é ....

g) entre os valores máximos qual é o menor valor?...

Este valor é chamado Minimax.

h) o Grupo B deve escolher a estratégia ...., pois representa o menor dos melhores resultados do Grupo A.

i) qual deve ser a solução ótima do jogo?...

1.C). Vamos agora, juntar todas as informações na tabela abaixo:

a) Copie a tabela com os valores dos resultados do jogos , preenchendo os valores Min Linha e Max Coluna.

		Grupo B				
		B_1	B_2	B_3	B_4	Min Linha
Grupo A	A_1					
	A_2					
	A_3					
	MaxColuna					

Maxmin ....

Minmax ....

Se MiniMax =Maximin temos um “ponto de sela” e esta será a solução do jogo.

2. Método da eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas.

Dado que a matriz de recompensas é de conhecimento comum, os jogadores podem desconsiderar as estratégias cujas recompensas são menores que as outras. Estas estratégias são chamadas de estratégias dominadas.

Duas empresas A e B , fabricantes de carros, lançaram sua nova versão de modelo popular este ano. Para sua campanha publicitária, a empresa A irá utilizar as estratégias A_1, A_2, A_3 e A_4 e a empresa B utilizará as estratégias B_1, B_2, B_3 e B_4. A matriz de pagamentos esperado (lucro em milhões) está representada abaixo:

Estratégias		Empresa B			
		B_1	B_2	B_3	B_4
Empresa A	A_1	(3,3)	(2,2)	(4,3)	(3,4)
	A_2	(2,0)	(1,3)	(0,2)	(2,0)
	A_3	(3,4)	(4,2)	(2,2)	(0,3)
	A_4	(4,3)	(2,1)	(3,1)	(4,2)

a) Compare as estratégias da empresa A (linha), elemento a elemento, independente da escolha da empresa B, existe alguma estratégia dominada entre as estratégias da empresa A?................. Se sim, qual?...............

b) Compare as estratégias da empresa B (coluna), elemento a elemento, independente da escolha da empresa A, existe alguma estratégia dominada entre as estratégias da empresa B?................. Se sim, qual?...............

c) Copie a tabela novamente eliminando a estratégia dominada.

		Empresa B			
Empresa A					

d) Compare as estratégias da empresa A (linha), elemento a elemento, independente da escolha da empresa B, existe alguma estratégia dominada entre as estratégias da empresa A?................ Se sim, qual?..............

e) Compare as estratégias da empresa B (coluna), elemento a elemento, independente da escolha da empresa A, existe alguma estratégia dominada entre as estratégias da empresa B?................ Se sim, qual?..............

f)Copie a tabela novamente eliminando a estratégia dominada.

Estratégias		Empresa B		
Empresa A				

g) Compare as estratégias da empresa A (linha), elemento a elemento, independente da escolha da empresa B, existe alguma estratégia dominada entre as estratégias da empresa A?................. Se sim, qual?...............

h) Compare as estratégias da empresa B (coluna), elemento a elemento, independente da escolha da empresa A, existe alguma estratégia dominada entre as estratégias da empresa B?................. Se sim, qual?...............

i) Copie a tabela novamente eliminando a estratégia dominada.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Estratégias</td><td colspan="2">Empresa B</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Empresa A</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

j) Compare as estratégias da empresa A (linha), elemento a elemento, independente da escolha da empresa B, existe alguma estratégia dominada entre as estratégias da empresa A?................. Se sim, qual?...............

k) Compare as estratégias da empresa B (coluna), elemento a elemento, independente da escolha da empresa A, existe alguma estratégia dominada entre as estratégias da empresa B?................. Se sim, qual?...............

l) Copie a tabela novamente eliminando a estratégia dominada.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Estratégias</td><td colspan="2">Empresa B</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Empresa A</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

m) eliminando todas as estratégias dominadas, qual deve ser a estratégia utilizada pelas empresas A e B?..

n) a escolha da estratégia deve ser feita por qual empresa ?.........................

Uma estratégia dominada não precisa ser inferior em todos os seus elementos, ela pode ser igual, pois se ela não é nem melhor nem pior que a outra.

