

Podemos tomar uma dessas raízes como sendo U e a outra como V , logo, temos $u = \sqrt[3]{U}$ e $v = \sqrt[3]{V}$. Portanto, obtemos precisamente a solução enunciada por Tartaglia:

$$x = \sqrt[3]{U} - \sqrt[3]{V}.$$

Mais explicitamente, substituindo U e V pelos seus respectivos valores, resulta a conhecida fórmula que, nos textos, é chamada de *fórmula de Cardano* ou de *Tartaglia*:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

Uma observação final: a equação geral do terceiro grau, que podemos escrever na forma:

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

pode-se reduzir ao caso acima, mediante a mudança de variável $x = y - (a_1/3)$. Aliás, essa redução era conhecida por Tartaglia, mas não por Fior, e foi justamente esse fato que determinou a vitória do primeiro. Isso significa que, na verdade, Tartaglia conhecia um método geral para resolver *qualquer* equação do terceiro grau.



O produto de matrizes

Adaptado do artigo de
Cláudio Possani

*H*á pouco tempo um aluno perguntou-me o porquê da multiplicação de matrizes ser efetuada do modo como é usual. Este artigo é uma tentativa de responder a essa pergunta.

Vamos ver quando e como o produto matricial foi “criado” (“descoberto”? “inventado”?). Se alguém, em algum momento da História, começou a multiplicar matrizes, fazendo o produto das linhas pelas colunas, essa pessoa deve ter tido um bom motivo para fazê-lo.

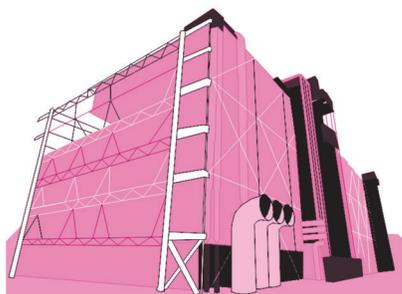
Vamos, inicialmente, apresentar um exemplo baseado numa situação concreta.

Exemplo 1

Imaginemos a seguinte situação:

Uma empresa compra “matérias-primas”, M_1 e M_2 , óleo e essência, e as utiliza para fabricar dois produtos, sabonetes P_1 e P_2 . Vamos indicar numa matriz Q a quantidade de matéria-prima utilizada na produção de cada produto.

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$



Nessa matriz a_{ij} é a quantidade de matéria-prima M_j utilizada na produção do produto P_i (por exemplo, utiliza-se uma quantidade a_{12} de essência M_2 para produzir o sabonete P_1).

Vamos representar numa matriz de “custos”, C , o preço de cada matéria-prima em duas condições diferentes de compra, C_1 e C_2 : preço à vista e preço a prazo.

$$C = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Nessa matriz, o elemento b_{ij} é o preço da matéria-prima M_i comprada nas condições C_j (por exemplo, o preço da essência M_2 , comprada a vista é b_{21}).

Isso significa que:

o custo de produzir P_1 , comprando M_1 e M_2 à vista, é igual a

$$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21};$$

o custo de produzir P_2 , comprando M_1 e M_2 a prazo é igual a

$$a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22},$$

ou seja, se observarmos o produto das matrizes Q e C

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

e se denotarmos

$$Q \times C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

vemos que c_{ij} indica o custo de produzir o produto P_i comprando as matérias-primas na condição C_j .

As matrizes já aparecem mais tarde! Até então não se falava em determinante de uma matriz, mas em determinante do sistema de equações. O conceito de matriz aparece em 1858, num trabalho de Cayley sobre transformações do plano, e a operação matricial envolvida é justamente o produto. Cayley considerava transformações (lineares) do plano \mathbb{R}^2 em si próprio do tipo

$$T(x; y) = (ax + by; cx + dy).$$

Se não quisermos pensar em transformações, podemos considerar mudanças de variáveis:

$$T: \begin{cases} u = ax + by \\ v = cx + dy \end{cases}.$$

Suponhamos duas mudanças de variáveis:

$$T_1: \begin{cases} u = ax + by \\ v = cx + dy \end{cases} \quad \text{e} \quad T_2: \begin{cases} r = Au + Bv \\ s = Cu + Dv \end{cases}.$$

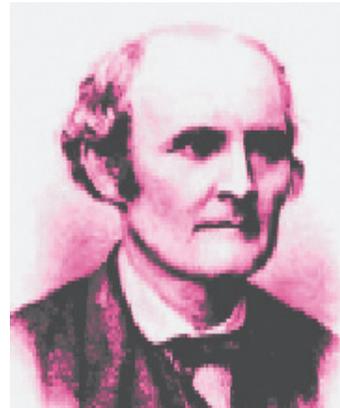
Como podemos expressar r e s em termos de x e y ?