3. Método gráfico.

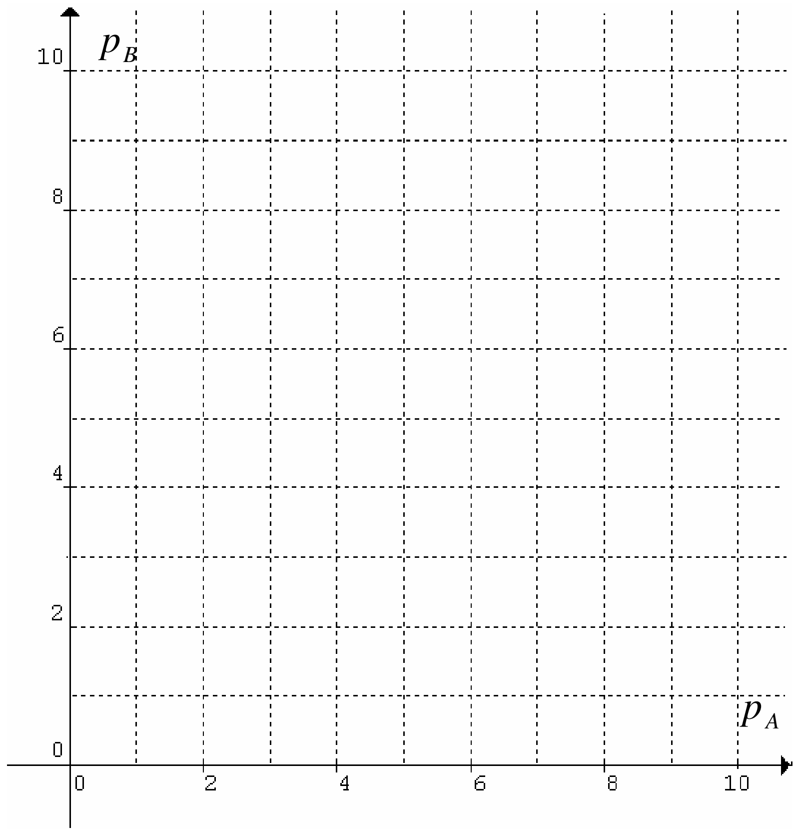
Na Teoria dos Jogos, existe um jogo chamado “Dilema do Prisioneiro”, vamos utilizá-lo como exemplo para este método.

O Dilema do Prisioneiro é a situação em que a polícia prende dois cúmplices, Al e Bob, por suspeitar que eles cometeram um crime considerado grave, mas têm provas insuficientes para condená-los por este crime, porém, pode deixá-los na prisão por um crime menor. Levados à delegacia e colocados em selas separadas, o promotor oferece a ambos o mesmo acordo: se um dos prisioneiros testemunhar para a procuradoria contra o outro e o outro permanecer calado, o traidor pega apenas dois anos de cadeia e o seu cúmplice, se não o trair pega oito anos. Se ambos ficarem em silêncio, podem ser condenados a quatro anos de prisão, cada um. Se ambos traírem o comparsa, cada um leva seis anos. As decisões são simultâneas e um não sabe nada sobre a decisão do outro.

A matriz abaixo representa o jogo Dilema dos Prisioneiros

Estratégias		Bob	
		Confessa	Não confessa
Al	Confessa	6,6	2,8
	Não Confessa	8,2	4,4

a) Coloque os resultados do jogo no sistema de eixos cartesianos abaixo (pares ordenados) , em que p_A informa os pagamentos de Al e p_B informa os pagamentos de Bob.



b) Unindo os pontos encontrados, feche os contornos desta figura.

c) Através do pontos, encontre a equação de cada reta que forma a figura encontrada.

Reta : pontos (2,8) e (6,6)	Reta: pontos (6,6) e (8,2)
Reta : pontos (2,8) e (4,4)	Reta : pontos (4,4) e (8,2)

d) Os pontos situados fora do paralelogramo ou são inacessíveis ou são indesejáveis por Al e Bob. Dê um exemplo de um ponto inacessível?.......... e um ponto indesejável?............

4. Solução do jogo para matriz de pagamento que não contém ponto de sela.

4.1. Estratégia mista e pagamento esperado.

Podemos considerar um jogo de estratégias mistas (com sucessivas rodadas) representado pela a matriz de pagamentos :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Sabendo que a linha representa as estratégias do jogador Linha e a coluna representa as estratégias do jogador Coluna. Complete:

a) o maximin do Jogador Linha é........... e o minmax do Jogador Coluna é ....

b) existe ponto de sela?...............................

Como este é um jogo de rodadas sucessivas, vamos supor que o Jogador Linha utilize a estratégia 1 em 25 vezes de um total de 40 e a estratégia 2 nas outras 15 vezes, mas que a seqüência exata dessas jogadas não seja conhecida. Podemos representar a freqüência relativa desejada da i-ésima estratégia pelo símbolo x_i.

c) represente a freqüência relativa do jogador linha:

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{\quad}{\quad}, \frac{\quad}{\quad} \right) = \left(\frac{\quad}{\quad}, \frac{\quad}{\quad} \right)$$

onde x_1 é um número entre 0 e 1, tendo as freqüências relativas as propriedades:

$$x_i \geq 0 \text{ e } \sum_i x_i = 1$$

Obs.: o símbolo Σ representa somatória

d) Durante o jogo, se o jogador Coluna utilizar somente a estratégia 1 na forma pura, o jogador Linha deve obter um pagamento de 5 em .... de todas as jogadas e um pagamento de 3 em ....do jogo. Assim podemos encontrar o pagamento esperado por jogada (E) que será a média ponderada:

$$E_1 = \text{——}(......) + \text{——}(.......) = \text{———}$$

onde o subscrito em E_1 indica que o jogador Coluna irá usar somente a estratégia pura 1.

e) da mesma forma, se o jogador Coluna utilizar somente a estratégia 2 pura. Calcule o pagamento esperado pelo jogador Linha.

$$E_2 = \text{——}(......) + \text{——}(.......) = \text{———}$$

f) Mas, se o jogador Coluna também misturar as suas estratégias, o pagamento esperado do jogador Linha estará em algum valor entre as duas médias ponderadas acima. Qual é o pagamento mínimo esperado pelo jogador Linha ao adotar a estratégia mista (x_1, x_2)?..........

g) supondo agora que o jogador Linha, irá utilizar uma outra escolha de estratégias na seguinte forma:

$(x_1', x_2') = \left(\frac{2}{12}, \frac{10}{12}\right)$, nesse caso, calcule os pagamentos esperados E_1 e E_2.

h) analisando os resultados, qual é o pagamento mínimo esperado?

Você poderia garantir que este pagamento mínimo esperado é a melhor escolha? Por quê?....

Desta forma, o jogador Linha deve buscar uma mistura particular que lhe dê o maior pagamento mínimo esperado possível por jogada, isto é, que gere o maximin.

4.2. Solução gráfica

Se existir somente duas linhas na matriz de pagamentos, podemos utilizar o método gráfico que consiste em encontrar os valores ótimos das duas variáveis x_1 e x_2. Como $x_1 + x_2 = 1$ podemos simplesmente encontrar apenas o valor de $\overline{x_1}$ e logo após, obter o valor de $\overline{x_2} = 1 - \overline{x_1}$, podendo assim representar a variável E (pagamento esperado) contra a variável independente x_1.

a)utilizando a matriz de pagamento $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ escreva os pagamentos esperados E_1 e E_2 em termos das freqüências relativas x_1 e $(1 - x_1)$.

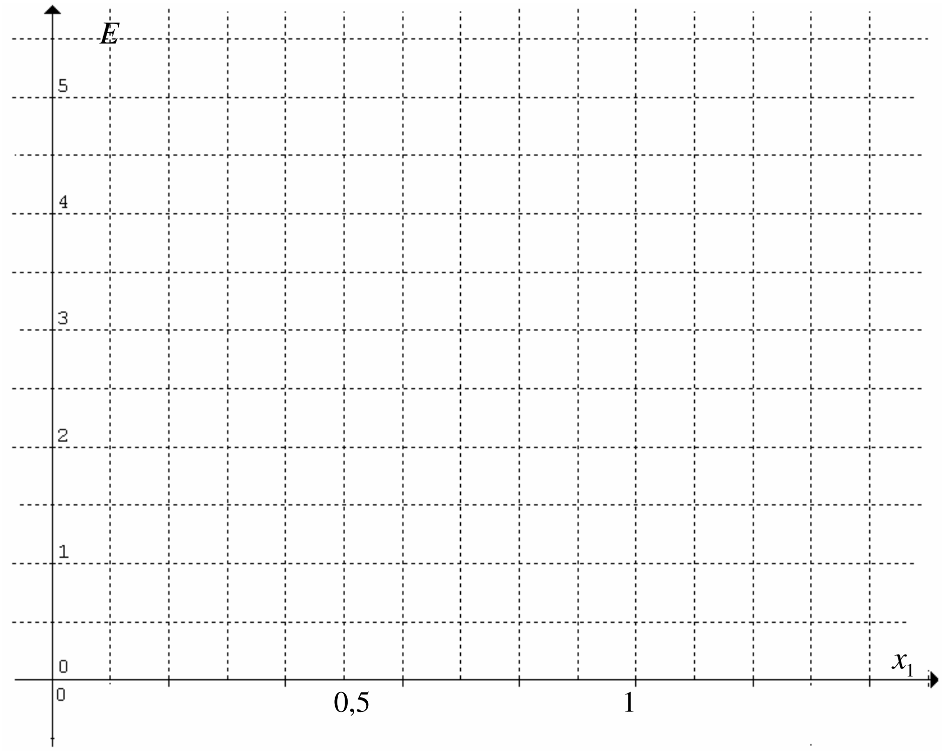
$$E_1 = x_1.(......) + (1 - x_1).(.......) = ...$$

e

$$E_2 = ... = ...$$

Cada uma delas expressa o pagamento esperado E como uma função linear de x_1 e é representada por uma linha reta.

b) represente os pagamentos esperados encontrados no item anterior no sistema cartesiano abaixo:



c) Como x_1 não pode estar abaixo de 0 e também não pode estar acima de 1 , podemos analisar somente o intervalo [0,1]. Hachure a área formada pelo conjunto de todos os pagamentos esperados possíveis. O princípio do maximin determina que o jogador Linha defina o conjunto de todos os pagamentos mínimos esperados e, então, encontre o valor de que maximiza o pagamento esperado entre esses mínimos.