Substituindo as expressões de T_1 em T_2 obtemos:

$$\begin{cases} r = A(ax + by) + B(cx + dy) = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y \\ s = C(ax + by) + D(cx + dy) = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y \end{cases}.$$

Cayley chamou de “matriz de T_1 ” a tabela $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e observou que para obtermos a matriz que fornece r e s em termos de x e y , bastava colocar as matrizes de T_2 e T_1 lado a lado e “multiplicá-las” da maneira como fazemos até hoje:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{pmatrix}.$$



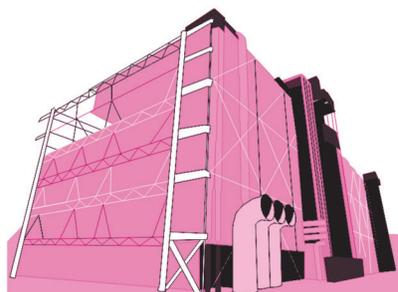
Arthur Cayley

Em linguagem de transformações, a matriz da direita é a matriz da transformação composta $T_2 \circ T_1$. Lembrando que a composição de duas funções não é comutativa, isto é, em geral $f \circ g \neq g \circ f$, vemos como é natural que o produto matricial não comute.

As operações de adição matricial e multiplicação por escalar vieram depois do produto! A segunda metade do século XIX foi um período muito rico para o desenvolvimento da Álgebra, e a idéia de se estudarem estruturas algébricas abstratas ganhava força nessa época. O próprio Cayley (além de B. Peierce e C. S. Peierce), considerando essas operações e o produto matricial, criou o que hoje chamamos de “Álgebra das Matrizes”, que fornece um dos primeiros exemplos de estrutura algébrica com uma operação não comutativa.

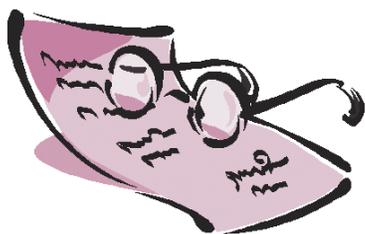
Para finalizar, duas observações: em primeiro lugar, gostaria de destacar a importância de se entender o contexto em que as idéias e as teorias matemáticas são desenvolvidas. O produto matricial, que à primeira vista é um tanto artificial, fica natural quando percebemos qual é o seu significado geométrico e qual foi a motivação de quem o criou. Acredito que, sempre que estudamos ou ensinamos um determinado tópico, deveríamos ter essa preocupação em mente.

Em segundo lugar, a *Teoria das Matrizes* é um ótimo exemplo de como uma teoria científica vai adquirindo importância e tendo aplicações que transcendem o objetivo inicial com que foi criada. É muito difícil julgar o valor de uma idéia no momento em que ela nasce. O tempo é o grande juiz, que decide quais descobertas científicas são, de fato, relevantes.



Sobre o ensino de sistemas lineares

Adaptado do artigo de
Elon Lages Lima



Os sistemas de equações lineares constituem um tópico de grande interesse prático. Seu estudo é acessível aos estudantes, pois não requer o emprego de conceitos sutis ou complicados. Além disso, pode servir como ponto de partida para diversas teorias matemáticas relevantes e atuais. Por estes três motivos, é mais do que justa sua inclusão nos currículos escolares.

Esta nota visa dar aos professores que ensinam sistemas lineares algumas sugestões para ilustrar suas aulas e ajudá-los a situar adequadamente a matéria dentro do contexto dos seus conhecimentos.

Um problema

O curso de Matemática no semestre passado teve três provas. As questões valiam um ponto cada uma, mas os pesos das provas eram diferentes. Jorge, que acertou 6 questões na primeira prova, 5 na segunda e 4 na terceira, obteve no final um total de 47 pontos. Fernando acertou 3, 6 e 6, totalizando 54 pontos. Por sua vez, Marcos acertou 2, 7 e 5



questões, atingindo a soma de 50 pontos no final. Já Renato fez 5 questões certas na primeira prova, 8 na segunda e 3 na terceira. Qual foi o total de pontos de Renato?



Chamando de x , y e z , respectivamente, os pesos da primeira, segunda e terceira provas, as pontuações de Jorge, Fernando e Marcos nos fornecem as equações:



$$6x + 5y + 4z = 47$$

$$3x + 6y + 6z = 54$$

$$2x + 7y + 5z = 50.$$

Com isso, determinamos x , y e z e, a partir daí, a nota final de Renato.

Não é difícil imaginar muitas outras situações que conduzem a sistemas de equações lineares como o acima. Os próprios alunos podem ser solicitados a fornecer tais exemplos, sendo então levados a concluir que os sistemas lineares não foram inventados apenas por capricho dos professores.