d) O conjunto de mínimos é o conjunto dos pontos situados na fronteira inferior da região sombreada. Denomine o ponto máximo dessa fronteira por M.

e) Já que M é a intersecção das retas E_1 e E_2, então encontre o valor de $\overline{x_1}$.

f) por dedução encontre o valor de $\overline{x_2}$

g) então a estratégia ótima será $\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}\right) = \left(\frac{}{}, \frac{}{}\right)$

Sabendo-se que há apenas duas colunas na matriz de pagamento, este método também pode ser utilizado para determinar a estratégia mista ótima do Coluna.

h) encontre a estratégia ótima do jogador Coluna para a matriz de pagamentos $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

2- Personalidades da Teoria dos Jogos

2.1.John von Neumann

John von Neumann nasceu em Budapeste, Hungria, em 28 de Dezembro de 1903, tendo sido registrado como Neumann János Lajos Margittai, filho de Neumann Miksa (Max Neumann) e Kann Margit (Margaret Kann). Com apenas 3 anos já conseguia decorar a maior parte dos números de telefones de quase todos os membros da família. Ele e seus irmãos tinham governantas alemãs e francesas para que fossem fluentes nas línguas necessárias ao sucesso na sociedade húngara do início do século XX.

Estudou no Ginásio Luterano, de 1911 a 1921. Embora quisesse estudar matemática, vontade não aprovada por seu pai, formou-se em engenharia química, em 1925 no Swiss Federal Institute of Technology, em Zurique. Em 1926, obteve seu PhD, em matemática, na Universidade de Budapeste.

Sua carreira acadêmica começou na Universidade de Berlim, onde foi o mais jovem Privat Dozent (um tipo de professor assistente). Mudou-se para a Universidade de Hamburgo, onde ficou entre 1929 e 1930. Fez o pós-doutorado na Universidade de Göttingen, onde teve como professor o matemático David Hilbert.

Mudou-se para os Estados Unidos e foi nomeado integrante do Instituto de Estudos Avançados de Princeton (IEA), criado em 1933.

Durante a década de 20 , von Neumann envolveu-se com a teoria quântica, publicando um trabalho sobre a questão do indeterminismo.

Von Neumann participou de vários projetos de pesquisa, como a mecânica quântica, teoria dos conjuntos, teoria dos jogos, computação eletrônica etc.

Na década de 30 , dedicou-se à Teoria dos Jogos, escrevendo o livro Theory of Games and Economic Behavior juntamente com Oskar Morgenstern.

Segundo Nasar, foi Neumann, quem primeiro reconheceu que o comportamento social poderia ser analisado por meio de jogos.

> Uma ocupação aparentemente trivial e lúdica como o pôquer, afirmou von Neumann, pode conter a chave de assuntos humanos mais sérios por duas razões. Tanto o pôquer como a competição econômica, exigem um certo tipo de raciocínio de vantagens e desvantagens baseado num certo sistema de valores internamente coerente (mais é melhor do que menos). E em ambos o resultado de qualquer ator individual depende não apenas de suas próprias ações, mas de ações independentes dos outros.
>
> (NASAR,2002, p.17)

Em 1928, demonstrou que todo jogo finito de soma zero com duas pessoas possui uma solução em estratégias mistas. A demonstração original usa topologia e análise funcional. Em 1937, forneceu uma nova demonstração baseada no teorema do ponto fixo de Brouwer.

Foi consultor da IBM, participando de várias etapas da concepção e construção do computador eletrônico. Durante a Segunda Guerra, depois de estudar o Eniac(Eletronic Numeric Integrator and Calculator),primeiro computador eletrônico, apresentou novas idéias para um novo computador. Von Neumann sugeriu que as instruções fossem armazenadas na memória do computador. Até então elas eram lidas de cartões perfurados e executadas, uma a uma. Armazenar as informações na memória, para depois executá-las, tornaria o computador mais rápido, já que, no momento da execução, as instruções seriam obtidas com rapidez eletrônica.

Em 1943, foi convidado por J. Robert Oppenheimer para trabalhar no Projeto Manhattan que teve como resultado concreto as bombas de Hiroshima e Nagasaki. Sua área de trabalho lá, era em cálculos sobre a implosão da bomba atômica, ele também projetou as lentes auto-explosivas utilizadas nas bombas, Neumann participou ativamente na discussão política sobre a questão do uso de artefatos atômicos.

Na década de 1950, von Neumann deixou a Rand Corporation, uma empresa de pesquisas de alto nível da Força Aérea americana instalada em Santa Mônica, na Califórnia, e foi trabalhar para a Comissão de Energia Atômica, assessorando o Governo Americano durante uma parte da guerra fria. Porém não ficou muito tempo nessa posição, pois logo ficou doente.