Observações gerais

No que se segue, faremos referências ao sistema (S) abaixo:

$$(S) \quad \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

Uma *solução* de (S) é um terno ordenado (x, y, z) de números reais que, substituídos no primeiro membro de cada uma das equações acima, torna-o igual ao segundo membro. Por exemplo, $(2, 3, 5)$ é uma solução do sistema do exemplo anterior e escreve-se

$$x = 2, \quad y = 3, \quad z = 5.$$

O sistema (S) pode ter uma única solução, uma infinidade de soluções, ou nenhuma solução. No primeiro caso, diz-se que o sistema é *determinado*, no segundo, *indeterminado* e, no terceiro, *impossível*.

Os sistemas lineares obedecem ao princípio geral (e um tanto vago) de que para determinar 3 números são necessárias 3 informações distintas sobre esses números.

O sistema é indeterminado quando uma (ou duas) dessas informações é (ou são) consequência(s) das demais. Por exemplo, se nos propusermos a determinar x , y e z sabendo que

$$2x - 4y + 6z = 8,$$

$$x - 2y + 3z = 4 \text{ e}$$

$$3x - 6y + 9z = 12,$$

teremos aí um sistema indeterminado, pois na realidade nos é dada apenas uma informação sobre esses números, a saber, que $x - 2y + 3z = 4$. As outras duas afirmações resultam desta.

A indeterminação significa que o problema expresso pelo sistema (S) possui infinitas soluções, cabendo-nos em cada caso escolher a que melhor se adapta às nossas conveniências.

Já o sistema impossível ocorre quando as informações que nos são fornecidas para calcular x , y e z são incompatíveis. Por exemplo, se uma das equações do sistema é

$$x - 2y + 3z = 4,$$

outra equação não pode ter a forma

$$2x - 4y + 6z = 7.$$

pois, multiplicando a primeira por 2 e subtraindo a segunda, chegaríamos ao absurdo $0 = 1$.

O sistema (S) pode ser encarado sob diversos pontos de vista. Essa variedade de interpretações enriquece a gama de aplicações que tem seu estudo e, por outro lado, permite a utilização de diferentes instrumentos para resolvê-lo. A interpretação geométrica que apresentamos a seguir têm nível elementar e estão ao alcance do aluno do ensino médio.

Interpretação geométrica

Cada solução (x, y, z) do sistema (S) pode ser olhada como um ponto P do espaço tridimensional, dado por suas coordenadas cartesianas:

$P = (x, y, z)$. Sob este ponto de vista, cada uma das equações do sistema é a equação de um plano nesse espaço, e as soluções do sistema são os pontos comuns a esses planos. Mais precisamente, se π_1 , π_2 e π_3 são os planos definidos pelas três equações de (S) , então as soluções de (S) são os pontos $P = (x, y, z)$ que pertencem à interseção $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ desses planos.

Assim, por exemplo, se pelo menos dois desses planos são paralelos, ou se dois deles intersectam o terceiro segundo retas paralelas, a interseção $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ é vazia e o sistema é impossível.

Noutro exemplo, podemos ter uma reta r formando uma espécie de eixo, contido simultaneamente nos três planos.

Então $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r$ e o sistema é indeterminado: suas soluções são os infinitos pontos de r . O sistema é determinado quando os três planos se encontram num só ponto, como duas paredes adjacentes e o teto.

Há ao todo 8 posições relativas possíveis para os planos π_1 , π_2 e π_3 . Quatro dessas posições correspondem aos sistemas impossíveis; nas outras quatro, o sistema tem solução. É importante observar que se pode concluir em qual das 8 posições se encontram os planos de (S) examinando os coeficientes a_i , b_i , c_i e d_i que nele aparecem. O leitor interessado poderá verificar essa afirmação em textos de Álgebra Linear.



Uma experiência sobre o ensino de sistemas lineares

Adaptado do artigo de
Maria Cristina Costa Ferreira
Maria Laura Magalhães Gomes

O estudo dos sistemas lineares está sempre presente nos programas de Matemática do ensino médio. Entretanto, seu significado geométrico, tratado no artigo *Sobre o ensino de sistemas lineares*, pelo Prof. Elon Lages Lima, é comumente deixado de lado.

Por meio de nossas observações e dos depoimentos de alguns participantes de um curso de aperfeiçoamento de professores, pretendemos mostrar como a interpretação geométrica pode contribuir para uma melhor compreensão do estudo dos sistemas lineares.

Procuramos, a seguir, mostrar algumas percepções dos professores durante a experiência do curso, com base nas observações feitas em sala de aula e nos trabalhos por eles apresentados.