Especula-se que teria servido como um dos modelos para o diretor de cinema Stanley Kubrick no filme *Dr. Strangelove or: How I Learned to Stop Worrying and Love the Bomb* – no Brasil, *Doutor Fantástico*

John von Neumann faleceu no dia 8 de Fevereiro de 1957, vítima de um tumor no cérebro.

2.2.Oskar Morgenstern

Oskar Morgenstern nasceu em 1902, na Silésia, Alemanha, aos doze anos, mudou-se para Viena com sua família . Estudou na Universidade de Viena , onde concluiu o doutorado em ciência política, em 1925, com uma tese sobre produtividade marginal. Foi bolsista da Fundação Rockfeller durante três anos.Trabalhou como Privat Dozent (professor assistente) em economia da Universidade de Viena e foi diretor do Instituto Austríaco de Pesquisa dos Ciclos Econômicos, sucedendo ao economista Friedrich von Hayek (1899-1992), em 1931.

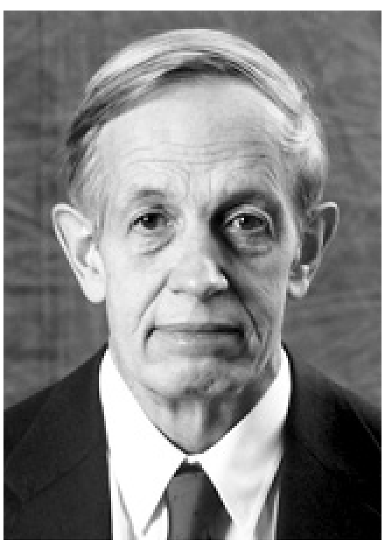
Paulo Henrique de Sousa em sua dissertação de Mestrado Theory of Games and Economic Behaviour: A idéia de ciência de John Von Neumann e Oskar Morgenstern escreve que "no período em que esteve em Viena, trabalhou principalmente, em temas como os ciclos econômicos e a crítica metodológica da economia, tratou de problemas como relação entre tempo e previsão na teoria do equilíbrio geral".

Morgenstern participou dos Colóquios de Viena, organizados por Karl Menger, que possibilitaram contatos científicos entre diversas disciplinas, fazendo surgir várias idéias novas, incluindo novos campos científicos.

Em 1938, emigrou para os Estados Unidos, na iminência da Segunda Guerra Mundial, onde se tornou professor da Universidade de Princeton promovendo várias discussões sobre análise econômica em suas obras. Seu trabalho mais importante foi o livro *Theory of Games and Economic Behaviou*r escrito em 1944 em parceria com John von Neumann. Escreveu também, entre outras obras, *On The Accuracy of Economic Observations* (Na exatidão de observações econômicas, 1950), Wirtschaftsprognose (Previsão Econômica), defendendo a idéia da impossibilidade de se fazer previsões econômicas completas a qualquer tempo, devido à complexidade dos mecanismos que moldam os eventos econômicos.

Aposentou-se na Universidade de Princeton, em 1970 e faleceu em 26 de Julho de 1977 em Princeton, NJ, nos Estados Unidos.

2.3.John Nash, Jr.



John Forbes Nash Jr. nasceu no dia 13 de junho de 1928, em Bluefield na Virgínia Ocidental, Estados Unidos, filho de John, um engenheiro elétrico e de Virgínia, uma professora, tem uma irmã chamada Marta.

John era um menino solitário e introvertido, mesmo tendo crescido em um lar onde recebia atenção e carinho, tinha mais interesse por livros do que pelas pessoas. Sua mãe foi sua professora particular, incentivando sua curiosidade intelectual.

A primeira vez que demonstrou interesse por matemática foi aos quatorze anos, quando leu a obra "*Men of Mathematics"*, de T. Bell, e conseguiu provar um teorema clássico de matemática conhecido como Teorema de Fermat, sobre os números primos. Nash conseguiu descobrir uma prova para a afirmação de Fermat de que se *n* é um número qualquer inteiro e *p* um número primo qualquer, então *n* multiplicado por si mesmo *p* vezes menos *n* é divisível por *p*.

Nash estudou como bolsista no Carnegie Institute of Technology. Seus estudos começaram em engenharia química, mas logo ele ficou desmotivado, passando a estudar matemática. Fez, também, um curso de "Economia Internacional". Assim que se formou na Universidade, com mestrado, decidiu fazer doutorado em matemática.

Foi aceito no programa de doutorado em duas das mais famosas universidades dos Estados Unidos: Harvard e Princeton, mas como a proposta de Princeton foi mais vantajosa, John decidiu aceitá-la. Em Princeton, demonstrou interesse por vários campos de matemática pura: Topologia, Geometria Algébrica, Teoria dos Jogos e Lógica. Formou-se em 1950.