A análise feita pelos professores

Dois aspectos destacaram-se: a interpretação geométrica dos sistemas lineares 3×3 e a opção a ser feita entre os métodos de resolução desses sistemas – regra de Cramer ou escalonamento? A seguir comentamos cada um desses aspectos separadamente.



(1) *Interpretação geométrica dos sistemas lineares 3×3*

Segundo os professores, não é de fato usual interpretar geometricamente os sistemas lineares 3×3 , embora essa interpretação seja, em geral, realizada para sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas, quando se faz seu estudo na 7ª série do ensino fundamental. Nesse caso, cada equação do sistema

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2\end{aligned}$$

representa uma reta, e as posições relativas de duas retas no plano são:

- (a) retas concorrentes;
- (b) retas paralelas;
- (c) retas coincidentes.

Nos casos (a), (b) e (c), o sistema possui solução única, não possui solução ou possui infinitas soluções, respectivamente.

Já para sistemas lineares 3×3 da forma

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \quad (2)$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \quad (3)$$

as equações (1), (2), (3) representam planos π_1 , π_2 e π_3 no espaço tridimensional.

Entretanto, as possibilidades para as posições dos três planos são oito. Quatro delas correspondem a sistemas impossíveis (nenhuma solução), três, a sistemas indeterminados^(*) (infinitas soluções), e uma, a sistemas que têm uma única solução.

Os depoimentos abaixo mostram que essa abordagem geométrica torna o assunto mais interessante e dá maior segurança para quem o ensina.

() Nota*

Embora esse seja o nome usual, na verdade o conjunto-solução desses sistemas está completamente determinado, apesar de ter infinitos elementos.

Professor A

“Trabalho com uma turma, do 2º ano do ensino médio, muito interessada em estudar. Quando ia introduzir Sistemas Lineares, fiz uma revisão de sistemas do 1º grau com duas variáveis vistos na 7ª série do ensino fundamental. Os alunos fizeram várias perguntas sobre os tipos de solução. Fiz os gráficos das equações e mostrei as retas paralelas, coincidentes e concorrentes para justificar as soluções. Se não tivesse feito esse curso, teria ficado em ‘apuros’ com 3 variáveis e 3 equações. Eles também me perguntaram como representá-los graficamente.”



Professor B

“Estou sabendo fazer a interpretação geométrica dos problemas, e isso me deixa mais à vontade. Antigamente, sabia fazer algebricamente, mas ficava uma lacuna, um vazio, faltava a interpretação.”

Os comentários feitos podem ser sistematizados assim: ao associar um plano a cada equação do sistema linear 3×3 , a abordagem geométrica permite distinguir tipos diferentes de sistemas indeterminados e impossíveis. Analisando as possibilidades para as posições relativas de três planos no espaço, os professores perceberam que:

1. No caso dos sistemas indeterminados, as infinitas soluções podem ser os pontos de um plano ou de uma reta.
2. No caso dos sistemas impossíveis, a inexistência de soluções pode ocorrer de maneiras distintas: dois ou três planos podem ser paralelos entre si ou os três planos podem se interceptar dois a dois, segundo retas paralelas.

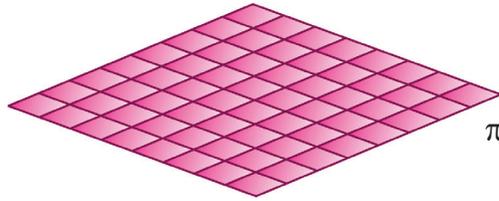
Ilustremos essas situações com alguns exemplos.

Exemplo 1

$$\begin{array}{l} \text{O sistema} \\ \quad x - y + z = 1 \quad (1) \\ \quad 2x - 2y + 2z = 2 \quad (2) \\ \quad 3x - 3y + 3z = 3 \quad (3) \end{array}$$

possui infinitas soluções, pois todos os ternos ordenados de números reais da forma $(a, b, 1 - a + b)$ satisfazem as suas três equações. Vemos imediatamente que cada equação pode ser obtida a partir de qualquer

outra, por meio da multiplicação por uma constante. Portanto, geometricamente, (1), (2) e (3) representam o mesmo plano π , e as infinitas soluções nesse caso são os pontos de π .



$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi$$

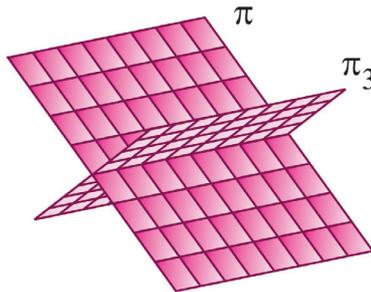
Exemplo 2

O sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 & (1) \\ 2x + 2y + 2z &= 2 & (2) \\ z &= 0 & (3) \end{aligned}$$

também possui infinitas soluções, já que os ternos ordenados do tipo $(a, 1 - a, 0)$, em que a é real, satisfazem as três equações. Contudo, a interpretação geométrica é diferente da do exemplo 1.

De fato, (1) e (2) representam o mesmo plano π anterior, mas (3) representa um outro plano, π_3 , que intersecta π , segundo a reta r . (No espaço, dois planos não coincidentes e não paralelos têm como interseção uma reta.) Ao fazer a variar no conjunto dos números reais, obtemos todos os pontos dessa reta.



$$\pi_1 = \pi_2 = \pi \quad \pi \cap \pi_3 = r$$

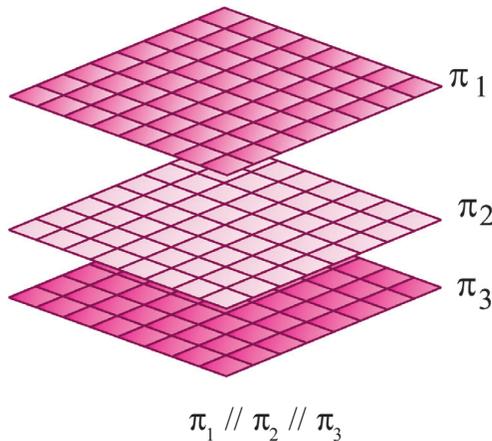
Os exemplos acima mostram duas possibilidades de “indeterminação”. Vejamos agora dois exemplos distintos de sistemas impossíveis.

Exemplo 3

$$\begin{array}{l} \text{O sistema} \\ x + y + z = 0 \quad (1) \\ x + y + z = 1 \quad (2) \\ x + y + z = 2 \quad (3) \end{array}$$

claramente não possui solução.

A situação geométrica corresponde ao caso em que os três planos π_1 , π_2 e π_3 são paralelos, já que não existe um terno ordenado real (x, y, z) que satisfaça simultaneamente quaisquer duas dessas equações.



Exemplo 4

$$\begin{array}{l} \text{O sistema} \\ 2x - 3y + 2z = 2 \quad (1) \\ 3x - 2y + 4z = 2 \quad (2) \\ 4x - y + 6z = 3 \quad (3) \end{array}$$

também não possui solução.

Uma maneira simples de verificarmos esse fato é, por exemplo, somar as equações (1) e (3) e comparar o resultado com a equação (2).

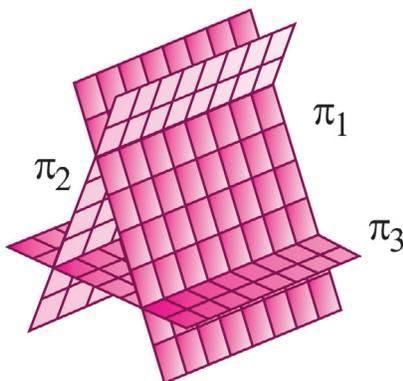
Considerando agora os sistemas formados por (1) e (2), (1) e (3) e por (2) e (3), podemos concluir que $\pi_1 \cap \pi_2$ é uma reta r , $\pi_1 \cap \pi_3$ é uma reta s e $\pi_2 \cap \pi_3$ é uma reta t .

Verifiquemos que r , s e t são paralelas.

Os pontos de r satisfazem (1) e (2), logo não satisfazem (3), pois o sistema é impossível. Portanto, temos r paralela a π_3 . Como s está contida

em π_3 , temos que r e s não se cortam; logo são paralelas, já que ambas estão contidas em π_1 . De modo análogo, vemos que s é paralela a t .

Portanto, a interpretação geométrica do sistema é que os planos representados por suas equações se intersectam dois a dois segundo três retas paralelas.



$$\pi_1 \cap \pi_2 = r \quad \pi_1 \cap \pi_3 = s \quad \pi_2 \cap \pi_3 = t \quad r // s // t$$

Figura 4

2) Regra de Cramer \times escalonamento

Os professores também demonstraram interesse na questão da opção pelo método de resolução de sistemas lineares 3×3 .

A regra de Cramer (Gabriel Cramer, 1704-1752) para resolver sistemas lineares só pode ser aplicada no caso em que o determinante da matriz dos coeficientes das incógnitas do sistema é não nulo. Essa situação corresponde ao caso em que os três planos se intersectam num ponto e o sistema tem solução única. Entretanto vários livros afirmam, erroneamente, que um sistema que possui nulos todos os determinantes da regra de Cramer é indeterminado.

Com relação à discussão sobre a utilização incorreta da regra de Cramer, os professores também se manifestaram. Vários deles citaram livros em que aparece a afirmativa acima e admitiram que já haviam cometido tal erro ao ensinar. A interpretação geométrica dos sistemas lineares possibilitou-lhes perceber claramente a falsidade dessa afirmativa por meio de exemplos que eles mesmos souberam construir. Vejamos um desses exemplos.