Aos 21 anos, escreveu sua tese de doutorado *Non-Cooperative Games,* de 27 páginas, nessa tese, Nash criou uma teoria que tinha como foco o indivíduo. Nela, a Teoria dos Jogos tinha a possibilidade do ganho mútuo, inventando um conceito que permitia a interrupção do "eu penso que ele pensa que eu penso que ele pensa...", assim, o jogo seria resolvido quando cada um dos jogadores, escolhesse sua melhor resposta para as melhores estratégias dos outros jogadores, independentemente.

Após se formar, lecionou na mesma universidade durante um ano, depois tornou-se professor de matemática da universidade de MIT (Massachusetts Institute of Technology), no período de 1951-1959. Em 1953, teve um filho com Eleanor Stier, chamado John David Stier, mas acabou se casando com Alicia Larde, em 1957, tendo outro filho. Em 1959, John começou a sofrer de esquizofrenia paranóica, em razão disso, teve que desistir de seu posto de professor do MIT, sendo hospitalizado. Durante um longo período, Nash se recuperava temporariamente, e logo depois, tinha uma recaída.

Nash, publicou, além de sua tese de doutorado, mais três artigos importantes para a teoria dos jogos não-cooperativos e para a teoria da barganha. Em "*Equilibrium Points in n-Persons Games*" (Pontos de Equilíbrio em Jogos de N-Pessoas, 1950) e "*Non-cooperative Games*" (Jogos não-cooperativos), Nash provou a existencia de um equilíbrio de estratégias mistas para jogos não-cooperativos, denominado *equilíbrio de Nash*, e sugeriu uma abordagem de estudo de jogos não cooperativos a partir de sua redução para a forma não-cooperativa. Nos artigos "*The Bargaining Problem*" (O Problema da Barganha, 1949) e "*Two-Person Cooperative Games"* (Jogos Cooperativos de Duas Pessoas, 1953)*,* provou a existência de solução para o problema da barganha e criou a Teoria da Barganha e.

> "Nash adotou uma abordagem totalmente nova para o problema de prever como interagiriam duas partes racionais envolvidas na barganha. Em vez de definir a solução diretamente, seu ponto de partida foi relacionar um conjunto de condições razoáveis que qualquer solução plausível teria que satisfazer, e depois olhou para onde aquelas condições o levavam (abordagem axiomática)".
> Nasar, 2000, p 111

Nash, escreve Nasar (2000), foi um gênio que explodiu no cenário da matemática em 1948.

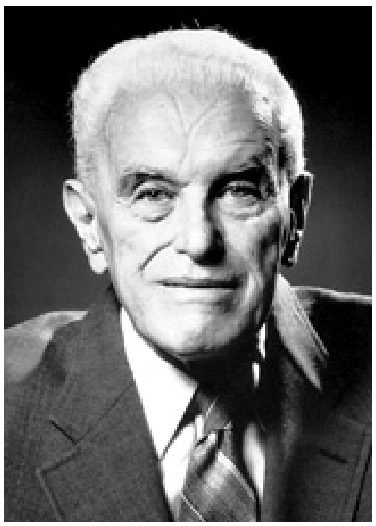
> "Jogos estratégicos, rivalidade econômica, arquitetura de computadores, a forma do universo, a geometria dos espaços imaginários, o mistério dos números primos – tudo atraiu sua imaginação extremamente ampla. Suas idéias eram do tipo profundas e inteiramente inesperadas, que impulsionam o pensamento científico em novas direções."

Além de sua contribuição para a Teoria dos Jogos, Nash escreveu artigos de matemática pura sobre "variedades algébricas", em 1951, e de arquitetura de computadores paralelos, em 1954, enquanto trabalhava para a Rand Corporation – uma empresa de pesquisas de alto nível da Força Aérea americana instalada em Santa Mônica, na Califórnia.

Ganhou o Nobel de Economia em 1994, juntamente com Reinhard Selten e John Harsanyi, por suas contribuições para a Teoria dos Jogos.

Sua biografia foi escrita por Silvia Nasar, no livro *Uma mente brilhante*,1998. Esse livro foi adaptado para o cinema, com o mesmo titulo, por Ron Howard.

2.4.John Harsanyi



John Charles Harsanyi, nasceu no dia 29 de Maio de 1920, em Budapeste, Hungria. Estudou no Ginásio Luterano em Budapeste.Tinha como preferência a Filosofia e a Matemática, como área de estudo. Em 1946, iniciou o doutorado em Filosofia, na Universidade de Budapeste.

Casou-se com Anne Klauber, estudante de psicologia, com quem teve um filho.

Em 1956, Harsanyi ganhou uma bolsa da fundação Rockefeller, que permitiu a ele e sua esposa, passarem dois anos na Universidade de Stanford, onde começou seu doutorado em economia, além de ter estudado matemática e estatística.