Exemplo 5

O sistema

$$x + y + z = 0 \quad (1)$$

$$x + y + z = 1 \quad (2)$$

$$x + y + z = 2 \quad (3)$$

considerado no exemplo 3, claramente não possui solução (os três planos são paralelos). Entretanto, os determinantes utilizados na regra de Cramer são todos nulos, pois as matrizes possuem pelo menos duas colunas iguais.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \Delta x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

A partir do curso, os professores passaram a dar mais ênfase ao método de escalonamento, mais geral, tendo adotado essa prática em suas salas de aula, como mostram os seguintes relatos.

Professor C

“Este curso me ajudou muito, principalmente na resolução de sistemas lineares 3 x 3, com os quais antes trabalhava, usando determinantes e quando encontrava todos os determinantes iguais a zero, classificava o sistema como indeterminado, cometendo o mesmo erro de alguns autores. Após o curso passei a resolver sistemas com meus alunos, usando o escalonamento. Tenho mais clareza e segurança ao abordar o assunto.”

Professor D

“Apesar de não ter mencionado a resolução de sistemas por Cramer quando $\Delta = 0$, alguns alunos repetentes apresentaram soluções com a teoria errada. A referência ao assunto que vi no curso ajudou-me a perceber e a comentar o erro. Acredito que no próximo ano eu apresentarei esse assunto de forma melhor.”

Conclusão

A associação dos sistemas lineares 3×3 com a Geometria Espacial foi, como vimos, uma surpresa para os professores, que logo pensaram um modo de adaptar tal interpretação à realidade da sala de aula.

Alguns ponderaram que, apesar do estudo de retas e planos no espaço ser feito após o de sistemas lineares, é possível apresentar aos alunos a associação geométrica, de maneira simples. Consideraram importante a analogia com o estudo de sistemas lineares 2×2 , que é feito no ensino fundamental. Esse exemplo é, a nosso ver, uma boa ilustração de como se pode enriquecer o trabalho com a Matemática, evitando-se uma visão compartimentada, presente muitas vezes entre os professores.



Gabriel Cramer

Capítulo 2

Funções

Uso de polinômios para surpreender

Adaptado do artigo de
Catherine Herr Mulligan



Introdução

*A*o ensinar álgebra, tento apresentar a matéria como relevante e útil, mas não creio que seja necessário manter sempre as considerações de “relevância” ligadas ao mundo real. A maioria dos meus alunos continuará estudando Matemática e tento ensinar-lhes que a álgebra é um instrumento que se usa em Matemática superior –uma linguagem comum e um meio de comunicação. As aplicações ao mundo real são importantes, mas também é bom que os alunos vejam como se usa a álgebra para o bem da Matemática.

A aritmética dos polinômios é uma boa área para implementar essa filosofia. A manipulação de expressões polinomiais é uma técnica essencial; no entanto, como qualquer habilidade que exige prática, pode tornar-se repetitiva e monótona.

Uma coleção de alguns “fatos surpreendentes” permite ao aluno “descobrir” e então demonstrar esses fatos, usando a aritmética dos polinômios.

Alguns dos fatos envolvem “truques” para cálculo mental rápido, que podem ser explicados, usando uma representação polinomial simples.

Nesta época de calculadoras, esses fenômenos são introduzidos, não porque são rápidos, mas porque funcionam; os alunos são desafiados a provar *por que* funcionam!



Fato Surpreendente 1

Se dois números de dois algarismos têm iguais os algarismos das dezenas, e se os algarismos das unidades somam 10, pode-se calcular seu produto instantaneamente.

Se os alunos me testam, com 77×73 , por exemplo, respondo instantaneamente 5621. Após mais um ou dois exemplos, revelo meu “truque”: multiplica-se o algarismo das dezenas, 7, pelo seu sucessor, 8, achando 56, cujos algarismos serão, nessa ordem, os algarismos dos milhares e das centenas da resposta. Acrescenta-se à direita de 56 o produto dos algarismos das unidades, 7×3 ou 21, obtendo-se 5621.

Podemos aumentar a confiança no processo, aplicando-o a vários outros casos, mas muitos exemplos não constituem uma demonstração. Porém, se usarmos binômios para representar os números a serem multiplicados, podemos dar uma demonstração que independe dos exemplos escolhidos.

Represente por a o algarismo das dezenas dos dois números considerados e por b o algarismo das unidades do primeiro número. Então o algarismo das unidades do segundo número será $10 - b$.