Em 1958, retornou para a Austrália, onde começou uma pesquisa na Universidade Nacional da Austrália, em Canberra sobre Teoria dos Jogos, mas sentiu-se solitário, conforme conta em sua autobiografia, pois essa Teoria não era conhecida na Austrália. Com a ajuda de seu orientador do doutorado em economia, Ken Arrow, foi admitido como professor de economia na Universidade Estadual de Wayne, em Detroit. Tornando-se, em 1964, professor na Universidade da Califórnia, em Berkeley.

Sua contribuição para a Teoria dos Jogos, foi o desenvolvimento de análise dos jogos de informação incompleta. Além disso, contribuiu no uso da Teoria dos Jogos e raciocínio econômico em filosofia moral e política.

Publicou quatro livros: *Rational Behavior and Bargaining Equilibrium in Games and Social Situations* (1977), *Essays on Ethics, Social Behavior, and Scientific Explanation* (1976), *Papers in Game Theory* (1982) e A *General Theory of Equilibrium Selection in Games* (1988).

Ganhou o prêmio Nobel de Economia, junto com John F Nash e Reinhard Selten, em 1994.

John C. Harsanyi,morreu no dia 09 de Agosto de 2000.

2.5.Reinhard Selten

Reinhard Selten nasceu no dia 05 de Outubro de 1930, em Breslau. Graduou-se em Matemática e Ciências Econômicas, na Universidade de Frankfurt, onde começou sua carreira como professor.

Sua tese de mestrado foi em Teoria dos Jogos cooperativos, juntamente com seu doutorado, sobre a axiomatização de valores para jogos de n-pessoas na forma extensiva.

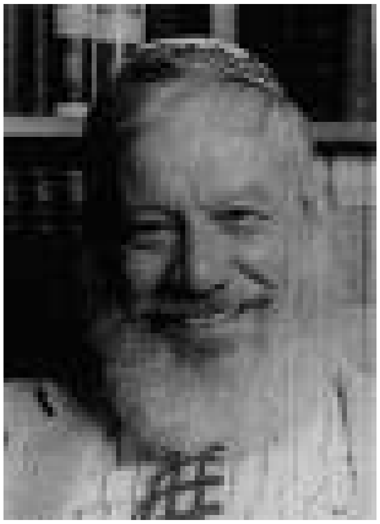
Selten publicou, em 1965, o artigo *Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit*, sendo responsável por um refinamento da noção de equilíbrio de Nash, que teve como nome “equilíbrio perfeito em subjogos”, significando que uma determinada estratégia, para ser considerada um equilíbrio perfeito em subjogos, tem de ser ótima, considerando-se todos os possíveis desdobramentos do processo de interação estratégica. (FIANE, 2006, p.37).

Esse equilíbrio é de fundamental importância em análises estratégicas, em jogos que envolvem compromissos e ameaças, permitindo determinar quais compromissos e ameaças são plausíveis e quais não são.

Selten é também conhecido por seu trabalho em racionalidade limitada, e pode ser considerado como um dos pais da economia experimental.

Reinhard Selten é professor emérito da Universidade de Bonn, Alemanha.

2.6. Robert Aumann



Robert John Aumann nasceu no dia 08 de Junho de 1930 em Frankfurt, Alemanha com dupla nacionalidade : israelita e norte-americana. Graduou-se em matemática pelo City College de Nova York, obtendo mestrado em 1952 e doutorado em 1955 na mesma área, pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT). É membro da Academia Nacional Norte-Americana das Ciências e também trabalha no Centro para a Racionalidade, na Universidade Hebraica de Jerusalém em Israel. Ganhou o Prêmio Nobel da Economia, juntamente com Thomas Schelling. Já foi também professor visitante das universidades de Yale e Princeton, nos Estados Unidos.

Foi primeiro a definir o conceito de equilíbrio correlacionado na Teoria dos Jogos, um tipo de equilíbrio em jogos não-cooperativos, que é mais flexível que o Equilíbrio de Nash**.**

Aumann explica porque quando dois atores só conseguem levar em conta o curto prazo, originam-se conflitos, como as guerras de preços e comerciais. Ele usa a matemática para desenvolver hipóteses e dar-lhes uma formulação precisa.

Também é o responsável pela inclusão da análise do impacto, sobre diversos aspectos dos jogos, do conhecimento que cada uma das partes tem, incluindo o conhecimento do que a outra parte sabe, ou não sabe. Trata-se de um aspecto que pode ser decisivo para tomar decisões, citando como exemplo, que os grupos se tornarão mais dispostos a cooperarem entre si, quanto mais vezes forem forçados a enfrentar uma mesma situação.