Logo, $10a + b$ é o primeiro número e $10a + (10 - b)$, o segundo número. Seu produto é:

$$(10a + b) \times (10a + 10 - b) = \dots = 100a(a + 1) + b(10 - b).$$

Fato Surpreendente 2

Se você somar 1 ao produto de quatro inteiros consecutivos, o resultado sempre será um quadrado perfeito.

Alguns exemplos levarão os alunos a suspeitar que essa afirmação é sempre verdadeira. Poderemos anotar nossas observações no quadro-negro assim:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 25 = 5^2, \quad 2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 121 = 11^2, \\ 97 \times 98 \times 99 \times 100 + 1 = 94109401 = 9701^2.$$

Para obter uma prova desse fato, vamos representar os inteiros consecutivos por: n , $n+1$, $n+2$ e $n+3$.

Então

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 \quad (1)$$

Temos, agora, dois procedimentos possíveis.

Alguns alunos notarão que o quadrado perfeito, nos nossos exemplos numéricos, é o quadrado de 1 mais o produto do primeiro pelo último termo da seqüência (é também o quadrado de 1 menos o produto do segundo pelo terceiro termo da seqüência). Poderemos observar, por exemplo, que

$$4 \times 5 \times 6 \times 7 + 1 = 841 = 29^2 = (1 + 4 \times 7)^2.$$

Expressando em polinômios, escrevemos

$$[1 + n(n+3)]^2 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1. \quad (2)$$

Isso, além de confirmar que (1) é um quadrado perfeito, também nos diz de que número é o quadrado perfeito.

Outra maneira de proceder é trabalhar diretamente a partir de (1) e conjecturar que seria bom fatorar o segundo membro e ver que ele é um quadrado perfeito. Esse quadrado teria, para um a conveniente, a forma:

$$(n^2 + an + 1)^2 = n^4 + 2an^3 + (2 + a^2)n^2 + 2an + 1. \quad (3)$$

Igualando os coeficientes em (1) e (3), temos:

$$2a = 6 \text{ e } 2 + a^2 = 11, \text{ ou seja, } a = 3.$$



Então, $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$.

Fato Surpreendente 3

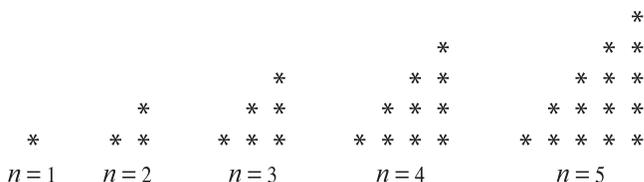
O quociente da divisão por 8 de um produto de quatro inteiros positivos consecutivos é um número triangular.

Definimos número triangular como sendo um número da forma $\frac{n(n+1)}{2}$ para n um natural positivo.

Logo, esses números são:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28... fazendo $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$

A razão do nome triangular é explicada pela figura:



Testamos o resultado no exemplo:

$(3 \times 4 \times 5 \times 6) \div 8 = 45$ que é o número triangular para $n = 9$.

Para a prova do resultado, escrevemos o produto de quatro inteiros consecutivos, dividido por 8, como:

$$\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{8} = \frac{m(m+3)}{2} \times \frac{(m+1)(m+2)}{2} \times \frac{1}{2} =$$

$$\frac{m^2 + 3m}{2} \times \frac{m^2 + 3m + 2}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{m^2 + 3m}{2} \times \left[\frac{m^2 + 3m}{2} + 1 \right] \times \frac{1}{2}.$$

Logo, temos um número triangular para $n = \frac{m^2 + 3m}{2}$, pois esse número é um inteiro positivo; verificar isso é um exercício interessante que deve ser proposto aos alunos.

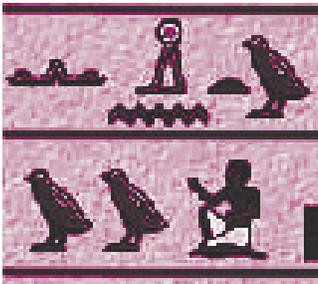
Codificando e decifrando mensagens

Adaptado do artigo de
Antonio Carlos Tamarozzi

Introdução

Operações de serviços disponíveis na Internet, movimentações bancárias e outras transações eletrônicas necessitam da criptografia para comunicação confidencial de dados.

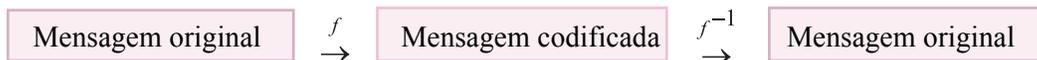
A palavra criptografia tem origem grega (*kripto* = escondido, oculto; *grapho* = grafia) e define a arte ou ciência de escrever mensagens em códigos, de forma que somente pessoas autorizadas possam decifrá-las. A criptografia é tão antiga quanto a própria escrita; já estava presente no sistema de escrita hieroglífica dos egípcios e os romanos utilizavam códigos secretos para comunicar planos de batalha. Contudo, desde aquele tempo, seu princípio básico continua o mesmo: encontrar uma transformação (função) injetiva f entre um conjunto de mensagens escritas em um determinado alfabeto (de letras, números ou outros símbolos) para um conjunto de mensagens codificadas. O fato de f ser inversível é a garantia de o processo ser reversível e as mensagens poderem ser reveladas pelos receptores.