Robert Aumann, trabalha com os chamados jogos repetidos. Ele mostrou que a cooperação pacífica é freqüentemente uma solução de equilíbrio em jogos desse tipo. Além de propor uma solução na teoria econômica que envolve a modelagem de uma economia de competição perfeita. Conforme cita a matemática Marilda Sotomayor, professora da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo (USP) , em artigo publicado por Bernardo Esteves na revista on-line ciência hoje

> "...ele propôs um modelo com um continuo de participantes, mais próximo da situação real, onde existe um número grande mas finito de agentes envolvidos(...) A introdução desse 'continuo' permitiu uma análise precisa e rigorosa de situações onde o tratamento por métodos finitos seria muito mais difícil ou mesmo impossível."
>
> Ciência Hoje-2005

Aumann já esteve no Brasil a convite de Sotomayor, onde ofereceu um curso de jogos cooperativos.

> Ele é bastante comunicativo e carismático, gosta de praticar esportes e é muito religioso.(...) Trata-se sem dúvida de um dos maiores pensadores de todos os aspectos da racionalidade na tomada de decisões. Ele tem promovido uma visão unificada do domínio do comportamento racional, que abrange áreas como economia, ciência política, biologia, psicologia, matemática, filosofia, ciência da computação, direito e estatística.
>
> Ciência Hoje-2005

2.7.Thomas Schelling

Thomas C. Shelling nasceu em Oakland (EUA) em 1921. Graduou-se em 1944, pela Universidade da Califórnia em Berkeley, e obteve o doutorado em economia em 1951, pela Universidade de Harvard. Atuou como assessor na Casa Branca, nos anos 1950, após deixar o cargo de professor na Universidade de Yale, vinculou-se à Universidade de Harvard.

Economista norte-americano ganhou o Prêmio Nobel de Economia em 2005, juntamente com o matemático israelense-americano Robert Aumann, por suas aplicações da Teoria dos Jogos a análise de estratégias em situações de conflito e às vantagens da cooperação em relação ao confronto em relações de longo prazo.

É professor emérito das universidades de Maryland e Harvard e autor do livro intitulado *The Strategy of Conflict* (A estratégia do conflito), publicado em 1960. Nessa obra, Schelling analisa a corrida armamentista durante a Guerra Fria e demonstra que há situações nas quais a capacidade de exercer represálias é mais eficaz para intimidar o adversário do que a possibilidade de resistir a um ataque.

Também, disse que uma ameaça imprecisa é mais eficaz do que uma ameaça concreta, além de ter ampliado suas conclusões a outros campos, como as estratégias competitivas de empresas. Através de concessões de curto prazo, podem ser obtidas vantagens de longo prazo, citando como exemplo a criação de um clima de confiança que permite passar do conflito à cooperação.

> Se uma guerra até o fim se tornou inevitável, não restará nada além de puro conflito; mas se há qualquer possibilidade de se evitar uma guerra mutuamente danosa, de se conduzir a guerra de uma forma que sejam minimizados os danos, ou de ser coagir o inimigo ameaçando fazer a guerra em vez de efetivamente fazê-la, a possibilidade de acomodação mútua é tão importante e dramática quanto o elemento de conflito.
>
> (Shelling- apud FIANE,2006 p.179)

A característica de Schelling é a introdução de idéias originais nas análises econômicas com mínimos instrumentos matemáticos.

Além de ter criado o conceito de valor estratégico do risco calculado; trabalhou com problemas que envolviam a cooperação de indivíduos em situações sem conflitos de interesse e também investigou a forma como o comportamento de diferentes indivíduos se confronta na esfera social – tema de Micromotivos e Macromotivos, de 1978. Nessas obras, Schelling desenvolveu um modelo que explica a emergência da segregação (de natureza racial ou sexual, por exemplo) a partir de comportamentos individuais.

2.8. Martin Schubik

Martin Schubik nasceu em 24 de março de 1926, foi educado na universidade de Toronto e Universidade de Princeton. Especializou-se em análise estratégica; estudo de instituições financeiras e em economia da competição. Escreveu sobre economia política, oligopólio e jogos experimentais.

Um dos pioneiros da Teoria dos Jogos, demonstrou uma outra aplicação da teoria, o Leilão do Dólar.

No jogo Leilão do Dólar, leiloa-se uma nota de um dólar e, quem der o maior lance leva o objeto leiloado, ou seja , um dólar. O lance mínimo é de um centavo; mas diferente dos leilões tradicionais, quem der o segundo maior lance, também é obrigado a pagar, mas não leva. Nesse jogo, as coalizões são proibidas, não acontecendo então a cooperação mútua.

Schubik relata:

> "que no início o ambiente é cordial. Quando os lances atingem os cinqüenta centavos, surge um certo mal-estar entre os jogadores, pois fica claro que a banca irá ganhar dinheiro a partir daquele ponto. Mas quando o leilão rompe a barreira de um dólar, o ambiente se deteriora rapidamente. Com lances superiores a um dólar, ninguém mais está preocupado em ganhar, mas em perder menos. E para perder menos, a estratégia é desertar."
>
> (Shubik apud Marinho, 2005, p 30)

Na média, de acordo com Schubik, o Leilão termina no patamar de três dólares e quarenta centavos, havendo casos em que o jogo chega aos catorze dólares.