O grande desafio de um processo criptográfico, portanto, está em ocultar eficientemente os mecanismos (chaves) para a inversão de f , de modo que estranhos não possam fazê-lo.

Emissor

Receptor



Descreveremos aqui dois exemplos elementares de processos criptográficos, sendo o primeiro acessível inclusive para alunos do ensino fundamental. Acreditamos que possam constituir material útil para exercícios, como também para atividades e jogos de codificação. O professor pode dispor deles para fixação de conteúdos matemáticos associados, como por exemplos: funções e matrizes.

Inicialmente, relacionamos números ao alfabeto (o símbolo # representa um espaço em branco) que vamos utilizar nos modelos. Assim:

#	A	B	...	J	K	L	...	V	W	X	Y	Z
0	1	2	...	10	11	12	...	22	23	24	25	26

Portanto, cifrar uma mensagem recai no problema de permutar números por meio de uma regra f . Pode-se fazer isso, de forma muito prática, por exemplo, através das funções afins $f(x) = ax + b$, com a, b inteiros, $a \neq 0$, definidas no conjunto $\{0, 1, \dots, 26\}$.

Suponhamos que Ana e Ivo desejem trocar mensagens sigilosas utilizando o alfabeto escolhido. O primeiro passo a tomarem é definirem a função cifradora, digamos $f(x) = 2x - 3$.

Assim, por exemplo, à mensagem

REVISTA RPM

Ana associa a seqüência numérica

18 5 22 9 19 20 1 0 18 16 13



mas transmite a Ivo a seqüência numérica obtida pelas imagens de f , isto é,

33 7 41 15 35 37 -1 -3 33 29 23.

Ao recebê-la, Ivo, calculando a imagem da função inversa de $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$ nessa seqüência e utilizando a correspondência alfabeto-numérica, obtém a mensagem original, pois:

$$f^{-1}(33) = \frac{33+3}{2} = 18 = R, \dots, f^{-1}(23) = \frac{23+3}{2} = 13 = M. .$$

Depois de os alunos dominarem o processo, seria oportuno que o professor propusesse situações em que um intruso tente decifrar mensagens apoderando-se das seqüências numéricas codificadas. Como estamos utilizando funções afins, para tanto é suficiente apenas duas associações corretas entre números das seqüências original e codificada. Admitindo conhecidas essas associações, é um exercício interessante para os alunos determinarem f .

O segundo método criptográfico que apresentaremos utiliza matrizes invertíveis como chaves, o que dificulta um pouco mais sua violação.

Suponhamos que Ana e Ivo combinem previamente utilizar a matriz

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e sua inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ como chaves. Para transmitir

a mesma mensagem acima, Ana inicialmente monta uma matriz mensagem M dispondo a seqüência numérica associada em colunas e completa a posição restante com 0, ou seja, obtém

$$M = \begin{pmatrix} 18 & 22 & 19 & 1 & 18 & 13 \\ 5 & 9 & 20 & 0 & 16 & 0 \end{pmatrix}.$$

Em seguida, codifica-a calculando,

$$AM = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & 22 & 19 & 1 & 18 & 13 \\ 5 & 9 & 1 & 0 & 16 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 64 & 84 & 97 & 3 & 86 & 39 \\ 23 & 31 & 39 & 1 & 34 & 13 \end{pmatrix},$$

e transmite a seqüência 64 23 84 31 97 39 3 1 86 34 39 13. Para ler a mensagem recebida, Ivo, da mesma forma, restaura a forma matricial AM , e em seguida, com sua chave A^{-1} , pode recuperar M através da identidade matricial,

$$M = A^{-1}(AM)$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 & 84 & 97 & 3 & 86 & 39 \\ 23 & 31 & 39 & 1 & 34 & 13 \end{pmatrix}.$$

Como já frisamos, os métodos tratados neste trabalho tem apenas caráter instrutivo. Na prática atual tais processos são pouco utilizados pela inconveniência de exigirem trocas prévias de chaves entre os usuários. Portanto, são inviáveis na descrição de transações eletrônicas nas quais um único receptor recebe dados de milhares de emissores, como ocorre em vendas pela Internet, transações bancárias e outras. Mesmo nesses casos mais complexos, a Matemática resolveu a trama, e desta vez, quem diria, o ramo da Teoria dos Números.

